પ્રકરણ 3

સુરેખપથ પર ગતિ (MOTION IN A STRAIGHT LINE)

3.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

વિશ્વમાં બધી જ બાબતો માટે ગતિ સામાન્ય છે. જેમકે આપણે ચાલીએ, દોડીએ અને સાઇકલ ચલાવીએ, જ્યારે આપણે ઊંઘી જઈએ ત્યારે પણ આપણા ફેફસાંમાં અંદર અને બહાર જતી હવા તથા ધમની અને શીરામાં વહેતું લોહી. આપણે વૃક્ષ પરથી નીચે પડતાં પાંદડા અને બંધમાંથી નીચે વહેતું પાણી જોઈએ છીએ. વાહનો અને વિમાનો લોકોને એક સ્થળેથી બીજા સ્થળે લઈ જાય છે. પૃથ્વી ચોવીસ કલાકમાં એકવાર ભ્રમણ કરે છે અને વર્ષમાં એક વખત સૂર્યની આસપાસ પરિક્રમણ કરે છે. સૂર્ય પોતે આકાશગંગા (Milky Way)માં ગતિમાં છે, જે ફરીથી આકાશગંગાના સ્થાનિક સમૂહમાં ગતિ કરે છે.

પદાર્થનાં સ્થાનમાં સમય સાથે થતાં ફેરફારને ગતિ કહે છે. સમય સાથે સ્થાન કેવી રીતે બદલાતું હશે ? આ પ્રકરણમાં, ગતિનું વર્ણન કેવી રીતે થાય તે ભણીશું. આ માટે આપણે વેગ અને પ્રવેગનો ખ્યાલ વિકસાવીશું. આપણે પદાર્થની સુરેખ રેખા પર થતી ગતિના અભ્યાસ પૂરતા સીમિત રહીશું. આવી ગતિ **સુરેખગતિ (Rectilinear Motion)** તરીકે જાણીતી છે. અચળ પ્રવેગ સાથે થતી સુરેખગતિના કિસ્સામાં સાદા સમીકરણોનો સમૂહ મેળવી શકાય છે. અંતે ગતિની સાપેક્ષ પ્રકૃતિ સમજવા માટે આપણે સાપેક્ષ વેગનો ખ્યાલ રજૂ કરીશું.

આપણી ચર્ચામાં, ગતિ કરતાં પદાર્થને બિંદુવત્ પદાર્થ (કણ) ગણીશું. જ્યાં સુધી પદાર્થનું પરિમાણ માફકસર સમયગાળામાં તેણે કાપેલ અંતરની સરખામણીમાં ખૂબ નાનું હોય ત્યાં સુધી આવું સન્નિકટ નિરૂપણ માન્ય થશે. વાસ્તવિક જીવનમાં ઘણીબધી પરિસ્થિતિઓમાં પદાર્થોનાં પરિમાણને અવગણી શકાય છે અને વધારે ત્રુટિ વગર તેને બિંદુવત્ પદાર્થ ગણી શકાય છે.

શુદ્ધ ગતિ-વિજ્ઞાનમાં પદાર્થની ગતિનાં કારણોની ચર્ચા કર્યા સિવાય માત્ર તેની ગતિનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. આ પ્રકરણ અને પછીના પ્રકરણમાં વર્ણવેલ ગતિનાં કારણો પ્રકરણ 5માં વિષયવસ્તુનું સ્વરૂપ છે.

3.2 સ્થાન, પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતર (POSITION, PATH LENGTH AND DISPLACEMENT)

અગાઉ તમે ભણી ગયાં છો કે પદાર્થનાં સ્થાનમાં સમય સાથે થતાં ફેરફારને ગતિ કહે છે. પદાર્થનું સ્થાન નક્કી કરવા આપણને એક સંદર્ભ બિંદુ અને અક્ષોનાં સમૂહનો ઉપયોગ કરવાની જરૂર પડશે. અનુકૂળતા માટે ત્રણ પરસ્પર લંબ અક્ષો, જેવી કે X–, Y– અને Z– અક્ષો, ધરાવતી લંબ યામાક્ષ

(Rectangular Co-ordinate) પ્રણાલિ પસંદ કરીશું. આ ત્રણેય અક્ષોનાં છેદબિંદુને ઊગમબિંદુ (O) કહે છે. જેને **સંદર્ભબિંદુ** તરીકે લઈ શકાય. કોઈ પણ પદાર્થના યામો (x, y, z) આ યામાક્ષ પદ્ધતિની સાપેક્ષે તેનું સ્થાન દર્શાવે છે. સમયના માપન માટે આ તંત્રમાં એક ઘડિયાળ મૂકવામાં આવે તો ઘડિયાળ સહિત આ તંત્રને **નિર્દેશફ્રેમ** (Frame of reference) કહે છે.

કોઈ પણ પદાર્થના એક કે તેથી વધુ યામો સમય સાથે બદલાતાં હોય, તો આપણે કહી શકીએ કે પદાર્થ ગતિમાં છે. અન્યથા પદાર્થ આ નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષે સ્થિર સ્થિતિમાં છે તેમ કહેવાય.

કોઈ નિર્દેશફ્રેમમાં અક્ષોની પસંદગી પરિસ્થિતિ પર નિર્ભર કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક પારિમાણિક ગતિનાં વર્ણન માટે આપણને એક જ અક્ષની જરૂર પડે છે. દ્વિ, ત્રિપારિમાણિક ગતિનાં વર્ણન માટે આપણને બે/ત્રણ અક્ષોના સમૂહની જરૂર પડે.

કોઈ ઘટનાના વર્ણનનો આધાર, વર્ણન માટે પસંદ કરેલ નિર્દેશફ્રેમ પર છે. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યારે તમે કહો કે કાર સડક પર દોડી રહી છે ત્યારે કારની ગતિનું વર્ણન તમારી સાથે અથવા જમીન (Ground) સાથે સંકળાયેલ નિર્દેશફ્રેમના સંદર્ભે કરો છો. પરંતુ કારમાં બેઠેલ વ્યક્તિ સાથે સંકળાયેલ નિર્દેશફ્રેમની સાપેક્ષે કાર સ્થિર છે તેમ કહેવાય.

સુરેખ રેખા પર થતી ગતિનાં વર્ણન માટે આપણે એક અક્ષ એવી પસંદ કરીશું (ધારો કે X-અક્ષ) કે જે પદાર્થના ગતિમાર્ગ પર સંપાત થતી હોય. આકૃતિ 3.1માં દર્શાવ્યા મુજબ સરળતા ખાતર પસંદ કરેલ ઊગમબિંદુ Oની સાપેક્ષે પદાર્થનું સ્થાન નક્કી કરવામાં આવે છે. Oની જમણી બાજુનાં સ્થાનો ધન અને Oની ડાબી બાજુનાં સ્થાનોને ઋણ લેવામાં આવે છે. આ સંજ્ઞા પ્રણાલિ અનુસાર આકૃતિ 3.1માં બિંદુ P અને Qના સ્થાન યામ અનુક્રમે +360 m અને +240 m છે. આ જ રીતે બિંદુ Rનું સ્થાન યામ −120 m છે.

પથલંબાઈ (PATH LENGTH)

એક કાર સુરેખ રેખા પર ગતિ કરે છે તેમ સ્વીકારો. આપણે X-અક્ષની પસંદગી એવી કરીએ કે તે કારના ગતિમાર્ગ ઉપર સંપાત થાય અને કાર ગતિની શરૂઆત કરે છે, તે બિંદુએ X-અક્ષનું ઊગમબિંદુ હોય એટલે કે $t = 0$ સમયે કાર $x = 0$ પાસે હતી. (આકૃતિ 3.1) ધારો કે જુદી જુદી ક્ષણે P, Q અને R બિંદુઓ કારનું સ્થાન દર્શાવે છે. કારના બે કિસ્સા વિચારો. પ્રથમ કિસ્સામાં કાર O થી P સુધી ગતિ કરે છે. તો કાર વડે કપાયેલ અંતર OP = + 360 m, આ અંતરને કાર વડે કપાયેલ **પથલંબાઈ** કહે છે. બીજા કિસ્સામાં, કાર પહેલા O થી P સુધી ગતિ કરે છે અને પછી P થી Q સુધી પરત આવે છે. ગતિના આ કિસ્સામાં કાર વડે કપાયેલ પથલંબાઈ OP + PQ = +360 m + (+120) m = +480 m પથલંબાઈ અદિશ રાશિ છે, એટલે કે તેને માત્ર માન હોય છે જ્યારે દિશા હોતી નથી. (જુઓ પ્રકરણ 4.)

સ્થાનાંતર (DISPLACEMENT)

સ્થાનમાં થતાં ફેરફાર માટે બીજી રાશિ સ્થાનાંતરને વ્યાખ્યાયિત કરવી ઉપયોગી નીવડશે. ધારો કે t_1 અને t_2 સમયે એક પદાર્થનાં સ્થાનો x_1 અને x_2 છે, તો $\Delta t = (t_2 - t_1)$ જેટલા સમયમાં તેનું સ્થાનાંતર Δx વડે દર્શાવાય જે અંતિમ અને પ્રારંભિક સ્થાનનો તફાવત આપે છે.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

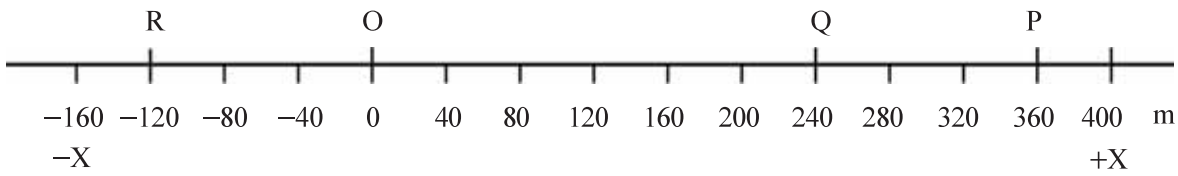
(રાશિમાં થતાં ફેરફારને ગ્રીક અક્ષર ડેલ્ટા (Δ) વડે દર્શાવાય છે.)

જો $x_2 > x_1$ તો Δx ધન થાય અને જો $x_2 < x_1$ તો Δx ઋણ થાય.

સ્થાનાંતરને માન અને દિશા બંને હોય છે. આવી રાશિઓને સદિશો વડે રજૂ કરાય છે. તમે સદિશો વિશેનો અભ્યાસ હવે પછીના પ્રકરણમાં કરશો. આપણે સુરેખ માર્ગ પર થતી ગતિ (જેને રેખીયગતિ પણ કહે છે)ની ચર્ચા કરીશું. એક પારિમાણિક ગતિમાં માત્ર બે જ દિશા હોય છે. (આગળ તરફ અને પાછળ તરફ, ઉપર તરફ અને નીચે તરફ) કે જ્યાં, પદાર્થ ગતિ કરી શકે અને આ બંને દિશાઓને સહેલાઈથી + અને − સંજ્ઞાઓ વડે દર્શાવી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે કાર O થી P સુધી ગતિ કરે છે ત્યારે તેનું સ્થાનાંતર

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (+360 \text{ m}) - 0 \text{ m} = +360 \text{ m}.$$

અહીં સ્થાનાંતરનું માન 360 m અને દિશા ધન X દિશામાં છે જે + સંજ્ઞા વડે દર્શાવી છે. આ જ રીતે કારનું Pથી Q સ્થાનાંતર 240 m − 360 m = −120 m. અહીં, ઋણ



આકૃતિ 3.1 X-અક્ષ, ઊગમબિંદુ અને જુદા જુદા સમયે કારનાં સ્થાનો

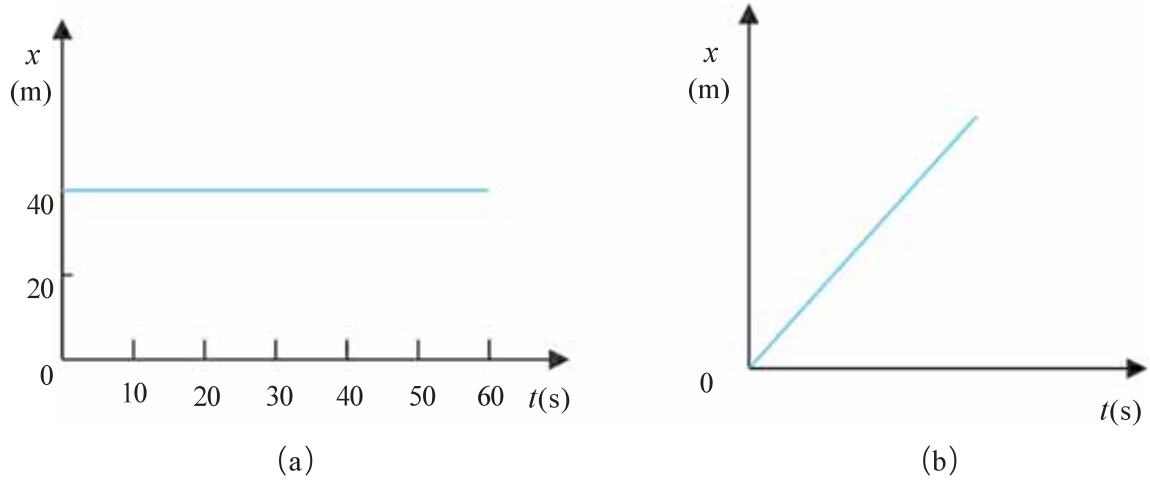
નિશાની સ્થાનાંતરની દિશા સૂચવે છે. આમ, પદાર્થોની એક-પારિમાણિક ગતિની ચર્ચામાં સદિશ સંકેતોના ઉપયોગની જરૂરિયાત નથી.

સ્થાનાંતરનું માન ગતિમાન પદાર્થે કાપેલ પથલંબાઈ જેટલું હોઈ પણ શકે અને ન પણ હોય. ઉદાહરણ તરીકે, કારની O થી P ગતિ માટે પથલંબાઈ +360 m અને સ્થાનાંતર +360 m છે. આ કિસ્સામાં સ્થાનાંતરનું માન (360 m) અને પથલંબાઈ (360 m) સરખી છે. કાર Oથી P સુધી જઈ અને Q પર પરત આવે તેવી ગતિ વિચારો. આ કિસ્સામાં, પથલંબાઈ = (+360 m) + (+120 m) = +480 m. પરંતુ સ્થાનાંતર = (+240 m) − (0 m) = +240 m. આમ, સ્થાનાંતરનું માન (240 m), પથલંબાઈ (480 m) જેટલી સરખી નથી.

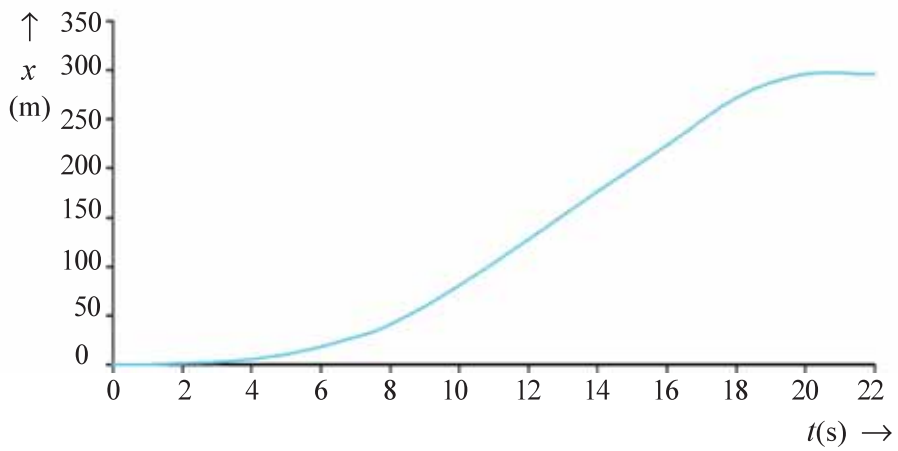
સ્થાનાંતરનું માન ગતિની કોઈ વર્તણૂક માટે શૂન્ય હોઈ શકે છે, પરંતુ તદ્અનુરૂપ પથલંબાઈ **શૂન્ય હોતી નથી** ઉદાહરણ તરીકે, જો કાર O થી ગતિ શરૂ કરીને P પર જાય છે અને પછી O પાસે પરત આવે તો અંતિમ સ્થાન, પ્રારંભિક સ્થાન સાથે સંપાત થાય છે અને સ્થાનાંતર શૂન્ય થાય. આમ છતાં, મુસાફરીની પથલંબાઈ OP + PO = +360 m + 360 m = 720 m થાય છે.

તમે અગાઉ ભણી ગયાં છો કે, પદાર્થની ગતિને સ્થાન-સમય આલેખ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે. આ આલેખ પદાર્થની ગતિનાં જુદાં જુદાં પાસાઓનું વિશ્લેષણ અને રજૂઆત કરવા માટેનું શક્તિશાળી સાધન છે. સુરેખ રેખા પર થતી ગતિને X-અક્ષ પર લેવામાં આવે તો સમય સાથે માત્ર x-યામ બદલાય અને આપણને $x - t$ આલેખ મળે. ધારો કે પ્રથમ સાદો કિસ્સો વિચારીએ કે જેમાં પદાર્થ સ્થિર હોય. ઉદાહરણ તરીકે કાર, x = 40 m પાસે સ્થિર ઊભી છે. આ કિસ્સામાં સ્થાન-સમય ($x - t$) આલેખ આકૃતિ 3.2(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ સમયની અક્ષને સમાંતર હોય છે.

જો સુરેખ રેખા પર ગતિ કરતો કોઈ એક પદાર્થ એક સરખા સમયગાળામાં એકસરખું અંતર કાપે તો તેની ગતિ સુરેખ રેખા પરની **નિયમિત ગતિ (Uniform motion)** કહેવાય. આકૃતિ 3.2(b) આવી ગતિ માટે સ્થાન-સમય આલેખ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 3.2 સ્થાન-સમય આલેખ (a) સ્થિર પદાર્થ માટે અને (b) નિયમિત ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે



આકૃતિ 3.3 કાર માટે સ્થાન-સમય આલેખ

હવે આપણે એ કારની ગતિનો વિચાર કરીશું જે ઊગમબિંદુ O થી $t = 0$ s સમયે સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિની શરૂઆત કરે છે અને તેની ઝડપ $t = 10$ s સુધી વધે છે. ત્યાર બાદ નિયમિત ઝડપથી $t = 18$ s સુધી ગતિ કરે છે, પછી બ્રેક લગાડતા કાર $t = 20$ s પછી $x = 296$ m અંતરે સ્થિર થાય છે. આ કિસ્સા માટે સ્થાન-સમય ($x - t$) આલેખ આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ છે. આપણે આ આલેખની ચર્ચા નીચેના પરિચ્છેદમાં કરીશું :

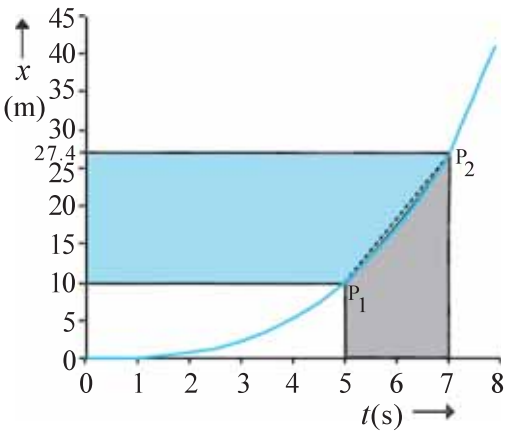
3.3 સરેરાશ વેગ અને સરેરાશ ઝડપ (AVERAGE VELOCITY AND AVERAGE SPEED)

જ્યારે પદાર્થ ગતિમાં હોય છે ત્યારે તેનું સ્થાન સમય સાથે બદલાય છે પણ સમય સાથે કેટલી ઝડપથી સ્થાન બદલાશે અને કઈ દિશામાં ? આનું વર્ણન કરવા આપણે એક રાશિ **સરેરાશ વેગ**ને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. સ્થાનમાં થતા ફેરફાર અથવા સ્થાનાંતર (Δx) અને તે માટે લાગતા સમયગાળા (Δt)ના ગુણોત્તર (ભાગાકાર)ને સરેરાશ વેગ કહે છે.

$$\bar{\upsilon} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.1)$$

જ્યાં, x_2 અને x_1, પદાર્થનાં અનુક્રમે t_2 અને t_1 સમયે સ્થાનો છે. અહીં, વેગ પર દર્શાવેલ બાર (Bar)ની નિશાની પ્રમાણિત સંજ્ઞા છે. જેનો ઉપયોગ સરેરાશ રાશિ દર્શાવવા થાય છે. વેગનો SI એકમ m/s અથવા m s^{-1} છે. જો કે ઘણા રોજિંદા ઉપયોગોમાં km h^{-1} વપરાય છે.

સરેરાશ વેગ પણ સ્થાનાંતરની માફક સદિશ રાશિ છે. પરંતુ આગળ સમજાવ્યું તેમ સુરેખ રેખા પરની ગતિમાં સદિશની દિશા નિર્દેશન માટે + અને – સંજ્ઞાઓની કાળજી રાખવી જોઈએ. આપણે વેગ માટે સદિશની નિશાનીનો ઉપયોગ આ પ્રકરણમાં કરીશું નહિ.

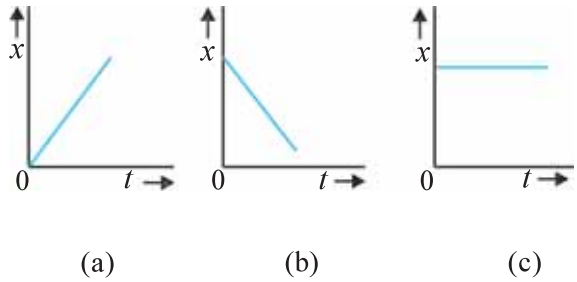


આકૃતિ 3.4 રેખા P_1P_2નો ઢાળ સરેરાશ વેગ છે

ધારો કે કારની ગતિનો આલેખ આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ છે. $x - t$ આલેખમાં $t = 0$ s અને $t = 8$ s વચ્ચેનો ભાગ વિવર્ધિત કરીને આકૃતિ 3.4માં દર્શાવેલ છે. આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે $t = 5$ s અને $t = 7$ s વચ્ચેના સમયમાં સરેરાશ વેગ

$$\bar{\upsilon} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{27.4 - 10.0}{7 - 5} = 8.7 \text{ m s}^{-1}$$

ભૌમિતિક રીતે, આ મૂલ્ય આકૃતિ 3.4માં દર્શાવેલ પ્રારંભિક સ્થાન P_1 અને અંતિમ સ્થાન P_2ને જોડતી સીધી રેખા P_1P_2ના ઢાળ જેટલું છે. સરેરાશ વેગ ધન કે ઋણ હશે તેનો આધાર સ્થાનાંતરની સંજ્ઞા પર રહેલો છે. જો સ્થાનાંતર શૂન્ય હોય, તો તે પણ શૂન્ય હોય. પદાર્થની ગતિ માટે આકૃતિ 3.5માં $x - t$ આલેખો દર્શાવેલ છે, જેમાં ધન વેગથી ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે 3.5(a), ઋણ વેગ માટે 3.5(b) અને સ્થિર પદાર્થ માટે 3.5(c).



આકૃતિ 3.5 પદાર્થ માટે સ્થાન-સમયનો આલેખ (a) ધન વેગ સાથે ગતિ (b) ઋણ વેગ સાથે ગતિ અને (c) સ્થિર સ્થિતિમાં

સરેરાશ વેગને ઉપર મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે પદાર્થનું માત્ર સ્થાનાંતર આવશ્યક છે. અગાઉ આપણે જોયું તેમ સ્થાનાંતરનું માન મૂળ પથલંબાઈ કરતાં જુદું હોઈ શકે છે. પદાર્થના સમગ્ર ગતિપથ પર ગતિનો દર દર્શાવવા આપણે **સરેરાશ ઝડપ** નામની બીજી રાશિ રજૂ કરીશું.

પદાર્થની મુસાફરીની અવધિમાં કપાયેલ કુલ પથલંબાઈ અને તે માટે લાગતાં સમયગાળાનાં ભાગાકાર (ગુણોત્તર)ને **સરેરાશ ઝડપ** વડે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{\text{કુલ પથલંબાઈ}}{\text{કુલ સમયગાળો}} \qquad (3.2)$$

સરેરાશ ઝડપને પણ તે જ એકમ હોય જે વેગનો એકમ (m s^{-1}) છે. પરંતુ તે પદાર્થ કઈ દિશામાં ગતિ કરે છે તે દર્શાવતું નથી. આમ, સરેરાશ ઝડપ હંમેશાં ધન હોય છે. (તેનાથી વિરુદ્ધ સરેરાશ વેગ કે જે ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે). જો પદાર્થની ગતિ સુરેખ રેખા પર અને **એક જ દિશામાં** થતી હોય, તો સ્થાનાંતરનું માન કુલ પથલંબાઈ જેટલું હોય,

આવા કિસ્સામાં સરેરાશ વેગનું માન, સરેરાશ ઝડપ જેટલું હોય છે. આ વાત હંમેશાં સાચી નથી જે તમે નીચે આપેલ ઉદાહરણ 3.1માં જોઈ શકશો :

> **ઉદાહરણ 3.1** એક કાર સુરેખ રેખા પર ગતિ કરે છે. જેમકે આકૃતિ 3.1માં OP. આ કાર 18 sમાં O થી P જાય છે અને 6 sમાં P થી Q પરત જાય છે. (a) કાર O થી P જાય ત્યારે અને (b) O થી P પર જઈ Q પર પાછી ફરે. ત્યારે તેનો સરેરાશ વેગ અને સરેરાશ ઝડપ શું હશે ?

ઉકેલ (a)

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{+360\ \text{m}}{18\ \text{s}} = +20\ \text{m s}^{-1}$$

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{\text{પથલંબાઈ}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$= \frac{360\ \text{m}}{18\ \text{s}} = 20\ \text{m s}^{-1}$$

આમ, આ કિસ્સામાં સરેરાશ ઝડપ અને સરેરાશ વેગના માન સરખા છે.

(b) આ કિસ્સામાં,

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{\text{સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}} = \frac{+240\ \text{m}}{(18+6.0)\ \text{s}}$$

$$= 10\ \text{m s}^{-1}$$

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{\text{પથલંબાઈ}}{\text{સમયગાળો}} = \frac{\text{OP}+\text{PQ}}{\Delta t}$$

$$= \frac{(360+120)\ \text{m}}{24\ \text{s}} = 20\ \text{m s}^{-1}$$

આમ, આ કિસ્સામાં, સરેરાશ ઝડપ, સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી સમાન નથી તેનું કારણ તે છે કે ગતિ દરમિયાન દિશામાં ફેરફાર થાય છે. પરિણામ સ્વરૂપ પથલંબાઈ સ્થાનાંતરનાં માન કરતાં વધારે છે. જે દર્શાવે છે કે **સામાન્યતઃ ઝડપ વેગના માન કરતાં વધારે હોય છે** (ખાસ કિસ્સામાં સરખા હોઈ શકે).

ઉદાહરણ 3.1માં જો કાર O થી P ગતિ કરી અને O પર તેટલા જ સમયગાળામાં પરત ફરે તો સરેરાશ ઝડપ 20 m/s થાય. પરંતુ સરેરાશ વેગ શૂન્ય થાય !

3.4 તત્કાલીન (તાત્ક્ષણિક) વેગ અને ઝડપ (INSTANTANEOUS VELOCITY AND SPEED)

સરેરાશ વેગ એ પદાર્થ આપેલ સમયગાળામાં કેટલી ઝડપી ગતિ કરે છે તેની માહિતી આપે છે પરંતુ આ સમયગાળા દરમિયાનના જુદા જુદા તાત્ક્ષણિક સમયે કેટલી ઝડપે ગતિ કરે છે, તે જાણી શકાતું નથી. આ માટે આપણે તાત્ક્ષણિક વેગ અથવા t ક્ષણે વેગ υ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

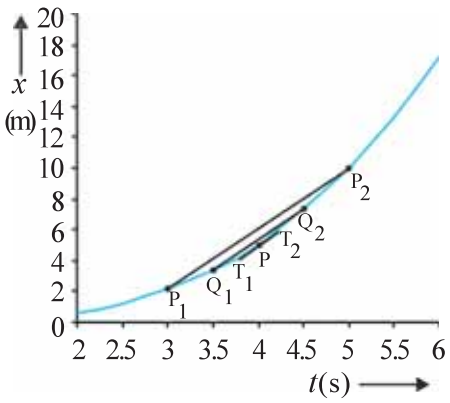
કોઈ ક્ષણે વેગને એટલે કે તત્કાલીન વેગને, સરેરાશ વેગના અતિસૂક્ષ્મ સમયગાળા (Δt)ના લક્ષ વડે દર્શાવી શકાય છે. બીજા શબ્દોમાં

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.3a)$$

$$= \frac{dx}{dt} \qquad (3.3b)$$

જ્યાં, $\lim_{\Delta t \to 0}$ નો સંકેત તેની જમણી બાજુ રહેલી રાશિ પર $\Delta t \to 0$ના લક્ષમાં ક્રિયા દર્શાવે છે. કલન ગણિતની ભાષામાં, સમીકરણ (3.3b)માં જમણી બાજુ આવેલી રાશિને xનો t સાપેક્ષે વિકલિત ગુણક કહે છે અને તેને $\frac{dx}{dt}$ વડે દર્શાવ્યો છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 3.1) તે સમયને સાપેક્ષ તે ક્ષણે સ્થાનના ફેરફારનો દર છે. સમીકરણ (3.3a)નો ઉપયોગ કરીને આપણે કોઈ ક્ષણે વેગનું મૂલ્ય આલેખીય રીતે અથવા સંખ્યાકીય (સાંખ્યિક) રીતે મેળવી શકીએ છીએ. ધારો કે આપણે આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ ગતિમાન કારનાં (બિંદુ P) $t = 4$ s માટે વેગનું મૂલ્ય આલેખીય રીતે મેળવવું છે, તો ગણતરીની સગવડતા ખાતર આકૃતિ 3.3ને અલગ સ્કેલમાપ પર આકૃતિ 3.6માં દર્શાવેલ છે.

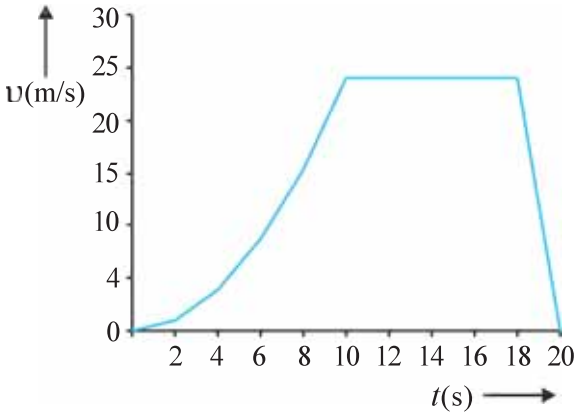
ધારો કે $t = 4$ sને કેન્દ્રમાં લઈને $\Delta t = 2$ s લઈએ તો સરેરાશ વેગની વ્યાખ્યા મુજબ, સુરેખ રેખા P_1P_2 (આકૃતિ 3.6)નો ઢાળ, 3 s અને 5 sનાં સમયગાળા માટે



આકૃતિ 3.6 સ્થાન-સમય આલેખ દ્વારા વેગ શોધવો. $t = 4$ s પર વેગ, તે ક્ષણે આલેખના સ્પર્શકના ઢાળ જેટલો હોય છે.

સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય આપે છે. હવે આપણે Δtનું મૂલ્ય 2 sથી ઘટાડી 1 s કરીએ. તો P_1P_2 રેખા Q_1Q_2 રેખા બને છે અને તેનો ઢાળ, 3.5 s અને 4.5 sના સમયગાળા માટે સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય આપે છે. આમ, limit $\Delta t \to 0$ના લક્ષમાં, રેખા P_1P_2 સ્થાન-સમય વક્રના P બિંદુએ સ્પર્શક બને છે અને આ બિંદુના સ્પર્શકનો ઢાળ $t = 4$ s માટે સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય આપે છે. **જોકે આલેખની રીતે આ બધી પ્રક્રિયા દર્શાવવી કઠિન છે. પરંતુ વેગના મૂલ્ય માટે સંખ્યાત્મક પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરીએ તો સીમાંત પ્રક્રિયા (Limiting Process)નો અર્થ સ્પષ્ટ થઈ જાય.** આકૃતિ 3.6માં $x = 0.08t^3$ માટે આલેખ દર્શાવ્યો છે. કોષ્ટક 3.1માં $\Delta x/\Delta t$નાં મૂલ્યો $t = 4.0$ sને કેન્દ્રમાં રાખી $\Delta t = 2.0$ s, 1.0 s, 0.5 s, 0.1 s અને 0.01 s માટે દર્શાવેલ છે. બીજા અને ત્રીજા સ્તંભ (Columns)માં $t_1 = \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)$ તથા $t_2 = \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ અને ચોથા અને પાંચમા સ્તંભમાં xનાં તદ્અનુરૂપ મૂલ્યો એટલે કે $x(t_1) = (0.08)t_1^3$ તથા $x(t_2) = (0.08)t_2^3$ દર્શાવેલ છે. છઠ્ઠા સ્તંભમાં તફાવત $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ની યાદી અને અંતિમ સ્તંભમાં Δx અને Δtનો ગુણોત્તર આપેલ છે, કે જે પ્રથમ સ્તંભમાં દર્શાવેલ Δtના મૂલ્યોને અનુરૂપ સરેરાશવેગ દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 3.1 પરથી સ્પષ્ટ છે કે જેમ જેમ આપણે Δtનું મૂલ્ય 2.0 sથી ઘટાડીને 0.01 s કરીએ છીએ તેમ તેના સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય સીમાંત મૂલ્ય (Limiting Value) 3.84થી વધુ નજીક આવતું જાય છે, જે $t = 4.0$ s માટે વેગનું મૂલ્ય છે. એટલે કે $t = 4.0$ s માટે $\frac{dx}{dt}$ના મૂલ્ય જેટલું જ છે. આવી જ રીતે, આકૃતિ 3.3 દર્શાવેલ ગતિ માટે પ્રત્યેક ક્ષણે આપણે કારનો વેગ શોધી શકીએ છીએ. આ કિસ્સા માટે, સમય સાપેક્ષે મેળવેલ વેગમાં થતો ફેરફાર આકૃતિ 3.7માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.7 આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ ગતિના સંદર્ભે વેગ-સમયનો આલેખ

તાત્ક્ષણિક વેગ શોધવા માટે આલેખીય પદ્ધતિ, દરેક વખતે સુવિધાજનક હોતી નથી. આ માટે આપણે સ્થાન-સમયનો આલેખ કાળજીપૂર્વક દોરવો પડે અને Δt ક્રમશઃ ઘટાડતા જઈને સરેરાશ વેગનાં મૂલ્યની ગણતરી કરવી જોઈએ. જો આપણી પાસે જુદી જુદી ક્ષણોને અનુરૂપ સ્થાનની આધારભૂત માહિતી ઉપલબ્ધ હોય અથવા સ્થાનનું સમયપરનું ચોક્કસ સૂત્ર હોય, તો વેગનું મૂલ્ય ગણતરી દ્વારા શોધવું વધુ સરળ પડે છે. આવી સ્થિતિમાં આપણે આધારભૂત માહિતી પરથી Δtનાં ક્રમશઃ ઘટાડેલાં મૂલ્યો માટે $\Delta x/\Delta t$ની ગણતરી કરી કોષ્ટક 3.1માં કરેલ પ્રવિધિ મુજબ સીમાંત મૂલ્ય શોધીએ છીએ અથવા આપેલ સૂત્ર માટે વિકલિત કલનશાસ્ત્રનો ઉપયોગ કરીને જુદી જુદી ક્ષણો માટે $\frac{dx}{dt}$ની ગણતરી કરીએ છીએ જે ઉદાહરણ 3.2માં કરેલ છે.

કોષ્ટક 3.1 $t = 4$ s માટે $\frac{\Delta x}{\Delta t}$નું સીમાંત મૂલ્ય (Limiting Value)

Δt (s)	t_1 (s)	t_2 (s)	$x(t_1)$ (m)	$x(t_2)$ (m)	Δx (m)	$\Delta x/\Delta t$ (m s^{-1})
2.0	3.0	5.0	2.16	10.0	7.84	3.92
1.0	3.5	4.5	3.43	7.29	3.86	3.86
0.5	3.75	4.25	4.21875	6.14125	1.9225	3.845
0.1	3.95	4.05	4.93039	5.31441	0.38402	3.8402
0.01	3.995	4.005	5.100824	5.139224	0.0384	3.8400

ઉદાહરણ 3.2 x-અક્ષને અનુલક્ષીને ગતિ કરતાં એક પદાર્થનું સ્થાન $x = a + bt^2$ વડે દર્શાવ્યું છે. જ્યાં $a = 8.5$ m, $b = 2.5$ ms^{-2} અને tનું માપન સેકન્ડમાં કરેલ છે. $t = 0$ સમયે તેનો વેગ કેટલો હશે ? 2.0 s અને 4.0 s વચ્ચે સરેરાશ વેગ કેટલો હશે ?

ઉકેલ વિકલન કલનશાસ્ત્રની સંજ્ઞા મુજબ વેગ,

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(a + bt^2) = 2bt = 5.0\ t \text{ m s}^{-1}$$

જ્યારે, $t = 0$ s, $\upsilon = 0$ m s^{-1} અને જ્યારે $t = 2.0$ s, $\upsilon = 10$ m s^{-1}

$$\text{સરેરાશ વેગ} = \frac{x(4.0) - x(2.0)}{4.0 - 2.0}$$

$$= \frac{a + 16b - a - 4b}{2.0} = 6.0 \times b$$

$$= 6.0 \times 2.5 = 15 \text{ m s}^{-1}$$

આકૃતિ 3.7 પરથી સ્પષ્ટ છે કે $t = 10$ s થી $t = 18$ s સમય દરમિયાન વેગ અચળ છે. $t = 18$ s થી $t = 20$ s વચ્ચેના સમયમાં નિયમિત રીતે ઘટે છે અને $t = 0$ s થી $t = 10$ s સમય દરમિયાન તે વધે છે. **નોંધો કે, નિયમિત ગતિ માટે દરેક ક્ષણે વેગ, સરેરાશ વેગ જેટલો હોય છે.**

તાત્ક્ષણિક ઝડપ અથવા ઝડપ ગતિમાન પદાર્થના વેગનું માન. ઉદાહરણ તરીકે, +24.0 m s^{-1} વેગ અને –24.0 m s^{-1} વેગ બંને સાથે સંકળાયેલ ઝડપ 24.0 m s^{-1} છે. અહીં એક બાબત નોંધો કે સીમિત (Finite) સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ એ સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી કે તેનાથી વધુ હોઈ શકે. પરંતુ કોઈ પણ ક્ષણ માટે મેળવેલ તાત્ક્ષણિક ઝડપ તે જ ક્ષણ માટે તાત્ક્ષણિક વેગનાં માન જેટલી હોય છે. આવું કેમ ?

3.5 પ્રવેગ (ACCELERATION)

સામાન્ય રીતે, પદાર્થ ગતિમાં હોય તે દરમિયાન તેના વેગમાં ફેરફાર થતો હોય છે. આ ફેરફાર કેવી રીતે વર્ણવી શકાય ? શું તેને **સ્થાન સાપેક્ષે** અથવા **સમય સાપેક્ષે** વેગમાં થતાં ફેરફારના દર વડે વર્ણવી શકાય ? આ સમસ્યા ગૅલેલિયોના સમયમાં પણ હતી. પ્રથમ તેણે વિચાર્યું કે, આ ફેરફારને અંતર સાપેક્ષે વેગના ફેરફારના દર તરીકે વર્ણવી શકાય. પરંતુ મુક્ત પતન પામતાં અને ઢોળાવવાળી સપાટી પર ગતિ કરતા પદાર્થોની ગતિના અભ્યાસ દરમિયાન ગૅલેલિયોએ એવું અનુમાન કર્યું કે, બધા જ મુક્ત પતન પામતા પદાર્થોની ગતિ માટે વેગના ફેરફારનો દર સમય સાથે અચળ રહે છે. જ્યારે બીજી તરફ અંતર સાપેક્ષે વેગમાં થતો ફેરફાર અચળ નથી. પરંતુ પતન પામતાં પદાર્થનું અંતર વધે તેમ તે (વેગનો ફેરફાર) ઘટે છે. સમય સાપેક્ષે વેગમાં થતા ફેરફારનો દર પ્રવેગના ખ્યાલ તરફ દોરી જાય છે.

વેગના ફેરફાર અને સમયગાળાના ભાગાકાર (ગુણોત્તર)ને આપેલ સમયગાળા માટે સરેરાશ પ્રવેગ કહે છે.

$$\bar{a} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \qquad (3.4)$$

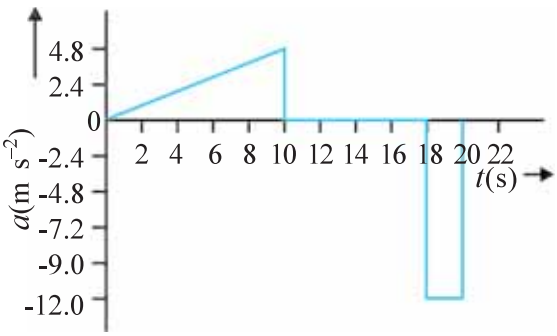
જ્યાં, υ_2 અને υ_1 અનુક્રમે t_2 અને t_1 સમયે તાત્ક્ષણિક વેગ અથવા વેગ છે. પ્રવેગ, એકમ સમયમાં વેગમાં થતો સરેરાશ ફેરફાર છે. જેનો SI એકમ m s^{-2}.

વેગ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ દોરવામાં આવે, તો (υ_2, t_2) અને (υ_1, t_1)ને જોડતી સુરેખાનો ઢાળ સરેરાશ પ્રવેગ જેટલો હોય છે. સરેરાશ પ્રવેગ માટે આકૃતિ 3.7માં વેગ-સમયનો આલેખ દર્શાવ્યો છે. જુદા જુદા સમયગાળા 0 s – 10 s, 10 s – 18 s અને 18 s – 20 s માટે પ્રવેગ

$$0 \text{ s} - 10 \text{ s}, \quad \bar{a} = \frac{(24-0)\text{m s}^{-1}}{(10-0)\text{s}} = 2.4 \text{ m s}^{-2}$$

$$10 \text{ s} - 18 \text{ s}, \quad \bar{a} = \frac{(24-24)\text{m s}^{-1}}{(18-10)\text{s}} = 0 \text{ m s}^{-2}$$

$$18 \text{ s} - 20 \text{ s}, \quad \bar{a} = \frac{(0-24)\text{m s}^{-1}}{(20-18)\text{s}} = -12 \text{ m s}^{-2}$$



આકૃતિ 3.8 આકૃતિ 3.3માં દર્શાવેલ ગતિ માટે સમયના વિધેય તરીકે પ્રવેગ

તાત્ક્ષણિક વેગની માફક જ તાત્ક્ષણિક પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad (3.5)$$

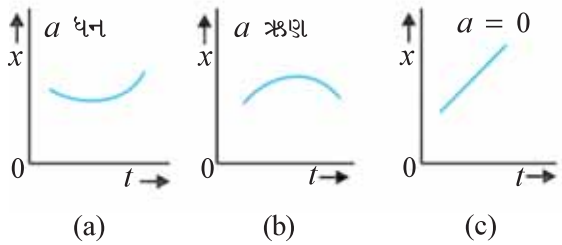
$\upsilon - t$ વક્રના કોઈ એક ક્ષણ માટે દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ તે ક્ષણે પ્રવેગ દર્શાવે છે. આકૃતિ 3.7માં દર્શાવેલ $\upsilon - t$ વક્ર માટે પ્રત્યેક ક્ષણ માટે આપણે પ્રવેગ મેળવી શકીએ છીએ. પરિણામી $a - t$ વક્ર, આકૃતિ 3.8માં દર્શાવેલ છે. આપણે

જોઈ શકીએ છીએ કે 0 s થી 10 sની વચ્ચે પ્રવેગ અનિયમિત છે. 10 s થી 18 sની વચ્ચે પ્રવેગ શૂન્ય અને 18 s થી 20 s વચ્ચે -12 m s^{-2}ના મૂલ્ય સાથે પ્રવેગ નિયમિત છે. જ્યારે પ્રવેગ નિયમિત હોય, તો સમગ્ર સમયગાળા પર સરેરાશ પ્રવેગ સરખો હોય છે.

જેમકે, વેગ એવી રાશિ છે જેને માન અને દિશા બંને છે તેથી વેગનો ફેરફાર પણ કોઈ પણ એક અથવા આ બંને ઘટકો ધરાવે છે. માટે જ ઝડપ (વેગનું માન)માં ફેરફારને લીધે કે વેગની દિશાના ફેરફારને લીધે અથવા આ બંનેમાં ફેરફારને કારણે પ્રવેગ ઉદ્ભવે છે. વેગની માફક પ્રવેગ ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે છે. ધન, ઋણ અને શૂન્ય પ્રવેગી ગતિ માટે સ્થાન-સમય આલેખો આકૃતિ 3.9 (a), (b) અને (c) અનુક્રમે દર્શાવેલ છે. નોંધો કે, આલેખમાં ધન પ્રવેગ માટેનો વક્ર ઉપર તરફ, ઋણ પ્રવેગ માટેનો વક્ર-આલેખ નીચે તરફ અને શૂન્ય પ્રવેગ માટે તે સુરેખ છે. સ્વાધ્યાય માટે આકૃતિ 3.3માં પ્રવેગના ઉપર્યુક્ત ત્રણેય કિસ્સાને અનુરૂપ વક્ર વિભાગો ઓળખી બતાવો.

જોકે પ્રવેગ સમય સાથે બદલાઈ શકે છે. આ પ્રકરણમાં આપણો અભ્યાસ નિયમિત પ્રવેગી ગતિ સુધી સીમિત રાખીશું. આ કિસ્સામાં, સરેરાશ પ્રવેગનું મૂલ્ય ગતિનાં ગાળા માટે મળેલ પ્રવેગનાં મૂલ્ય જેટલું હોય છે. જો $t = 0$ સમયે પદાર્થનો વેગ υ_0 અને t સમયે υ હોય તો.

$$\bar{a} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t - 0} \quad \text{અથવા} \quad \upsilon = \upsilon_0 + at \qquad (3.6)$$



આકૃતિ 3.9 (a) *ધન પ્રવેગ* (b) *ઋણ પ્રવેગ* (c) *શૂન્ય પ્રવેગવાળી ગતિ માટે સ્થાન-સમય આલેખ*

હવે આપણે જોઈએ કે, કેટલાક સાદા કિસ્સાઓ માટે વેગ–સમય આલેખ કેવા મળે છે. નિયમિત પ્રવેગિ ગતિ માટે વેગ–સમય આલેખના કેટલાક કિસ્સાઓ આકૃતિ 3.10માં દર્શાવેલ છે.

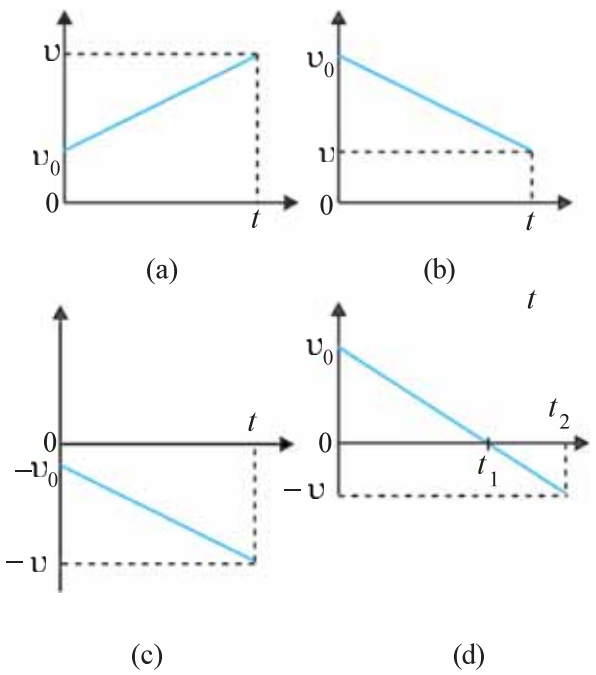
(a) પદાર્થ ધન પ્રવેગ સાથે ધન દિશામાં ગતિ કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.3માં $t = 0$ s થી $t = 10$ s વચ્ચે કારની ગતિ.

(b) પદાર્થ ઋણ પ્રવેગ સાથે ધન દિશામાં ગતિ કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.3માં $t = 18$ s થી $t = 20$ s વચ્ચેની કારની ગતિ.

(c) પદાર્થ ઋણ પ્રવેગ સાથે ઋણ દિશામાં ગતિ કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.1માં O પાસેથી ઋણ x-દિશામાં વધતી ઝડપથી દોડતી કારની ગતિ.

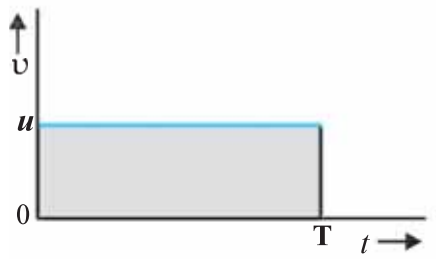
(d) પદાર્થ ધન દિશામાં t_1 સમય સુધી ગતિ કરે અને પછી તેટલા જ ઋણ પ્રવેગ સાથે પાછી ફરે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.1માં ગતિ કરતી કાર t_1 સમય સુધી ઘટતી ઝડપે Q સુધી ગતિ કરે અને પછી તેટલા જ ઋણ પ્રવેગ સાથે પાછી ફરે.

કોઈ ગતિમાન પદાર્થના વેગ-સમય આલેખનું એક રસપ્રદ લક્ષણ તે છે કે, **$\upsilon - t$ આલેખ નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ તે સમયગાળા માટે પદાર્થનું સ્થાનાંતર દર્શાવે છે.** આ કથનની સામાન્ય સાબિતી માટે કલનશાસ્ત્રનો ઉપયોગ કરવો



આકૃતિ 3.10 *અચળ પ્રવેગી ગતિ માટે વેગ-સમય આલેખ (a) ધન પ્રવેગ સાથે ધન દિશામાં ગતિ (b) ઋણ પ્રવેગ સાથે ધન દિશામાં ગતિ (c) ઋણ પ્રવેગ સાથે ઋણ દિશાની ગતિ (d) ઋણ પ્રવેગ સાથે ગતિ કરતો પદાર્થ કે જેની દિશા t_1 સમયે બદલાય છે. 0 થી t_1 સમય વચ્ચે તે ધન દિશામાં ગતિ કરે છે અને t_1 થી t_2 વચ્ચે તે વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે.*

પડે. તેમ છતાં આપણે અચળવેગ u થી ગતિ કરતાં પદાર્થના એક સરળ કિસ્સા માટે તેની સત્યાર્થતા જોઈશું. આ પદાર્થ માટે વેગ-સમય આલેખ આકૃતિ 3.11માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.11 $\upsilon - t$ વક્ર વડે દોરાયેલ ક્ષેત્રફળ આપેલ સમયગાળામાં પદાર્થના સ્થાનાંતર જેટલું હોય છે.

અહીં $\upsilon - t$ વક્ર સમયની અક્ષને સમાંતર સુરેખા છે અને $t = 0$ થી $t = T$ વચ્ચે તેના દ્વારા દોરાતું ક્ષેત્રફળ u ઊંચાઈ અને T પાયાવાળા લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળ જેટલું છે. તેથી, ક્ષેત્રફળ $= u \times T = uT$, જે આ સમયગાળા માટે થતાં સ્થાનાંતર જેટલું છે. આ કિસ્સામાં કાપેલ અંતર ક્ષેત્રફળ જેટલું કેવી રીતે આવે ? વિચારો ! બંને અક્ષ પર રહેલી રાશિનાં પરિમાણો નોંધો જેના પરથી તમે જવાબ સુધી પહોંચી શકશો.

નોંધ : આ પ્રકરણમાં ઘણી જગ્યાએ $x - t$, $\upsilon - t$, $a - t$ આલેખો છે. જેમાં કેટલાંક બિંદુઓ તીક્ષ્ણ વળાંક (Sharp Kinks) ઉપર આવેલ છે. જે સૂચવે છે કે બિંદુઓએ આપેલ વિધેયોનું વિકલન થઈ શકે નહિ. પરંતુ કોઈ વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં, જો આલેખનાં દરેક બિંદુઓએ વિધેયનું વિકલન થઈ શકે, તો તે આલેખ સરળ વક્ર (Smooth) હશે.

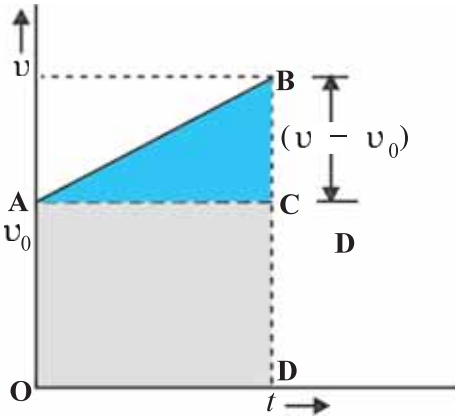
આનો અર્થ એવો થયો કે, કોઈ એક ક્ષણે વેગ અને પ્રવેગનાં મૂલ્યોનો ફેરફાર અચાનક (Abruptly) નહિ થાય પરંતુ આ ફેરફારો હંમેશાં સતત હશે.

3.6 નિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે શુદ્ધ ગતિવિજ્ઞાનનાં સમીકરણો (KINEMATIC EQUATIONS FOR UNIFORMLY ACCELERATED MOTION)

નિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે આપણે કેટલાંક સાદાં સમીકરણો મેળવીશું કે જે સ્થાનાંતર (x), લીધેલ સમય (t), પ્રારંભિક વેગ (υ_0), અંતિમ વેગ (υ) અને પ્રવેગ (a) સાથે જોડાયેલ છે. સમીકરણ 3.6માં અગાઉ આપણે સાબિત કરી ચૂક્યા છીએ કે જે a જેટલા નિયમિત પ્રવેગથી ગતિ કરતાં પદાર્થમાં અંતિમ અને પ્રારંભિક વેગ (υ) અને (υ_0) વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad (3.6)$$

આ સંબંધ આકૃતિ 3.12માં આલેખીય રીતે દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.12 નિયમિત પ્રવેગી ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે $\upsilon - t$ વક્ર નીચે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ

વક્ર વડે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ :

0 અને t ક્ષણો વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ = ત્રિકોણ ABCનું ક્ષેત્રફળ + લંબચોરસ OACDનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}(\upsilon - \upsilon_0)t + \upsilon_0 t$$

આગળના પરિચ્છેદમાં સમજાવ્યું તે મુજબ, $\upsilon - t$ વક્ર નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ સ્થાનાંતર સૂચવે છે. માટે પદાર્થનું સ્થાનાંતર x :

$$x = \frac{1}{2}(\upsilon - \upsilon_0)\, t + \upsilon_0 t \qquad (3.7)$$

પરંતુ, $\upsilon - \upsilon_0 = at$

તેથી, $x = \frac{1}{2}at^2 + \upsilon_0 t$ અથવા

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.8)$$

સમીકરણ (3.7) નીચે મુજબ પણ લખી શકાય :

$$x = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} t = \bar{\upsilon} t \qquad (3.9a)$$

જ્યાં

$$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} \text{ (માત્ર નિયમિત પ્રવેગ માટે)} \qquad (3.9b)$$

સમીકરણ (3.9a) અને (3.9b) સૂચવે છે કે પદાર્થનું સ્થાનાંતર x, સરેરાશ વેગના સંદર્ભે થાય છે, જે પ્રારંભિક અને અંતિમ વેગોના અંકગાણિતિક સરેરાશ જેટલું હોય છે.

સમીકરણ (3.6) પરથી, $t = (\upsilon - \upsilon_0)/a$ સમીકરણ (3.9a)માં મૂકતાં,

$$x = \bar{\upsilon} t = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} \frac{\upsilon - \upsilon_0}{a} = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax \qquad (3.10)$$

સમીકરણ (3.6)માંથી tનું મૂલ્ય સમીકરણ (3.8)માં મૂકીને પણ ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પણ મેળવી શકાય છે. આમ, આપણે ત્રણ અગત્યનાં સમીકરણો મેળવ્યાં.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax \qquad (3.11a)$$

પાંચ રાશિઓ υ_0, υ, a, t અને xને સાંકળતાં આ સમીકરણો સુરેખ રેખા પર નિયમિત પ્રવેગ સાથે થતી ગતિ માટેના શુદ્ધ ગતિ વિજ્ઞાનનાં સમીકરણો છે.

સમીકરણ (3.11a)માં સમીકરણોનો સમૂહ $t = 0$ સમયે કણનું સ્થાન $x = 0$ છે તેમ ધારીને મેળવેલ છે. જો આપણે $t = 0$ સમયે સ્થાનનો યામ અશૂન્ય એટલે કે x_0 લઈએ, તો સમીકરણ (3.11a) વધુ વ્યાપક સ્વરૂપમાં (xને બદલે $x - x_0$ મૂકતાં) મળશે.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.11b)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (3.11c)$$

ઉદાહરણ 3.3 કલનશાસ્ત્રની રીતનો ઉપયોગ કરીને નિયમિત પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો મેળવો.

ઉકેલ વ્યાખ્યા પરથી,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$d\upsilon = a dt$$

બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t a\, dt$$

$$= a\int_0^t dt \qquad (a \text{ અચળ છે.})$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = at$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

હવે, $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$

$$dx = \upsilon dt$$

બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon dt$$

$$= \int_0^t (\upsilon_0 + at)\, dt$$

$$x - x_0 = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

આપણે લખી શકીએ,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

અથવા $\upsilon\, d\upsilon = a dx$

બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon\, d\upsilon = \int_{x_0}^{x} a\, dx$$

$$\frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2} = a(x - x_0)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0)$$

આ રીતનો ફાયદો તે છે કે તેનો ઉપયોગ અનિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે પણ કરી શકાય.

હવે, આપણે આ સમીકરણોનો ઉપયોગ કેટલાક અગત્યના કિસ્સા માટે કરીશું.

ઉદાહરણ 3.4 એક બહુમાળી મકાનના ટોચ પરથી એક દડાને (Ball) શીરોલંબ ઊર્ધ્વદિશામાં 20 m s^{-1}ની ઝડપથી ફેંકવામાં આવે છે. દડો જે બિંદુએથી ફેંકવામાં આવે છે તેની જમીન (Ground)થી ઊંચાઈ 25 m છે. (a) દડો કેટલી ઊંચાઈએ પહોંચશે ? (b) દડો જમીનને અથડાય તે પહેલાં કેટલો સમય લાગશે ? g = 10 m s^{-2} લો.

ઉકેલ (a) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ y-અક્ષને શિરોલંબ ઊર્ધ્વદિશામાં એવી રીતે લઈએ કે તેનું ઊગમબિંદુ જમીન પર હોય.

હવે $\upsilon_0 = 20$ m s^{-1}

$a = -g = -10$ m s^{-2}

$\upsilon = 0$ m s^{-1}

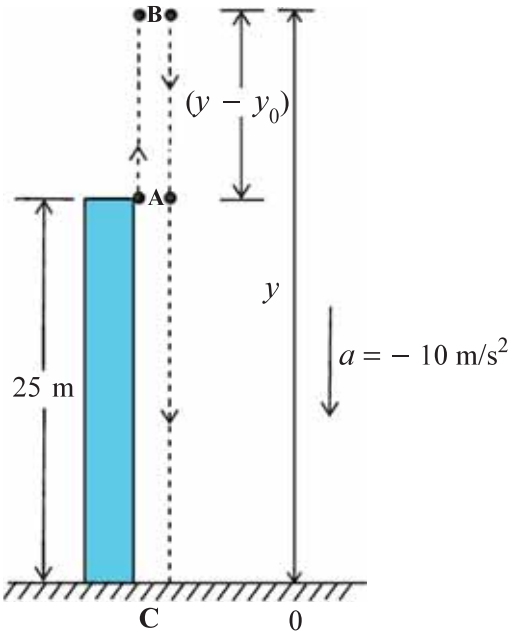
દડાને જે બિંદુએથી ફેંક્યો છે ત્યાંથી તે y ઊંચાઈ સુધી જાય છે તો

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(y - y_0)$ સમીકરણનો ઉપયોગ કરતાં.

$$0 = (20)^2 + 2(-10)(y - y_0)$$

સાદું રૂપ આપતાં, $(y - y_0) = 20$ m

(b) આ પ્રશ્નનો ઉકેલ બે રીતે મેળવી શકાય. **ઉપયોગમાં લીધેલ રીતની સાવચેતીપૂર્વક નોંધ કરો.**



આકૃતિ 3.13

પ્રથમ રીત : આ પ્રથમ રીતમાં ગતિમાર્ગને બે ભાગમાં વિભાજિત કરીએ. ઊર્ધ્વદિશામાં ગતિ (A થી B) અને અધોદિશામાં ગતિ (B થી C) અને તેમને અનુરૂપ સમય t_1 અને t_2ની ગણતરી કરીએ.

B પાસે વેગ શૂન્ય છે. માટે

$\upsilon = \upsilon_0 + at$ પરથી,

$0 = 20 - 10t_1$ અથવા $t_1 = 2$ s

આ દડાને B સુધી જવા માટે લાગતો સમય છે. હવે B અથવા મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએથી ગુરુત્વપ્રવેગની અસર હેઠળ દડો મુક્તપતન પામે છે. અહીં દડો ઋણ y-દિશામાં ગતિ કરે છે. આપણે સમીકરણ

$y = y_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$ નો ઉપયોગ કરીશું.

જ્યાં, $y_0 = 45$ m, $y = 0$, $\upsilon_0 = 0$, $a = -g = -10$ m s^{-2}

$0 = 45 + \frac{1}{2}(-10)t_2^2$ સાદું રૂપ આપતાં, $t_2 = 3$ s

તેથી, દડો જમીનને અથડાય તે ક્ષણ પહેલાં દડાએ લીધેલ કુલ સમય $t_1 + t_2 = 2$ s + 3 s = 5 s

બીજી રીત : પસંદ કરેલ ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે દડાની પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિના યામોનો ઉપયોગ, નીચે આપેલ સમીકરણમાં મૂકી, દડાએ લીધેલ કુલ સમય પણ ગણી શકાય છે.

$y = y_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$

હવે, $y_0 = 25$ m, $y = 0$ m,

$\upsilon_0 = 20$ m s^{-2}, $a = -10$ m s^{-2}, $t = ?$

$0 = 25 + 20\,t + (1/2)\,(-10)t^2$

અથવા $5t^2 - 20t - 25 = 0$

આ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવતાં,

$t = 5$ s

નોંધો કે બીજી રીત વધુ શ્રેષ્ઠ છે. જ્યાં સુધી અચળ પ્રવેગ હેઠળ ગતિ થતી હોય ત્યાં સુધી ગતિમાર્ગની ચિંતા આપણે કરવી જોઈએ નહિ. ◀

▶ ***ઉદાહરણ 3.5*** **મુક્તપતન (Free Fall)** મુક્તપતન પામતા પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરો. હવાનો અવરોધ અવગણો.

ઉકેલ જો પૃથ્વીની સપાટીથી થોડી ઊંચાઈ પરથી કોઈ પદાર્થને મુક્ત કરવામાં આવે, તો ગુરુત્વબળને કારણે તે નીચે તરફ પ્રવેગી ગતિ કરશે. ગુરુત્વને કારણે ઉદ્ભવતો પ્રવેગનાં માનને ***g*** વડે દર્શાવાય છે. જો હવાનો અવરોધ અવગણવામાં આવે, તો પદાર્થ **મુક્તપતન** કરે છે તેમ કહેવાય. પદાર્થ જે ઊંચાઈએથી પતન પામે છે તે ઊંચાઈ પૃથ્વીની ત્રિજ્યા કરતાં નાની હોય ત્યારે g ને 9.8 m s^{-2} જેટલો અચળ લઈ શકાય. આમ, મુક્તપતન એ અચળ પ્રવેગી ગતિનો કિસ્સો છે.

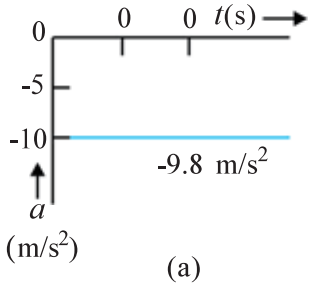
આવી ગતિને આપણે y-અક્ષની દિશામાં ધારીએ. વધુ સ્પષ્ટ રીતે $-y$ દિશામાં. કારણ કે આપણે ઊર્ધ્વદિશાની ગતિને ધન પસંદ કરેલ છે. જોકે ગુરુત્વીય પ્રવેગ હંમેશાં અધોદિશામાં હોવાથી તે ઋણ દિશામાં છે આમ,

$a = -g = -9.8$ m s^{-2}

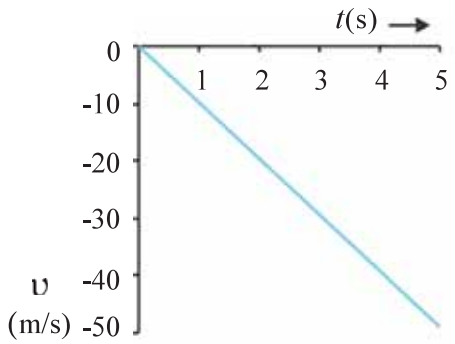
આમ, પદાર્થને $y = 0$ પાસેથી સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરવામાં આવે છે. તેથી $\upsilon_0 = 0$ અને આવી ગતિનાં સમીકરણો નીચે મુજબ મળે :

$\upsilon = 0 - g\,t$	$= -9.8\,t$	m s^{-1}
$y = 0 - \frac{1}{2}\,g\,t^2$	$= -4.9\,t^2$	m
$\upsilon^2 = 0 - 2\,g\,y$	$= -19.6\,y$	m^2 s^{-2}

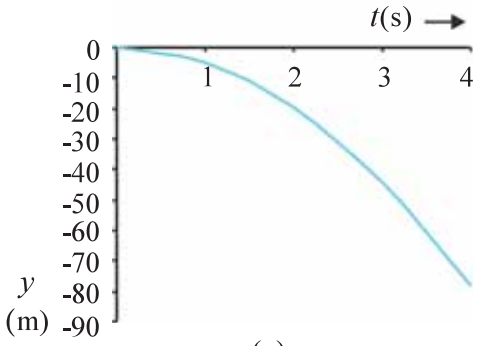
આ સમીકરણો વેગ અને કપાયેલ અંતરને સમય પરનાં વિધેય અને અંતર સાથે વેગનો ફેરફાર પણ આપે છે. આકૃતિ 3.14(a), (b) અને (c)માં સમય સાથે પ્રવેગ, વેગ અને અંતરમાં થતાં ફેરફારના આલેખ દોરેલા છે.



(a)



(b)



(c)

આકૃતિ **3.14** *મુક્તપતન પામતાં પદાર્થની ગતિ*
(a) સમય સાથે પ્રવેગમાં થતો ફેરફાર
(b) સમય સાથે વેગમાં થતો ફેરફાર
(c) સમય સાથે અંતરમાં થતો ફેરફાર ◀

▶ ***ઉદાહરણ 3.6*** **ગૅલેલિયોનો એકી અંકનો નિયમ (Galileo's Law of Odd Numbers)** "સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્તપતન પામતાં પદાર્થ દ્વારા સમાન સમયગાળામાં કપાયેલ અંતરો એકબીજાના એવા ગુણોત્તરમાં હશે જે ગુણોત્તર 1થી શરૂ થતી એકી સંખ્યા માટે હોય. (એટલે કે 1 : 3 : 5 : 7 : .....) તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ મુક્તપતન પામતા પદાર્થના સમય અંતરાલને ઘણા-બધા સમાન સમયગાળા τમાં વિભાજિત કરીને ક્રમિક સમયગાળામાં પદાર્થ દ્વારા કપાયેલ અંતરો શોધીએ. અહીં પદાર્થનો પ્રારંભિક વેગ શૂન્ય છે માટે,

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરી, આપણે જુદા જુદા સમયગાળા 0, τ, 2τ, 3τ...માં પદાર્થનાં સ્થાનની ગણતરી કરી શકીએ છે. જેને કોષ્ટક 3.2ના બીજા સ્તંભમાં દર્શાવેલ છે. જો પ્રથમ સમયગાળા τ પછી પદાર્થનાં સ્થાન યામ $y_0 = (-1/2)g\tau^2$ લઈએ, તો ત્રીજા સ્તંભમાં પદાર્થનાં સ્થાનો y_0ના ગુણક સ્વરૂપે આપે છે. ચોથા સ્તંભમાં ક્રમિક સમયગાળામાં કપાયેલ અંતરો દર્શાવેલ છે. અંતિમ સ્તંભમાં દર્શાવ્યા મુજબ જોઈ શકાય છે કપાયેલાં અંતરો 1 : 3 : 5 : 7 : 9 જેવા સરળ ગુણોત્તરમાં છે.

આ નિયમને ગૅલેલિયો ગૅલિલીએ (1564–1642) પ્રતિપાદિત કર્યો હતો કે જેમણે મુક્તપતન પામતા પદાર્થ માટે પ્રથમ વખત માત્રાત્મક અભ્યાસ કર્યો હતો. ◀

▶ ***ઉદાહરણ 3.7*** **વાહનનું સ્ટોપિંગ ડિસ્ટન્સ (Stopping distance of vahicle)** ગતિમાન વાહનને બ્રેક લગાડવામાં આવે ત્યારે તે થોભે તે પહેલાં તેણે કાપેલ અંતરને વાહનનું સ્ટોપિંગ ડિસ્ટન્સ કહે છે. રસ્તા પર વાહનોની સલામતી માટે આ એક અગત્યનું પરિબળ છે. Stopping distance વાહનના પ્રારંભિક વેગ, બ્રેકની ક્ષમતા અથવા બ્રેક લગાડવાથી વાહનમાં ઉદ્ભવતા પ્રતિપ્રવેગ $(-a)$ પર આધારિત છે. વાહન υ_0 અને a માટેના પદમાં Stopping distanceનું સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ ધારો કે, બ્રેક માર્યા પછી વાહન ઊભું રહે તે પહેલાં તેને કાપેલું અંતર d_s છે. સમીકરણ $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$નો ઉપયોગ કરી અને $\upsilon = 0$ લેતાં, આપણને Stopping distanceનું સૂત્ર મળે.

$$d_s = -\frac{\upsilon_0^2}{2a}$$

કોષ્ટક 3.2

t	y	y_0 $[=(-1/2)g\tau^2]$ yના સંદર્ભે	ક્રમિક સમયગાળામાં કપાયેલ અંતરો	કપાયેલ અંતરોનો ગુણોત્તર
0	0	0		
τ	$-(1/2)\ g\ \tau^2$	y_0	y_0	1
2 τ	$-4(1/2)\ g\ \tau^2$	$4\ y_0$	$3\ y_0$	3
3 τ	$-9(1/2)\ g\ \tau^2$	$9\ y_0$	$5\ y_0$	5
4 τ	$-16(1/2)g\ \tau^2$	$16\ y_0$	$7\ y_0$	7
5 τ	$-25(1/2)g\ \tau^2$	$25\ y_0$	$9\ y_0$	9
6 τ	$-36(1/2)g\ \tau^2$	$36y_0$	$11\ y_0$	11

આમ, Stopping distance વાહનની પ્રારંભિક વેગનાં વર્ગને સપ્રમાણ છે. વાહનનો પ્રારંભિક વેગ બમણો કરવામાં આવે તો Stopping distance ચારગણું થાય છે. (સમાન પ્રતિપ્રવેગ માટે).

કોઈ એક વિશિષ્ટ બનાવટની કાર માટે જુદા જુદા વેગો 11, 15, 20 તથા 25 m/sને અનુરૂપ Stopping distance અનુક્રમે 10 m, 20 m, 34 m તથા 50 m મળે છે. જે ઉપર્યુક્ત સમીકરણને લગભગ સુસંગત છે.

ઉદાહરણ તરીકે, શાળાકીય વિસ્તારમાં વાહનોની ગતિમર્યાદા માટે Stopping distance અગત્યનું પરિબળ છે. ◀

▶ ***ઉદાહરણ 3.8* પ્રતિક્રિયા સમય (Reaction Time) :** જ્યારે કોઈ પરિસ્થિતિ એવી નિર્માણ પામે કે જેથી આપણે ત્વરિત પ્રતિક્રિયા આપવાની જરૂરિયાત ઉભી થાય તો તે ક્રિયા ખરેખર કરીએ તે પહેલા અમુક સમય લાગે છે. આમ, કોઈ વ્યક્તિ અવલોકન કરે, તેના પર વિચાર કરે અને પછી કાર્યવાહી કરે તે માટે લાગતા સમયને પ્રતિક્રિયા-સમય કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક વ્યક્તિ કાર ચલાવી રહ્યો છે અને અચાનક એક છોકરો રસ્તા પર આવી જાય છે ત્યારે કારને બ્રેક લગાડ્યા પહેલાં જે સમય વિતેલાં છે તેને Reaction time કહે છે. Reaction time પરિસ્થિતિની જટિલતા અને વ્યક્તિ વિશેષ પર આધારિત છે.

તમે તમારા Reaction timeનું માપન એક સરળ પ્રયોગ દ્વારા કરી શકો છો. તમારા મિત્રને એક ફૂટપટ્ટી આપો અને તેને કહો કે તે ફૂટપટ્ટી તમારા 1 અંગૂઠા અને બાકીની ચાર આંગળીઓ વચ્ચેની જગ્યામાંથી (આકૃતિ 3.15) શિરોલંબ પડતી મૂકે. જેવી ફૂટપટ્ટી મુક્તપતન પામે કે તરત જ તમે તેને પકડી લો. ફૂટપટ્ટી વડે કપાયેલ અંતર d માપો. એક વિશેષ ઉદાહરણમાં $d = 21.0$ cm મળ્યું હતું, તો Reaction timeની ગણતરી કરો.

આકૃતિ 3.15 *ક્રિયા-સમયનું માપન*

ઉકેલ

ફૂટપટ્ટી મુક્તપતન કરે છે. અહીં $\upsilon_0 = 0$ અને $a = -g = -9.8$ m s^{-2}. પ્રતિક્રિયા સમય t_r તથા કપાયેલ અંતર d વચ્ચેનો સંબંધ.

$$d = -\frac{1}{2}gt_r^2 \quad \text{અથવા} \quad t_r = \sqrt{\frac{2d}{g}} \text{ s}$$

$d = 21.0$ cm, $g = -9.8$ m s^{-2} આપેલ છે, તો પ્રતિક્રિયા સમય,

$$\therefore\ t_r = \sqrt{\frac{2 \times 0.21}{9.8}} \cong 0.2 \text{ s.}$$ ◀

3.7 સાપેક્ષ વેગ (RELATIVE VELOCITY)

તમને ટ્રેનમાં મુસાફરી કરવાનો અને તમારી જ ટ્રેનની દિશામાં ગતિ કરતી બીજી ટ્રેનને તમારાથી આગળ જવાના અનુભવથી પરિચિત હશો. તમારી ટ્રેન કરતાં તે ટ્રેન વધારે ઝડપથી ગતિ કરતી હશે તો તે તમારાથી આગળ જશે. જમીન પર ઊભા રહેલા અને બંને ટ્રેનને જોનાર વ્યક્તિને તમારી ટ્રેન બીજી ટ્રેન કરતાં ધીમી દેખાશે. જો જમીનની સાપેક્ષે બંને ટ્રેનોનો વેગ સમાન હોય, તો તમને બીજી ટ્રેન ગતિ કરતી દેખાતી નથી. આવા અનુભવો સમજવા માટે આપણે સાપેક્ષ વેગની સંકલ્પના પ્રસ્તાવિત કરીશું.

એક પારિમાણિક (x-અક્ષ) પર નિયમિત ગતિ કરતાં બે પદાર્થો A અને Bના સરેરાશ વેગ υ_A અને υ_B છે. (જ્યાં સુધી વિશેષ રૂપે ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય ત્યાં સુધી આ પ્રકરણમાં તમામ વેગનું જમીન સાપેક્ષે માપન કરેલ છે.) $t = 0$ સમયે $x_A(0)$ અને $x_B(0)$ અનુક્રમે A અને Bનાં સ્થાન છે. t સમયે તેમનાં સ્થાન $x_A(t)$ અને $x_B(t)$ નીચે મુજબ આપી શકાય :

$$x_A(t) = x_A(0) + \upsilon_A\, t \qquad (3.12a)$$

$$x_B(t) = x_B(0) + \upsilon_B\, t \qquad (3.12b)$$

તો પદાર્થ Aથી પદાર્થ B સુધીનું સ્થાનાંતર,

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t)$$

$$= [x_B(0) - x_A(0)] + (\upsilon_B - \upsilon_A)\, t. \qquad (3.13)$$

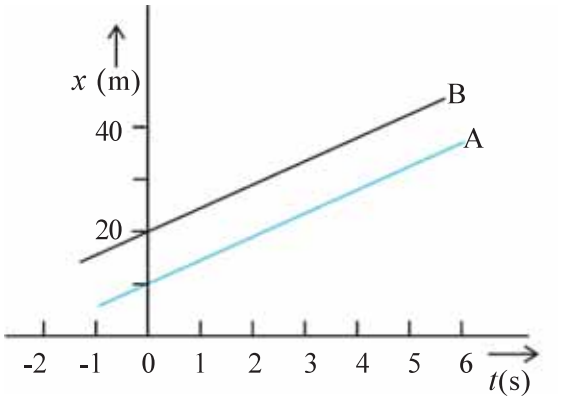
પરથી મળે છે.

સમીકરણ (3.13)નું અર્થઘટન સરળતાથી કરી શકાય છે. જે આપણને જણાવે છે કે, પદાર્થ Aથી જોઈએ તો, પદાર્થ Bનો વેગ $\upsilon_B - \upsilon_A$ કારણ કે એકમ સમયમાં A થી B સુધીનું સ્થાનાંતર $\upsilon_B - \upsilon_A$ જેટલા સ્થિત ફેરફાર જેટલું હોય છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે પદાર્થ Bનો વેગ પદાર્થ A સાપેક્ષે $\upsilon_B - \upsilon_A$ છે.

$$\upsilon_{BA} = \upsilon_B - \upsilon_A \qquad (3.14a)$$

આ જ રીતે પદાર્થ Aનો વેગ પદાર્થ B સાપેક્ષે વેગ

$$\upsilon_{AB} = \upsilon_A - \upsilon_B \qquad (3.14b)$$



આકૃતિ 3.16 *સમાન વેગથી ગતિ કરતાં બે પદાર્થ માટે સ્થાન-સમય આલેખ*

આ સૂચવે છે કે $\upsilon_{BA} = -\upsilon_{AB}$ (3.14c)

હવે આપણે કેટલાક વિશિષ્ટ કિસ્સા જોઈએ.

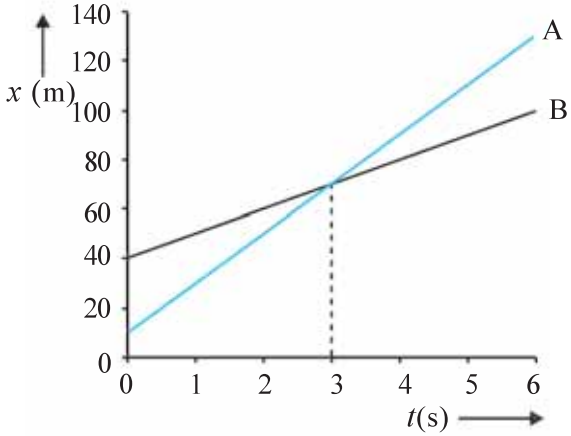
(a) જો $\upsilon_B = \upsilon_A$, તો $\upsilon_B - \upsilon_A = 0$ તો સમીકરણ (3.13) પરથી $x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0)$. તેથી બંને પદાર્થ $x_B(0) - x_A(0)$ જેટલા અચળ અંતરે રહેલા છે અને તેમનો સ્થાન-સમય આકૃતિ 3.16માં દર્શાવ્યા મુજબ, એકબીજાને સમાંતર સુરેખા હશે. આ કિસ્સામાં સાપેક્ષ વેગ υ_{AB} અથવા υ_{BA} શૂન્ય હોય.

(b) જો $\upsilon_A > \upsilon_B$ તો $\upsilon_B - \upsilon_A$ ઋણ મળશે. એક આલેખ બીજા આલેખ કરતાં વધુ ઢોળાવવાળો હશે અને બંને આલેખો કોઈ સામાન્ય બિંદુએ ભેગા મળશે. ઉદાહરણ તરીકે ધારો કે $\upsilon_A = 20\ \text{m s}^{-1}$ અને $x_A(0) = 10$ m અને $\upsilon_B = 10\ \text{m s}^{-1}$, $x_B(0) = 40$ m, તો જે સમયે બંને પદાર્થો એકબીજાને મળશે તે સમય $t = 3$s હશે. (આકૃતિ 3.17) આ ક્ષણે બંનેનાં સ્થાન $x_A(t) = x_B(t) = 70$ m હશે. આમ, પદાર્થ (A) આ સમયે પદાર્થ Bની આગળ નીકળી જશે. આ કિસ્સામાં

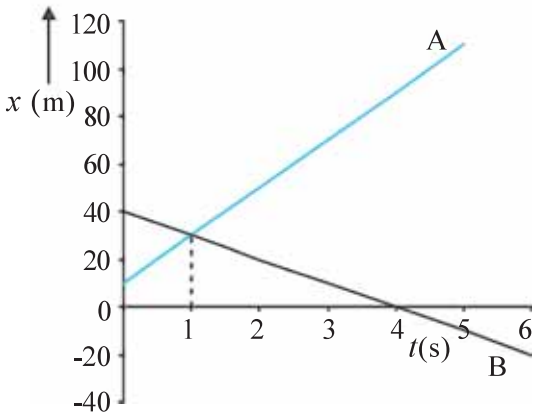
$\upsilon_{BA} = 10\ \text{m s}^{-1} - 20\ \text{m s}^{-1} = -10\ \text{m s}^{-1} = -\upsilon_{AB}$.

(c) ધારો કે υ_A અને υ_B વિરુદ્ધ સંજ્ઞા ધરાવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, ઉપરનાં ઉદાહરણમાં પદાર્થ A, $20\ \text{m s}^{-1}$ જેટલા વેગથી $x_A(0) = 10$ m સ્થાનેથી ગતિની શરૂઆત કરે છે અને પદાર્થ B, $-10\ \text{m s}^{-1}$ જેટલા વેગથી $x_B(0) = 40$ m સ્થાનેથી ગતિની શરૂઆત કરે છે. $t = 1$ s પછી બંને પદાર્થો એકબીજાને મળે છે. (આકૃતિ 3.18) Bનો A સાપેક્ષે વેગ $\upsilon_{BA} = [-10 - (20)]\ \text{m s}^{-1} = -30\ \text{m s}^{-1} = -\upsilon_{AB}$. આ કિસ્સામાં υ_{BA} અને υ_{AB}ના માન ($= 30\ \text{m s}^{-1}$), A અને Bનાં વેગનાં માન કરતાં વધારે હોય છે. જોકે વિચારેલ પદાર્થો બે ટ્રેનો હોય, તો બેમાંથી કોઈ એક ટ્રેનમાં બેઠેલ વ્યક્તિને બીજી ટ્રેન ખૂબ જ ઝડપી ગતિ કરે છે તેમ દેખાશે.

નોંધો કે સમીકરણ (3.14) ત્યારે જ સાચા છે જ્યારે υ_A અને υ_B તાત્ક્ષણિક વેગોને રજૂ કરતા હોય.



આકૃતિ 3.17 *અસમાન વેગથી ગતિ કરતાં બે પદાર્થ માટે સ્થાન-સમય આલેખ, એકબીજાને મળવાનો સમય દર્શાવે છે.*



આકૃતિ 3.18 *વિરુદ્ધ દિશામાં વેગ ધરાવતા પદાર્થો માટે સ્થાન-સમય આલેખ, એકબીજાને મળવાનો સમય દર્શાવે છે.*

▶ ***ઉદાહરણ 3.9*** બે સમાંતર રેલવે ટ્રેક ઉત્તર દક્ષિણ દિશામાં છે. ટ્રેન A ઉત્તર તરફ 54 km h^{-1}ની ઝડપે અને ટ્રેન B દક્ષિણ દિશામાં 90 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરે છે. તો,

(a) A સાપેક્ષે Bનો વેગ

(b) B સાપેક્ષે જમીનનો વેગ અને

(c) ટ્રેન Aની છત પર તેની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં. (ટ્રેન A સાપેક્ષે 18 km h^{-1}ની ઝડપથી) દોડતાં વાંદરાનો વેગ જમીન પર ઊભી રહેલી વ્યક્તિ સાપેક્ષે શોધો.

ઉકેલ (a) X-અક્ષની ધન દિશાને દક્ષિણથી ઉત્તર દિશા તરફની પસંદ કરો તો,

$\upsilon_A = +54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$

$\upsilon_B = -90 \text{ km h}^{-1} = -25 \text{ m s}^{-1}$

A સાપેક્ષે Bનો વેગ $\upsilon_B - \upsilon_A = -40 \text{ m s}^{-1}$ થશે. એટલે કે ટ્રેન Aને ટ્રેન B, ઉત્તરથી દક્ષિણ દિશામાં 40 m s^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરતી દેખાશે.

(b) B સાપેક્ષે જમીનનો સાપેક્ષ વેગ $= 0 - \upsilon_B = 25 \text{ m s}^{-1}$

(c) ધારો કે જમીન સાપેક્ષે વાંદરાનો વેગ υ_M છે. A સાપેક્ષ વાંદરાનો વેગ $\upsilon_{MA} = \upsilon_M - \upsilon_A = -18 \text{ km h}^{-1} = -5 \text{ m s}^{-1}$

તેથી, $\upsilon_M = (15 - 5) \text{ m s}^{-1} = 10 \text{ m s}^{-1}$ ◀

સારાંશ

1. જો પદાર્થનું સ્થાન સમય સાથે બદલાતું હોય, તો પદાર્થ ગતિમાં છે તેમ કહેવાય. અનુકૂળતા મુજબ પસંદ કરેલ ઊગમબિંદુ સાપેક્ષે પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવી શકાય છે. સુરેખ રેખાની ગતિ માટે, ઊગમબિંદુની જમણી બાજુ ધન અને ડાબી બાજુ ઋણ લેવામાં આવે છે.
2. પદાર્થ વડે કપાયેલ કુલ અંતરને પથલંબાઈ કહે છે.
3. સ્થાનમાં થતાં ફેરફારને સ્થાનાંતર કહે છે. $\Delta x = x_2 - x_1$ આપેલ બે બિંદુ વચ્ચેની પથલંબાઈ સ્થાનાંતરના માન જેટલી કે તેનાથી વધુ હોઈ શકે.
4. જ્યારે કોઈ પદાર્થ સમાન સમયગાળામાં સમાન અંતર કાપે, તો તેવી ગતિને નિયમિત ગતિ કહે છે. તેમ ના હોય, તો અનિયમિત ગતિ કહેવાય.
5. સ્થાનાંતર અને તે માટે લાગતા સમયગાળાનાં ભાગાકારને સરેરાશ વેગ કહે છે.

   $$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

   $x - t$ આલેખમાં, આપેલ સમયગાળા માટેનો સરેરાશ વેગ તે જ સમયગાળા માટે પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાનને જોડતી રેખાના ઢાળ જેટલો હોય છે.
6. કપાયેલ કુલ પથલંબાઈ અને તે માટે લાગતાં સમયગાળાના ગુણોત્તરને સરેરાશ ઝડપ કહે છે. આપેલ સમયગાળા માટે પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ તેના સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી કે તેનાથી વધુ હોય છે.
7. તાત્ક્ષણિક વેગ અથવા સાદી રીતે વેગ તે સરેરાશ વેગના સમયગાળાનું ખૂબ જ સૂક્ષ્મ મૂલ્ય $\Delta t \to 0$ લક્ષમૂલ્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

   $$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

   $x \to t$ આલેખમાં કોઈ એક ક્ષણ માટે દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ તે ક્ષણે તાત્ક્ષણિક વેગ બરાબર હોય છે.
8. વેગમાં થતાં ફેરફાર અને તે ફેરફાર માટેના સમયગાળાના ભાગાકારને સરેરાશ પ્રવેગ કહે છે.

   $$\bar{a} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$$
9. તાત્ક્ષણિક પ્રવેગને સરેરાશ પ્રવેગના $\Delta t \to 0$ લક્ષમૂલ્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે.

   $$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}$$

   $\upsilon - t$ આલેખમાં કોઈ એક ક્ષણ પાસે ઢાળ તે ચોક્કસ ક્ષણે પદાર્થનો પ્રવેગ દર્શાવે છે. નિયમિત ગતિ માટે પ્રવેગ શૂન્ય હોય છે અને $x - t$ આલેખ સમય અક્ષ સાથે સીધી રેખામાં ઢળતો હોય છે અને $\upsilon - t$ આલેખ સમયની અક્ષને સમાંતર સીધી રેખામાં હોય છે. નિયમિત પ્રવેગી ગતિ માટે $x - t$ આલેખ પરવલય જ્યારે $\upsilon - t$ આલેખ સમયની અક્ષ સાથે ઢળતી સીધી રેખા હોય છે.

10. t_2 અને t_1 સમય વચ્ચેના વેગ-સમય વક્ર નીચે ઘેરાયેલ ક્ષેત્રફળ આ જ સમયગાળા માટે સ્થાનાંતર જેટલું હોય છે.

11. સુરેખ રેખા પર નિયમિત પ્રવેગી ગતિ કરતાં પદાર્થો માટે પાંચ રાશિઓ, સ્થાનાંતર x, લાગેલ સમય t, પ્રારંભિક વેગ υ_0, અંતિમ વેગ υ અને પ્રવેગ a ને સાંકળતાં સાદાં સમીકરણોના સમૂહને શુદ્ધ ગતિવિજ્ઞાનમાં ગતિનાં સમીકરણ કહે છે.

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$$

જો $t = 0$ સમયે પદાર્થનું સ્થાન 0 (zero) હોય. પરંતુ કણ $x = x_0$ પાસેથી ગતિ શરૂ કરે, તો ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં xને બદલે $(x - x_0)$ લેવું પડે.

ભૌતિક રાશિ	સંકેત/સંજ્ઞા	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
પથલંબાઈ		[L]	m	
સ્થાનાંતર	Δx	[L]	m	$= x_2 - x_1$ એક પરિમાણીય, તેની નિશાની દિશાનું સૂચન કરે છે.
વેગ		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
(a) સરેરાશ	$\bar{\upsilon}$			$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$
(b) તાત્ક્ષણિક	υ			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ એક પરિમાણીય, તેની નિશાની દિશાનું સૂચન કરે છે.
ઝડપ		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
(a) સરેરાશ				$= \frac{\text{પથલંબાઈ}}{\text{સમયગાળો}}$
(b) તાત્ક્ષણિક				$= \frac{dx}{dt}$
પ્રવેગ		$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	
(a) સરેરાશ	$\bar{a}$			$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$
(b) તાત્ક્ષણિક	a			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}$ એક પરિમાણીય તેની નિશાની દિશાનું સૂચન કરે છે.

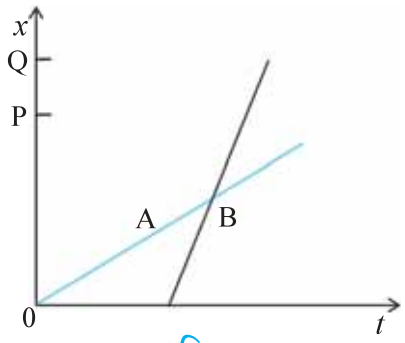
ગહન વિચારણાના મુદ્દા (POINTS TO PONDER)

1. પદાર્થ વડે બે બિંદુ વચ્ચે કપાયેલ પથલંબાઈ સામાન્ય રીતે સ્થાનાંતરનાં માન જેટલી હોતી નથી. સ્થાનાંતરનો આધાર ફક્ત અંતિમ સ્થાન પર છે. પથલંબાઈ (નામ જ સ્પષ્ટ કરે છે.) પદાર્થના ખરા ગતિમાર્ગ પર આધારિત છે. એક પરિમાણમાં જ્યારે પદાર્થ ગતિ દરમિયાન પોતાની દિશા બદલતા ન હોય ત્યારે બંને રાશિ સમાન હોય છે. જ્યારે બાકીના કિસ્સાઓમાં પથલંબાઈ હંમેશાં સ્થાનાંતરનાં માન કરતાં મોટી હોય છે.
2. ઉપરના મુદ્દા 1ના સંદર્ભે આપેલ સમયગાળા માટે પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ, સરેરાશ વેગનાં માન જેટલી કે તેનાથી વધારે હોય છે. જ્યારે પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતરનું માન સમાન હોય ત્યારે જ બંને સમાન હશે.
3. ઉદ્ગમબિંદુ અને અક્ષની ધન દિશા પસંદગીની બાબત છે. સ્થાનાંતર, વેગ અને પ્રવેગ જેવી રાશિઓને સંજ્ઞા આપતાં પહેલાં પસંદગીની સ્પષ્ટતા કરવી જોઈએ.
4. જો કણની ઝડપ વધતી હોય તો પ્રવેગ વેગની દિશામાં હોય. જો તેની ઝડપ ઘટતી હોય, તો પ્રવેગ ગતિની વિરુધ્ધ દિશામાં હોય. આ કથન ઊગમબિંદુ અને અક્ષની પસંદગીથી સ્વતંત્ર છે.
5. પ્રવેગનું ચિહ્ન કણની ઝડપ વધે છે કે ઘટે છે તે આપણને સૂચવતું નથી. પ્રવેગના ચિહ્ન (મુદ્દા 3 મુજબ)નો આધાર અક્ષની ધન દિશાની પસંદગી પર છે. ઉદાહરણ તરીકે શિરોલંબ ઊર્ધ્વદિશાને અક્ષની ધન દિશા તરીકે પસંદ કરેલ હોય, તો ગુરુત્વીય પ્રવેગ ઋણ ગણાય. જો કણ ગુરુત્વની અસર હેઠળ પતન પામતો હોય, તો ઋણ પ્રવેગ તેની ઝડપમાં વધારો કરે છે. કોઈ એક કણને ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકવામાં આવે, તો આ જ ઋણપ્રવેગ તેના વેગને ઘટાડે છે.
6. કોઈ એક ક્ષણે કણનો વેગ શૂન્ય હોય, તો તે ક્ષણે તેનો પ્રવેગ શૂન્ય હોવો જરૂરી નથી. કોઈ કણ ક્ષણ માટે સ્થિર અવસ્થામાં હોઈ શકે પરંતુ તે ક્ષણે પ્રવેગ શૂન્ય નથી હોતો. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ કણને ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવે, તો તેની મહત્તમ ઊંચાઈએ વેગ શૂન્ય થશે પરંતુ તેનો પ્રવેગ ગુરુત્વીયપ્રવેગ જેટલો જ હશે.
7. ગતિ માટેના શુદ્ધ ગતિકી સમીકરણ (સમીકરણ 3.11)ની વિભિન્ન રાશિઓ બીજગણિતીય રાશિઓ છે. એટલે કે તે ધનાત્મક અને ઋણાત્મક હોઈ શકે. વિભિન્ન રાશિઓના મૂલ્ય યોગ્ય ચિહ્ન સાથે મૂકવામાં આવે, તે શરતને આધિન આ સમીકરણો બધી જ પરિસ્થિતિમાં (અચળ પ્રવેગી એક પારિમાણિય ગતિ માટે) લાગુ પડે છે.
8. તાત્ક્ષણિક વેગ તથા પ્રવેગની વ્યાખ્યાઓ (સમીકરણ (3.3) અને (3.5)) ચોક્કસ અને હંમેશ માટે સાચા છે જ્યારે શુદ્ધ ગતિકી સમીકરણો (સમીકરણ (3.11)) તે જ ગતિ માટે સાચા થશે કે જેમાં પ્રવેગનું માન અને દિશા સમગ્ર ગતિ દરમિયાન અચળ રહે.

સ્વાધ્યાય

3.1 નીચે આપેલ ગતિનાં ઉદાહરણો પૈકી કયા ઉદાહરણમાં તંત્રને આશરે બિંદુવત પદાર્થ ગણી શકાય ?
(a) બે સ્ટેશન વચ્ચે વગર ઝટકે (jerks) ગતિ કરતી ટ્રેન
(b) સરળતાથી કોઈ વર્તુળમાર્ગ પર સાઈકલ ચલાવતી વ્યક્તિના માથા પર બેઠેલ કોઈ વાંદરો
(c) જમીન પર અથડાઈને તીવ્ર વળાંક લેતો સ્પિન થતો (spining) ક્રિકેટનો દડો
(d) ટેબલની કિનારી પરથી ખસીને પડતું બીકર

3.2 બે બાળકો A અને B તેમની શાળા Oથી અનુક્રમે તેમના ઘરે P અને Q પરત ફરી રહ્યાં છે. જેનો સ્થાન-સમય $(x - t)$ આલેખ આકૃતિ 3.19માં દર્શાવેલ છે. નીચે કૌંસમાં દર્શાવેલ સાચી નોંધ પસંદ કરો.
(a) (B/A), (A/B) કરતાં શાળાની નજીક રહે છે.
(b) (B/A), (A/B) કરતાં શાળાએથી વહેલી શરૂઆત કરે છે.
(c) (B/A), (A/B) કરતાં ઝડપથી ચાલે છે.
(d) A અને B એક જ/જુદા જુદા સમયે ઘરે પહોંચે છે.
(e) (A/B) રસ્તા પર (B/A)થી (એક વખત/બે વખત) આગળ નીકળી જાય છે.



આકૃતિ 3.19

3.3 એક મહિલા સવારે 9.00 કલાકે પોતાના ઘરેથી 2.5 km દૂર આવેલા પોતાના કાર્યાલય પર 5 km h^{-1}ની ઝડપે સીધી સડક પર ચાલીને જાય છે. ત્યાં તે સાંજે 5.00 કલાક સુધી રહે છે અને 25 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરતી ઑટોરિક્સામાં પોતાના ઘરે પરત ફરે છે. યોગ્ય સ્કેલમાપ પસંદ કરીને મહિલાની ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દોરો.

3.4 એક દારૂડિયો એક સાંકડી ગલીમાં 5 પગલાં આગળ ભરે છે અને 3 પગલાં પાછળ ભરે છે. ત્યાર બાદ ફરીથી 5 પગલાં આગળ ભરે છે અને 3 પગલાં પાછળ ભરે છે અને આ રીતે તે ચાલતો રહે છે. તેનું દરેક પગલું 1 m લંબાઈનું અને તે માટે 1 s જેટલો સમય લે છે, તો તેની આ ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દોરો. આલેખીય રીતે કે અન્ય કોઈ રીતે નક્કી કરો કે તેની ગતિનો પ્રારંભ બિંદુથી 13 m દૂર આવેલા ખાડામાં તે કેટલા સમય બાદ પડશે.

3.5 એક જેટ પ્લેન 500 km h^{-1}ની ઝડપે ઊડી રહ્યું છે, અને તે જેટ પ્લેનની સાપેક્ષે 1500 km h^{-1}ની ઝડપે દહન-ઉત્પાદનો (વાયુ)ને બહાર કાઢી રહ્યું છે. જમીન પર ઊભેલા કોઈ અવલોકનકારની સાપેક્ષે દહન- ઉત્પાદનોની ઝડપ કેટલી હશે ?

3.6 સુરેખ રાજમાર્ગ પર 126 km h^{-1} જેટલા ઝડપે દોડી રહેલી એક કાર 200 m અંતર કાપીને ઊભી રાખવી છે તો કારનો નિયમિત પ્રતિપ્રવેગ કેટલો હોવો જોઈએ ? કારને સ્થિર થવા માટે કેટલો સમય લાગશે ?

3.7 400 m જેટલી સમાન લંબાઈ ધરાવતી બે ટ્રેનો A અને B બે સમાંતર રેલવે ટ્રેક પર 72 km h^{-1}ની ઝડપે એક જ દિશામાં દોડી રહી છે. ટ્રેન A, ટ્રેન B કરતાં આગળ છે. B ટ્રેનનો ડ્રાઈવર ટ્રેન Aને ઓવરટેક કરવાનું વિચારે છે અને પોતાની ટ્રેનને 1 m s^{-2} જેટલી પ્રવેગિત કરે છે. જો 50 s બાદ ટ્રેન Bનો ગાર્ડ ટ્રેન Aના ડ્રાઈવરની આગળ થઈ જાય છે, તો બંને ટ્રેન વચ્ચેનું પ્રારંભિક અંતર કેટલું હશે ?

3.8 એક દ્વિમાર્ગી (two-lane road) રસ્તા પર કાર A 36 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરે છે. એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં 54 km h^{-1} જેટલી સમાન ઝડપથી દોડતી કાર B અને C કાર A સુધી પહોંચવાનો પ્રયત્ન કરે છે. કોઈ એક ક્ષણે AB તથા AC વચ્ચેનું સમાન અંતર 1 km છે. આ ક્ષણે કાર Bનો ડ્રાઈવર, કાર C, કાર Aને ઓવરટેક કરે તે પહેલાં ઓવરટેક કરવાનું વિચારે છે, તો અકસ્માત-નિવારણ માટે કાર Bનો લઘુતમ પ્રવેગ કેટલો હોવો જોઈએ ?

3.9 બે શહેર A અને B નિયમિત બસસેવા દ્વારા એકબીજાંથી જોડાયેલાં છે. તથા પ્રત્યેક T મિનિટ પછી બંને બાજુ બસો દોડે છે. કોઈ એક વ્યક્તિ 20 km h^{-1}ની ઝડપે સાઈકલ દ્વારા A થી B તરફ જઈ રહ્યો છે. ત્યારે તે નોંધે છે કે પ્રત્યેક 18 min પછી એક બસ તેની ગતિની દિશામાં તથા પ્રત્યેક 6 min પછી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં પસાર થાય છે. બસસેવા સમય T કેટલો હશે અને રસ્તા પર દોડતી બસની ઝડપ (અચળ ધારો) કેટલી હશે ?

3.10 કોઈ એક ખેલાડી 29.4 m s^{-1}ની પ્રારંભિક ઝડપથી એક દડાને ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકે છે.

(a) દડાની ઊર્ધ્વદિશાની ગતિ દરમિયાન પ્રવેગની દિશા કઈ હશે ?

(b) તેની ગતિના મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએ દડાનો વેગ અને પ્રવેગ કેટલા હશે ?

(c) દડાની મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએ સ્થાન $x = 0$ m અને $t = 0$ s તથા શિરોલંબ નીચે તરફની દિશાને x-અક્ષની ધન દિશા તરીકે પસંદ કરો. આ પસંદગીના સંદર્ભે દડાની ઊર્ધ્વદિશાની ગતિ અને અધોદિશાની ગતિ માટે સ્થાન, વેગ અને પ્રવેગનાં ચિહ્નો દર્શાવો.

(d) દડો કેટલી મહત્તમ ઊંચાઈએ પહોંચશે ? અને કેટલા સમય બાદ ખેલાડીના હાથમાં પાછો આવશે ? ($g = 9.8$ m s^{-2} અને વાયુનો અવરોધ અવગણીએ છીએ.)

3.11 નીચે આપેલ કથનોને ધ્યાનપૂર્વક વાંચી ઉદાહરણ અને કારણ સહિત તે સાચાં છે કે ખોટાં તે દર્શાવો કણની એક પરિમાણિક ગતિમાં,

(a) કોઈ એક ક્ષણે તેની ઝડપ શૂન્ય હોવા છતાં તેનો પ્રવેગ અશૂન્ય હોઈ શકે છે.

(b) ઝડપ શૂન્ય હોવા છતાં તેનો વેગ અશૂન્ય હોઈ શકે.

(c) ઝડપ અચળ હોય, તો પ્રવેગ હંમેશાં શૂન્ય હોય.

(d) પ્રવેગ ધન મૂલ્ય માટે ગતિ વધતી હોય છે.

3.12 કોઈ એક દડાને 90 mની ઊંચાઈ પરથી ફર્શ (floor) પર પડતો મૂકવામાં આવે છે. ફર્શ સાથેના પ્રત્યેક સંઘાત દરમિયાન, દડો તેની મૂળ ઝડપના દસમા ભાગ જેટલી ઝડપ ગુમાવે છે. દડાની આ ગતિ માટે $t = 0$ થી $t = 12$ s માટે ઝડપ સમયનો આલેખ દોરો.

3.13 ઉદાહરણ સહિત બંને તફાવત સ્પષ્ટ કરો.

(a) કોઈ એક સમયગાળામાં સ્થાનાંતરનું માન (જેને ઘણી વાર અંતર પણ કહે છે.) અને કોઈ કણ દ્વારા આટલા જ સમયગાળામાં કાપેલ કુલ પથલંબાઈ

(b) કોઈ એક સમયગાળામાં સરેરાશ વેગનું માન અને એટલા જ સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ [આપેલ સમયગાળા માટે કણની સરેરાશ ઝડપને કુલ પથલંબાઈ અને સમયગાળાના ગુણોત્તર વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.] (a) અને (b) બંને માટે દર્શાવો કે બીજી રાશિ પ્રથમ રાશિ કરતાં મોટી કે તેના જેટલી જ છે. સમાનતાનું ચિહ્ન ક્યારે સાચું હશે ? [સરળતા માટે ગતિને એક પારિમાણિક ગતિ લો.]

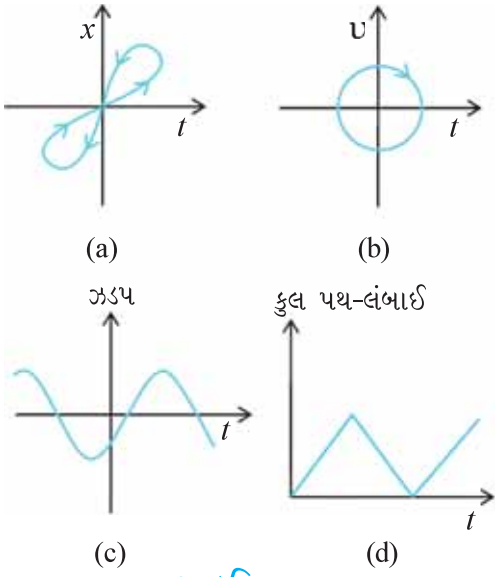
3.14 એક વ્યક્તિ સુરેખ માર્ગે 5 km h^{-1}ની ઝડપે તેના ઘરેથી 2.5 km દૂર આવેલા માર્કેટમાં જાય છે. પરંતુ માર્કેટને બંધ જુએ છે, તે તરત જ 7.5 km h^{-1}ની ઝડપે ઘરે પાછો ફરે છે તો,

(a) સરેરાશ વેગનું માન અને

(b) સમયગાળા (i) 0 થી 30 min (ii) 0 થી 50 min (iii) 0 થી 40 min માટે વ્યક્તિની સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ? (નોંધ : આ ઉદાહરણથી તમે પ્રભાવિત થશો કે સરેરાશ ઝડપને સરેરાશ વેગનાં માન તરીકે દર્શાવવા કરતાં કુલ પથલંબાઈ અને કુલ સમયગાળાના ગુણોત્તર સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરવી કેમ વધુ યોગ્ય છે ? થાકીને ઘરે પહોંચેલી વ્યક્તિને તેની સરેરાશ ઝડપ શૂન્ય છે, તેમ કહેવાનું મુનાસિબ નહિ માનો !)

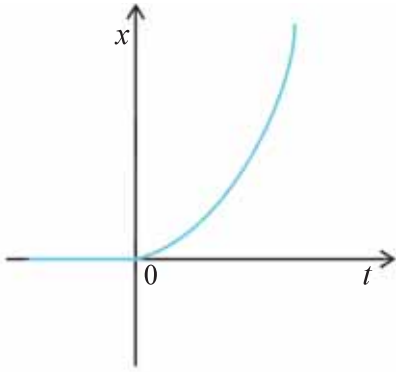
3.15 સ્વાધ્યાય પ્રશ્ન 3.13 અને 3.14માં આપણે સરેરાશ ઝડપ અને સરેરાશ વેગ વચ્ચેનો તફાવત કાળજીપૂર્વક સ્પષ્ટ કર્યો. તાત્ક્ષણિક ઝડપ અને તાત્ક્ષણિક વેગ માટે આવા તફાવત પર વિચાર કરવો આવશ્યક નથી. તાત્ક્ષણિક ઝડપ હંમેશાં તાત્ક્ષણિક વેગના માન જેટલી હોય છે. શા માટે ?

3.16 આકૃતિ 3.20માં દર્શાવેલ આલેખો (a) થી (d) ધ્યાનથી જુઓ અને કારણ સહિત જણાવો કે તે પૈકી કયો આલેખ એક પારિમાણિક ગતિ કરતાં કણ માટે શક્ય નથી.



આકૃતિ 3.20

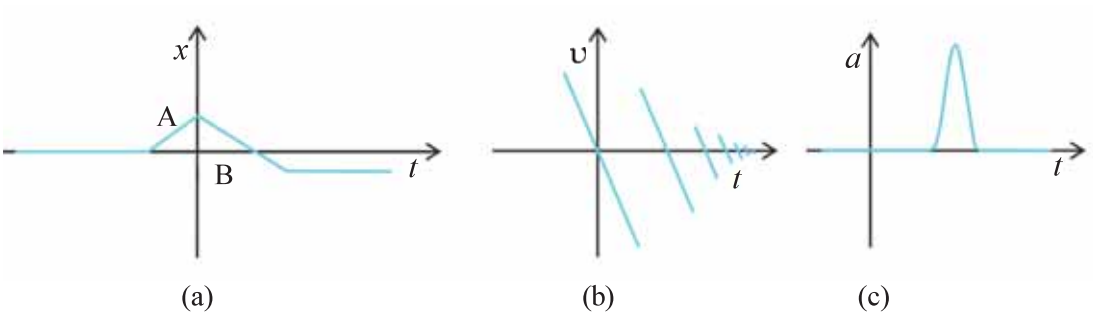
3.17 આકૃતિ 3.21માં કણની એક પારિમાણિક ગતિ માટે $x - t$ આલેખ દર્શાવેલ છે. આલેખ પરથી એમ કહેવું સાચું છે કે, $t < 0$ માટે કણ સુરેખ માર્ગે અને $t > 0$ માટે પરવલય માર્ગે ગતિ કરે છે ? જો ના, તો આ આલેખ માટે યોગ્ય ભૌતિક સંદર્ભનો અભિપ્રાય આપો.



આકૃતિ 3.21

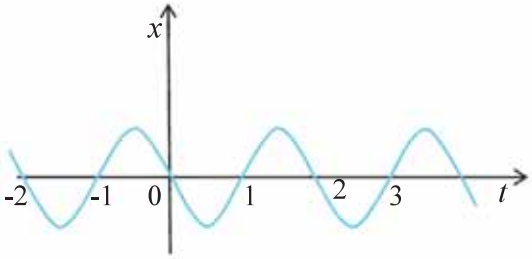
3.18 કોઈ એક રાજમાર્ગ પર 30 km h^{-1}ની ઝડપે દોડતી પોલીસવાનમાંથી, તેની જ દિશામાં 192 km h^{-1} ઝડપે દોડી રહેલી ચોરની કાર પર ગોળી છોડવામાં આવે છે. જો બંદૂકની નળીમાંથી નીકળતી ગોળીની ઝડપ 150 km h^{-1} હોય, તો ગોળી ચોરની કારને કઈ ઝડપે અથડાશે ? (નોંધ : ગોળીની તે ઝડપ નક્કી કરો કે જે ચોરની કારને નુકસાન પહોંચાડી શકે ?)

3.19 નીચે આકૃતિ 3.22માં આપેલ આલેખો માટે યોગ્ય પરિસ્થિતિ સૂચવો.



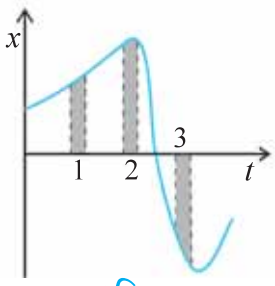
આકૃતિ 3.22

3.20 આકૃતિ 3.23માં એક પારિમાણિક સરળ આવર્તગતિ માટેનો $x - t$ આલેખ દર્શાવેલ છે. (આ ગતિ વિશેનો વિગતવાર અભ્યાસ તમે પ્રકરણ 14માં કરશો.) સમય t = 0.3 s, 1.2 s, − 1.2 s માટે કણનાં સ્થાન, વેગ અને પ્રવેગનાં ચિહ્નો શું હોઈ શકે ?



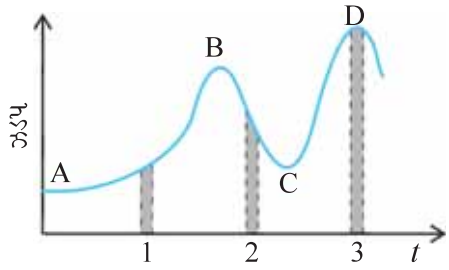
આકૃતિ 3.23

3.21 આકૃતિ 3.24માં એક પારિમાણિક ગતિ કરતાં કણ માટેનો $x - t$ આલેખ દર્શાવેલ છે. જેમાં ત્રણ સમાન સમયગાળા દર્શાવેલ છે. કયા સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ સૌથી વધુ અને કયા માટે તે સૌથી ઓછી હશે ? દરેક સમયગાળાને અનુરૂપ સરેરાશ વેગનાં ચિહ્ન આપો.



આકૃતિ 3.24

3.22 આકૃતિ 3.25માં અચળ દિશામાં ગતિ કરતાં કણ માટે ઝડપ-સમયનો આલેખ દર્શાવેલ છે. જેમાં ત્રણ સમાન સમયગાળા દર્શાવ્યા છે. કયા સમયગાળા માટે સરેરાશ પ્રવેગનું માન સૌથી વધુ હશે ? કયા સમયગાળા માટે સરેરાશ ઝડપ સૌથી વધુ હશે ? પદાર્થની અચળ ગતિની દિશાને ધન દિશા તરીકે પસંદ કરી, ત્રણેય સમયગાળાને અનુરૂપ v અને aનાં ચિહ્ન જણાવો. A, B, C અને D. બિંદુ પર પ્રવેગ શું હશે ?



આકૃતિ 3.25

વધારાનું સ્વાધ્યાય

3.23 ત્રિચક્રી વાહન પોતાની સ્થિર સ્થિતિમાંથી 1 m s^{-2} જેટલા અચળ પ્રવેગ સાથે સુરેખમાર્ગ પર 10 s સુધી ગતિ કરે છે અને ત્યાર બાદ તે નિયમિત વેગથી ગતિ કરે છે. વાહન દ્વારા nમી સેકન્ડ (n = 1, 2, 3, ...)માં કપાયેલ અંતર વિરુદ્ધ nનો આલેખ દોરો. પ્રવેગી ગતિ દરમિયાન આવા આલેખ માટે તમે શું ધારો છો ? એક સુરેખા કે પરવલય ?

3.24 સ્થિર લિફ્ટ (ઉપરથી ખુલ્લી હોય તેવી)માં ઊભેલો એક બાળક 49 m s^{-1} જેટલી મહત્તમ પ્રારંભિક ઝડપે એક દડાને ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકે છે. તો દડાને તેના હાથમાં પાછો આવવા માટે કેટલો સમય લાગશે ? જો લિફ્ટ 5 m s^{-1} જેટલી નિયમિત ઝડપે ઉપર તરફ ગતિ કરવાની શરૂઆત કરે અને બાળક ફરીથી દડાને ઉપર તરફ તે જ મહત્તમ ઝડપે ફેંકે, તો કેટલા સમય પછી દડો બાળકના હાથમાં પરત આવશે ?

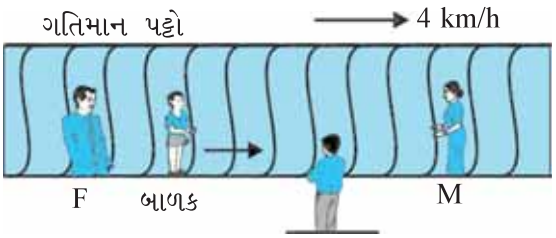
3.25 આકૃતિ 3.26માં દર્શાવ્યા મુજબ સમક્ષિતિજ લાંબો પટ્ટો 4 km h^{-1} ઝડપે ગતિમાં છે. આ પટ્ટા પર એક બાળકનાં માતા-પિતા એકબીજાંથી 50 m દૂર બેઠાં છે અને બાળક પટ્ટાની સાપેક્ષે 9 km h^{-1} ઝડપે પટ્ટા પર માતા-પિતાની વચ્ચે આગળ-પાછળ દોડે છે. પ્લેટફૉર્મ ઉપર સ્થિર ઊભેલ અવલોકનકાર માટે

(a) પટ્ટાની ગતિની દિશામાં દોડતાં બાળકની ઝડપ શું હશે ?

(b) પટ્ટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં દોડતા બાળકની ઝડપ શું હશે ?

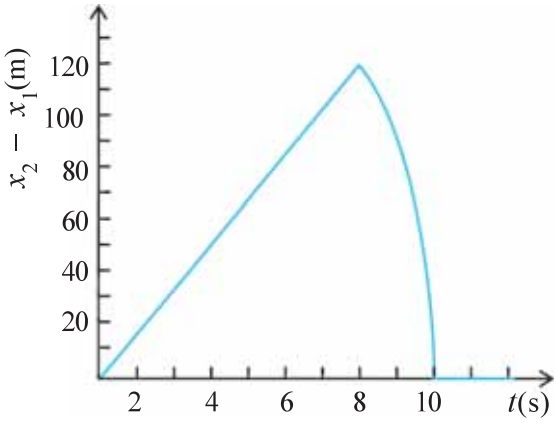
(c) (a) અને (b)માં બાળકને લાગતો સમય શું હશે ?

જો બાળકની ગતિનું અવલોકન તેનાં માતા કે પિતા કરતાં હોય, તો ઉપરમાંથી કયા પ્રશ્નનો જવાબ પરસ્પર બદલાઈ જશે ?



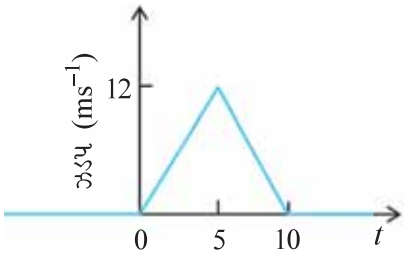
આકૃતિ 3.26

3.26 200 m ઊંચાઈના એક ખડકની ટોચ પરથી બે પથ્થરને એક સાથે 15 m s^{-1} અને 30 m s^{-1}ની પ્રારંભિક ઝડપથી ઊર્ધ્વદિશામાં ફેંકવામાં આવે છે. આકૃતિ 3.27માં દર્શાવેલ આલેખ પ્રથમ પથ્થરની સાપેક્ષે બીજા પથ્થરનું સ્થાનમાં સમય સાથે થતાં ફેરફારો દર્શાવે છે, તેની ચકાસણી કરો. હવાનો અવરોધ અવગણો અને સ્વીકારો કે જમીનને અથડાયા બાદ પથ્થર ઉપર તરફ ઊછળતા નથી. g = 10 m s^{-2} લો. આલેખમાં રેખીય અને વક્ર ભાગ માટેનાં સમીકરણો લખો.



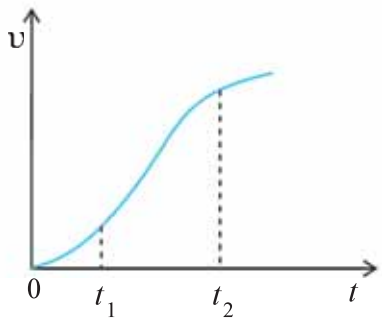
આકૃતિ 3.27

3.27 આકૃતિ 3.28માં ચોક્કસ દિશામાં ગતિ કરતાં કણ માટે ઝડપ-સમય આલેખ દર્શાવેલ છે. (a) $t = 0$ s થી $t = 10$ s (b) $t = 2$ s થી $t = 6$ s માટે કણ દ્વારા કપાયેલ અંતર શોધો. સમયગાળા (a) અને (b) માટે કણની સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ?



આકૃતિ 3.28

3.28 આકૃતિ 3.29માં એક પરિમાણમાં ગતિ કરતાં કણ માટે વેગ-સમય આલેખ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.29

સમયગાળા t_1 થી t_2 માટે નીચેમાંથી કયાં સમીકરણો કણની ગતિને વર્ણવે છે :

(a) $x(t_2) = x(t_1) + \upsilon(t_1)\,(t_2 - t_1) + (1/2)\,a\,(t_2 - t_1)^2$

(b) $\upsilon(t_2) = \upsilon(t_1) + a\,(t_2 - t_1)$

(c) $\upsilon_{average} = [x(t_2) - x(t_1)] \,/\, (t_2 - t_1)$

(d) $a_{average} = [\upsilon(t_2) - \upsilon(t_1)] \,/\, (t_2 - t_1)$

(e) $x(t_2) = x(t_1) + \upsilon_{average}\,(t_2 - t_1) + (1/2)\,a_{average}\,(t_2 - t_1)^2$

(f) $x(t_2) - x(t_1) =$ t-અક્ષ અને રેખાંકન કરેલી લાઇન વડે $\upsilon - t$ વક્ર નીચે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ.

પરિશિષ્ટ 3.1 : કલનશાસ્ત્રનાં તત્ત્વો (ELEMENTS OF CALCULUS)

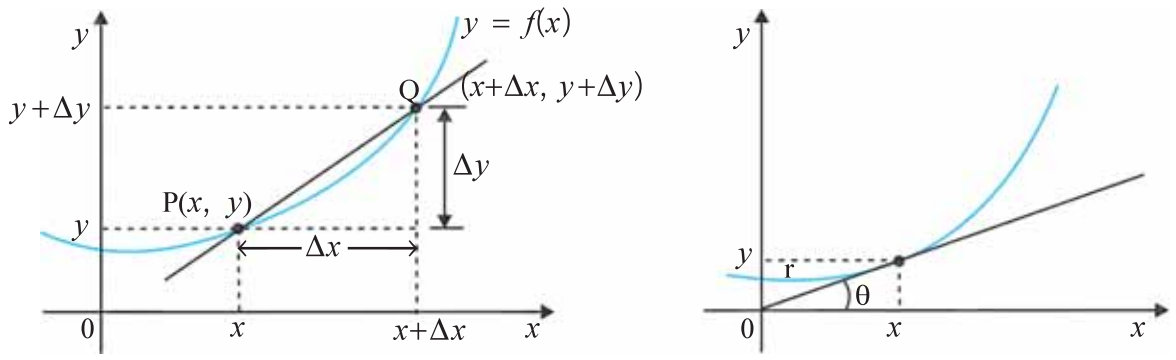
વિકલ કલનશાસ્ત્ર (Differential Calculus)

વિકલ ગુણાંક અથવા વિકલિતની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીને આપણે સરળતાથી વેગ અને પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ. જો કે વિકલિત વ્યુત્પન્નોનો અભ્યાસ વધુ વિસ્તારથી ગણિતમાં કરશો. છતાં આ પરિશિષ્ટ દ્વારા સંક્ષિપ્તમાં વિકલનનો પરિચય કેળવીશું. જેથી ગતિ સંબંધિત ભૌતિકરાશિઓનાં વર્ણન માટે સરળતા રહે.

ધારો કે, આપણી પાસે એક રાશિ y છે. જેનું માન કોઈ સુરેખ ચલ (x) પર આધારિત છે તથા રાશિને એક સમીકરણ વડે વ્યક્ત કરી શકાય છે. જે y ને xના ચોક્કસ વિધેય સ્વરૂપે દર્શાવતું હોય, જેને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$y = f(x) \tag{1}$$

આકૃતિ 3.30 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ x અને y કાર્ટેઝિયન યામોના અનુસંધાનને વિધેય $y = f(x)$નો આલેખ દોરીને ઉપર્યુક્ત સંબંધ આલેખમાં જોઈ શકાય છે.



આકૃતિ 3.30

$y = f(x)$ વક્ર પર એક બિંદુ P જેના યામ (x, y) અને બીજું બિંદુ Q જેના યામ $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ છે. P અને Qને જોડતી રેખાનો ઢાળ

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \tag{2}$$

ધારો કે, બિંદુ Q વક્ર પર P બિંદુ તરફ ખસે છે. આ પ્રક્રિયામાં Δy અને Δx ઘટતા જશે અને શૂન્યની નજીક પહોંચશે. પરંતુ તેમનો ગુણોત્તર $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ જરૂરી નથી કે શૂન્ય (નાશ) થાય. જ્યાં, $\Delta y \to 0$, $\Delta x \to 0$ માટે રેખા PQ નું શું થાય ? આકૃતિ 3.30(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ તમે જોઈ શકો છો કે આ રેખા PQ, P બિંદુએ વક્રનો સ્પર્શક બની જશે. એનો અર્થ એ થાય કે $\tan\theta$નું મૂલ્ય બિંદુ P પાસેના સ્પર્શકના ઢાળના મૂલ્યની ખૂબ જ નજીક જાય છે. તેને m વડે દર્શાવીએ તો,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \tag{3}$$

ગુણોત્તર $\Delta y/\Delta x$નું લક્ષ જેમ Δx શૂન્યની નજીક જાય તેને yનું x સાપેક્ષ વિકલન કહેવાય તથા તેને dy/dx લખાય. જે, વક્ર $y = f(x)$નો બિંદુ (x, y) પાસે સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

જો $y = f(x)$ તથા $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, હોય તો આપણે વિકલિતની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ લખી શકીએ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

નીચે કેટલાંક વિધેયોનાં વિકલિત સૂત્રો આપેલ છે. અહીં, $u(x)$ તથા $v(x)$ યાદચ્છિક વિધેયો xને રજૂ કરે છે. a અને b અચળ રાશિઓને દર્શાવે છે જે x પર આધારિત નથી. કેટલાંક સામાન્ય વિધેયો માટે વિકલનની યાદી પણ નોંધેલ છે.

$$\frac{d(a\,u)}{dx} = a\frac{du}{dx} \quad : \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d(u\,v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad : \quad \frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad : \quad \frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v^2}\left[v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad : \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x\,\sec x \quad : \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(u)^n = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx} \quad : \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^2 x) = -\cot x\,\operatorname{cosec} x$$

$$\frac{d}{du}(e^u) = e^u \quad : \quad \frac{d}{du}(ln\,u) = \frac{1}{u}$$

વિકલનના સંદર્ભે તાત્ક્ષણિક વેગ અને પ્રવેગ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય :

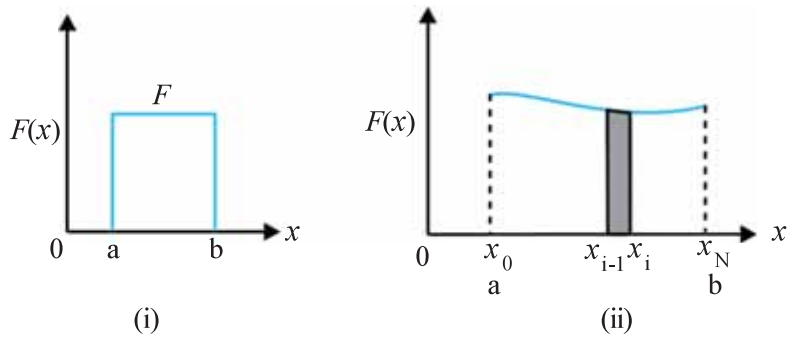
$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

સંકલન કલનશાસ્ત્ર (Integral Calculus)

તમે ક્ષેત્રફળની ધારણાથી પરિચિત છો. કેટલાક સરળ ભૌમિતિક આકારોનાં સૂત્રો પણ તમે જાણો છો. ઉદાહરણ તરીકે, લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની લંબાઈ અને પહોળાઈમાં ગુણાકાર જેટલું તથા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ તેના પાયા અને વેધના ગુણાકાર કરતાં અડધું હોય છે. પરંતુ કોઈ અનિયમિત ભૌમિતિક આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની સમસ્યા પર વિચારીએ તો ? આવી સમસ્યાઓ સાથે સંકલનની ગાણિતીય ધારણા અનિવાર્યપણે સંકળાયેલ છે.

હવે આપણે એક વાસ્તવિક ઉદાહરણ જોઈએ. ધારો કે કોઈ એક કણ ચર બળ $f(x)$ની અસર હેઠળ $(x = a)$ થી $(x = b)$ સુધી x-અક્ષ પર ગતિ કરે છે. કણની ગતિ દરમિયાન બળ વડે થતું કાર્ય નક્કી કરવાની સમસ્યા છે. આ સમસ્યાની વિસ્તારપૂર્વક ચર્ચા પ્રકરણ 6માં કરેલ છે.



આકૃતિ 3.31

આકૃતિ 3.31, x સાથે બળ $F(x)$માં થતો ફેરફાર દર્શાવે છે. જો બળ અચળ હોય, તો આકૃતિ 3.31 (i) મુજબ થતું કાર્ય, $F(b - a)$ ક્ષેત્રફળ જેટલું થાય. પરંતુ વ્યાપક કિસ્સામાં બળ ચલિત હોય છે.

આકૃતિ 3.31(ii)માં દર્શાવેલ વક્ર નીચેનાં ક્ષેત્રફળની ગણતરી કરવી છે. આ માટે નીચે મુજબની એક યુક્તિ અપનાવીશું. X-અક્ષ પર a થી b સુધીનાં અંતરાલને ખૂબ જ મોટી સંખ્યા (N) જેટલા સૂક્ષ્મ અંતરાલોમાં વિભાજિત કરીશું. જે $x_0 = a$ થી x_1, x_1 થી x_2, x_2 થી x_3 ..... x_{N-1}થી $x_N (= b)$. આમ, વક્ર નીચેનું ક્ષેત્રફળ N સંખ્યાની પાતળી પટ્ટીઓમાં વિભાજિત થશે. દરેક પટ્ટી પર $F(x)$નો ફેરફાર અવગણતાં દરેક પાતળી પટ્ટી લગભગ લંબચોરસ થશે. આકૃતિ 3.11(ii)માં દર્શાવેલ i^{th} પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ લગભગ,

$$\Delta A_i = F(x_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i)\Delta x$$

અહીં, Δx પટ્ટીની પહોળાઈ છે. જે દરેક પટ્ટી માટે આપણે સમાન લીધેલ છે. તમે દ્વિધામાં પડશો કે ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં આપણે $F(x_{i-1})$ અથવા $F(x_i)$ અને $F(x_{i-1})$નું સરેરાશ મૂકવું જોઈએ. આ બાબતનું કોઈ જ મહત્ત્વ રહેતું નથી, જ્યારે આપણે સંખ્યા N ખૂબ જ મોટી ($N \to \infty$) લઈએ. ત્યારે દરેક પટ્ટી એટલી પાતળી હોય કે જેનાથી $F(x_i)$ અને $F(x_{i-1})$ વચ્ચેનું અંતર અવગણી શકાય તેટલું નાનું બનશે. પરિણામે, વક્ર નીચે ઘેરાયેલું કુલ ક્ષેત્રફળ,

$$A = \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x$$

આ સરવાળાનું લક્ષ $N \to \infty$ હોય ત્યારે તે a થી b સુધી $F(x)$નું x પર સંકલન દર્શાવે છે તેની ચોક્કસ સંજ્ઞા નીચે દર્શાવ્યા મુજબ છે :

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

સંકલનની સંજ્ઞા $\int$ વિસ્તરેલ s આકાર જેવી છે, જે આપણને યાદ કરાવે છે કે, તે અસંખ્ય પદોના સરવાળાની સીમા છે. એક અત્યંત મહત્ત્વપૂર્ણ ગણિતીય તથ્ય એ છે કે સંકલન એ વિકલનનું વ્યસ્ત છે. ધારો કે, આપણી સામે એક વિધેય $g(x)$ જેનું વિકલિત $f(x)$ છે, ત્યારે $f(x) = \dfrac{dg(x)}{dx}$

વિધેય $g(x)$ને અનિયત સંકલન કહે છે તથા તેને નીચે મુજબ દર્શાવાય છે :

$$g(x) = \int f(x)dx$$

સંકલનમાં નીચલી સીમા અને ઊપલી સીમા આપેલ હોય ત્યારે તેને નિયત સંકલન કહે છે અને તે એક સંખ્યા છે. અનિયત સંકલનને કોઈ સીમા હોતી નથી અને તે એક વિધેય છે.

ગણિતનો પાયાનો એક પ્રમેય દર્શાવે છે કે,

$$\int_a^b f(x)dx = g(x)\Big|_a^b \equiv g(b) - g(a)$$

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે $f(x) = x^2$ તથા આપણે $x = 1$ થી $x = 2$ સુધી નિયત સંકલનનું મૂલ્ય શોધવા ઇચ્છીએ છીએ. વિધેય $f(x) = x^2$નું સંકલન $g(x) = x^3/3$ છે. તેથી,

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

સ્પષ્ટ છે કે, નિયત સંકલનનું મૂલ્યાંકન કરવા માટે આપેલ તદ્નુરૂપ અનિયત સંકલનને જાણવું પડે. આ માટે કેટલાંક સામાન્ય અનિયત સંકલનો નીચે દર્શાવેલ છે :

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = ln\, x \qquad (x > 0)$$

$$\int \sin x \; \mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int \cos x \; \mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

વિકલન અને સંકલન કલનશાસ્ત્રની આ પ્રસ્તાવના વિસ્તૃત નથી અને તેનો ઇરાદો તમને કલનશાસ્ત્રની પાયાની વ્યાખ્યાઓ સમજાવવાનો છે.