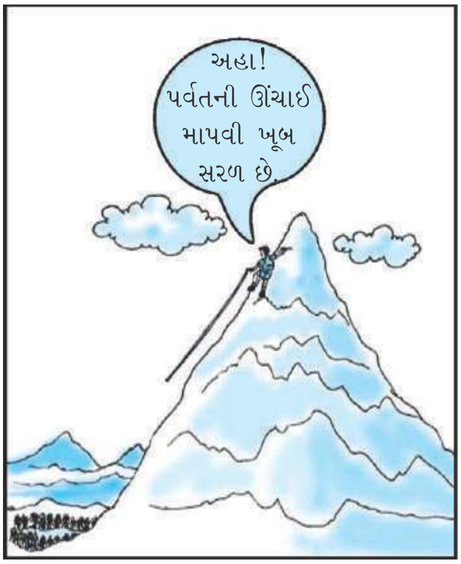
ત્રિકોણ 6

6.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે અગાઉના ધોરણમાં ત્રિકોણ અને તેના ઘણા ગુણધર્મોથી પરિચિત થયાં છો. ધોરણ IX માં તમે ત્રિકોણની એકરૂપતા વિશે વિગતવાર અભ્યાસ કર્યો છે. યાદ કરો કે જ્યારે, બે આકૃતિઓના આકાર અને કદ સમાન હોય ત્યારે, તે બે આકૃતિઓ એકરૂપ છે તેવું કહેવાય. આ પ્રકરણમાં આપણે જેના આકાર સમાન હોય, પરંતુ તેમનાં કદ સમાન હોય કે ન પણ હોય તેવી આકૃતિઓ વિશે અભ્યાસ કરીશું. ***જે બે આકૃતિઓના આકાર સમાન હોય (કદ સમાન હોય તે જરૂરી નથી) તેમને સમરૂપ આકૃતિઓ કહે છે.*** ખાસ કરીને, આપણે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની ચર્ચા કરીશું અને આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ અગાઉ શીખેલ પાયથાગોરસ પ્રમેયની સરળ સાબિતી આપવા માટે કરીશું.

તમે અનુમાન કરી શકો કે પર્વતો (જેમકે, માઉન્ટ એવરેસ્ટ)ની ઊંચાઈઓ અને દૂરની વસ્તુઓ (જેમકે, ચંદ્ર) નાં અંતર કેવી રીતે શોધી શકાય ? શું તમને એવું લાગે છે કે આ માપો માપપટ્ટીથી સીધાં જ માપવામાં આવ્યા છે? ખરેખર

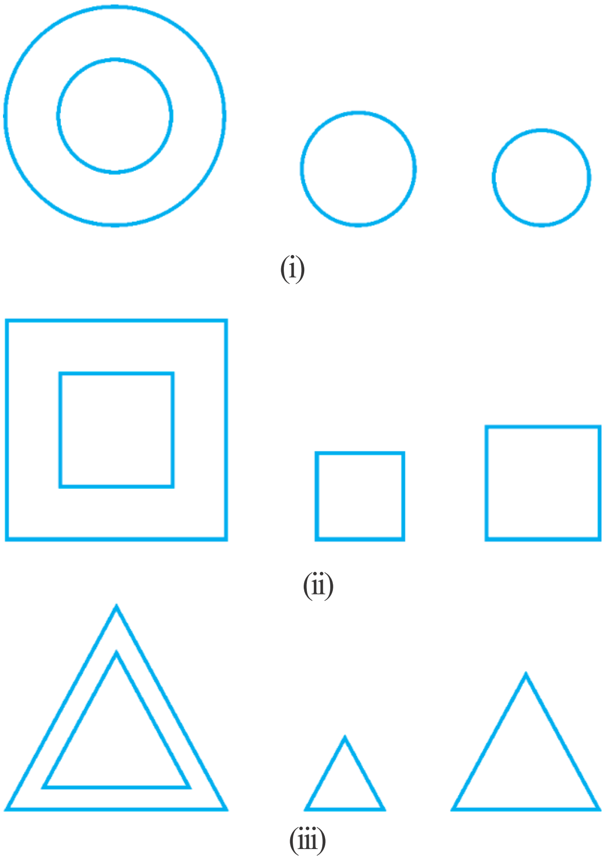


તો આ બધી ઊંચાઈઓ અને અંતરો આકૃતિઓની સમરૂપતાના સિદ્ધાંત પર આધારિત પરોક્ષ માપનની સંકલ્પનાથી શોધવામાં આવ્યાં છે. (જુઓ ઉદાહરણ 7, સ્વાધ્યાય 6.3 નો પ્રશ્ન 15 અને આ પુસ્તકનું પ્રકરણ 8 અને 9)

6.2 સમરૂપ આકૃતિઓ

તમે ધોરણ IX માં જોયું છે કે, સમાન ત્રિજ્યાવાળાં તમામ વર્તુળો એકરૂપ હોય છે. સમાન બાજુવાળા બધા ચોરસો એકરૂપ હોય છે અને સમાન બાજુવાળા બધા સમબાજુ ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.

હવે આપણે કોઈ બે (અથવા વધારે) વર્તુળો વિશે વિચાર કરીએ. (જુઓ, આકૃતિ 6.1 (i)). તેઓ એકરૂપ છે ? તે બધાની ત્રિજ્યા સમાન ન હોવાથી તેઓ એકબીજાને એકરૂપ નથી. તે પૈકી કેટલાંક એકરૂપ છે અને કેટલાંક નથી. પરંતુ, તે બધાના આકાર સમાન છે. તેથી તે બધી આકૃતિઓને આપણે સમરૂપ આકૃતિઓ કહીશું. બે સમરૂપ આકૃતિઓના આકાર સરખા હોય છે, પરંતુ કદ સમાન હોય કે ન પણ હોય તે શક્ય છે. તેથી બધાં વર્તુળો સમરૂપ છે. બે (અથવા વધારે) ચોરસ કે બે (અથવા વધારે) સમબાજુ ત્રિકોણ વિશે તમને શું લાગે છે ? જુઓ આકૃતિ 6.1 (ii) અને (iii) ? જેમ વર્તુળોમાં જોયું, તેમ અહીં બધા ચોરસ અને બધા સમબાજુ ત્રિકોણ પણ સમરૂપ છે.

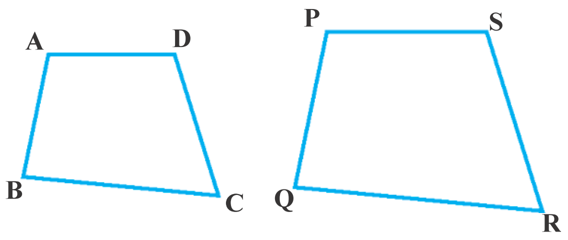


આકૃતિ 6.1

ઉપરની ચર્ચા પરથી કહી શકાય ***બધી એકરૂપ આકૃતિઓ સમરૂપ આકૃતિઓ છે, પરંતુ બધી સમરૂપ આકૃતિઓ એકરૂપ હોય તે જરૂરી નથી.***

એક વર્તુળ અને એક ચોરસ સમરૂપ થઈ શકે ? એક ત્રિકોણ અને ચોરસ સમરૂપ થઈ શકે ? આ પ્રશ્નોના જવાબ તમે તેમની અનુરૂપ આકૃતિઓ (જુઓ આકૃતિ 6.1.) જોઈને જ આપી શકશો.

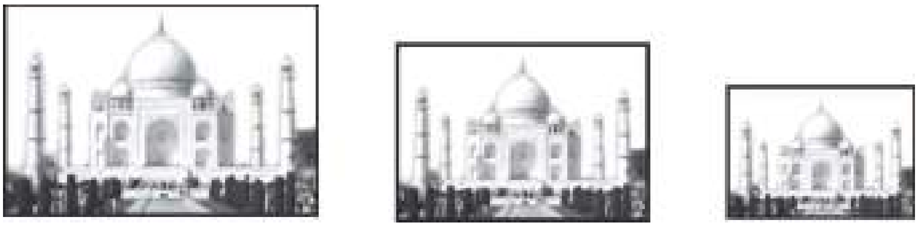
સ્પષ્ટ રીતે, આ આકૃતિઓ સમરૂપ નથી. (શા માટે ?)



આકૃતિ 6.2

બે ચતુષ્કોણો ABCD અને PQRS વિશે શું કહી શકાય ? (આકૃતિ 6.2) તે સમરૂપ છે ? આ આકૃતિઓ સમરૂપ લાગે છે, પરંતુ તેમના વિશે ચોક્કસ ન કહી શકાય. તેથી એ જરૂરી બને છે કે, આકૃતિઓની સમરૂપતાની કોઈ વ્યાખ્યા હોય અને વ્યાખ્યા આધારિત કેટલાક માપદંડ નક્કી કરી શકાય કે આપેલી બે આકૃતિઓ સમરૂપ છે કે નહિ.

આના માટે આકૃતિ 6.3 માં આપેલ ચિત્રો જુઓ.



આકૃતિ 6.3

તમે તરત જ કહેશો કે તે ચિત્રો એક જ સ્મારક (તાજમહેલ)નાં છે પરંતુ, તેમનાં કદ ભિન્ન છે. તમે કહેશો કે આ ત્રણ ચિત્રો સમરૂપ છે ? હા, તે સમરૂપ છે.

કોઈ એક જ વ્યક્તિનાં 10 વર્ષની ઉંમરનાં તેમજ 40 વર્ષની ઉંમરના એક જ કદનાં બે ચિત્રો માટે શું કહી શકાય ? આ ચિત્રો સમરૂપ છે ? આ ચિત્રોનાં કદ સમાન છે, પરંતુ સ્પષ્ટપણે તેમના આકાર સમાન નથી. તેથી તે સમરૂપ નથી.

જ્યારે કોઈ તસવીરકાર કોઈ એક નેગેટિવમાંથી જુદા-જુદા કદના ફોટાની નકલ કાઢે છે, ત્યારે તે શું કરે છે ? તમે ટિકિટ પ્રમાણેનું કદ, પાસપોર્ટ પ્રમાણેનું કદ અને પોસ્ટકાર્ડ પ્રમાણેના કદની નકલો વિશે સાંભળ્યું હશે. તે સામાન્ય રીતે 35 મિમિ પર નાના કદની ફિલ્મ જેમ ચિત્રો લે છે અને પછી તેની 45 મિમિ (કે 55 મિમિ)ના કદમાં મોટવણી કરે છે. આમ, જો આપણે નાની નકલના કોઈ રેખાખંડને અનુરૂપ મોટી નકલના સંગત રેખાખંડ લઈએ તો તે મોટી નકલના અનુરૂપ રેખાખંડના $\frac{45}{35}$ (કે $\frac{55}{35}$) ગણા થશે.

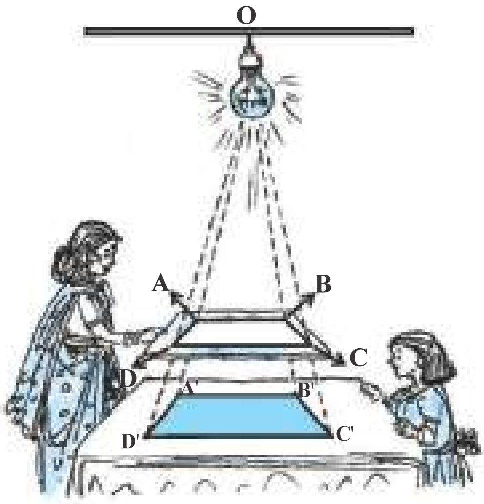
આનો અર્થ ખરેખર એવો છે કે નાની નકલના દરેક રેખાખંડને 35 : 45 (કે 35 : 55) ગુણોત્તરમાં મોટો કરી શકાય છે. એવું પણ કહી શકાય કે મોટી નકલના દરેક રેખાખંડને 45 : 35 (કે 55 : 35) ગુણોત્તરમાં નાનો બનાવી શકાય. વધુમાં, જો તમે જુદા-જુદા કદની બે નકલોના અનુરૂપ રેખાખંડોના ઢાળ (કે ખૂણાઓ) વિશે વિચારો તો તેમના ઢાળ (કે ખૂણાઓ) હંમેશાં સમાન છે. બે આકૃતિઓ અને વિશેષ કરીને બે બહુકોણોની સમરૂપતાનો આ સાર છે. આપણે કહી શકીએ :

જો (i) સમાન બાજુવાળા બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો તે બહુકોણો સમરૂપ છે.

આપણે ધ્યાન આપીએ કે બહુકોણ માટે સંગત બાજુઓના ગુણોત્તર ને **સ્કેલમાપન (નિર્દેશક અપૂર્ણાંક)** કહેવામાં આવે છે. તમે દુનિયાનો નકશો (જેમ કે, વૈશ્વિક નકશો) અને મકાનોના બાંધકામ માટે બનાવેલી રૂપરેખા વિશે સાંભળ્યું હશે. તે યોગ્ય સ્કેલમાપન અને ચોક્કસ રૂઢિને ધ્યાનમાં રાખી બનાવવામાં આવે છે.

આકૃતિઓની સમરૂપતા વધારે સ્પષ્ટ રીતે સમજવા, ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક પ્રકાશિત બલ્બને છત પરના બિંદુ O પર લગાડો અને તેની બરાબર નીચે વર્ગનું ટેબલ ગોઠવો. ચાલો આપણે એક સીધા પૂંઠામાંથી એક બહુકોણ, જેમકે, ચતુષ્કોણ ABCD કાપીએ અને આ પૂંઠાને પ્રકાશિત બલ્બ અને ટેબલ વચ્ચે ટેબલની સપાટીને સમાંતર ગોઠવીએ. તેથી ABCDનો પડછાયો ટેબલ પડશે. આ પડછાયાની બહારની રેખા A′B′C′D′ આંકી લો. (જુઓ આકૃતિ 6.4.)



આકૃતિ 6.4

આપણે નોંધ કરીએ કે ચતુષ્કોણ A'B'C'D' એ ચતુષ્કોણ ABCD નું વિસ્તૃત (કે વિપુલ) સ્વરૂપ છે અને તે પ્રકાશ સીધી રેખામાં ગતિ કરે છે એ પ્રકાશના ગુણધર્મને કારણે છે. તમે એ પણ નોંધ્યું હશે કે A' કિરણ OA પર છે. B' કિરણ OB પર છે, C' કિરણ OC પર છે અને D' કિરણ OD પર છે. આથી ચતુષ્કોણો A'B'C'D' અને ABCD ના આકાર સરખા છે, પરંતુ કદ જુદાં છે.

તેથી ચતુષ્કોણો, A'B'C'D' અને ચતુષ્કોણ ABCD સમરૂપ છે. આપણે એમ કહી શકીએ કે ચતુષ્કોણ ABCD એ ચતુષ્કોણ A'B'C'D' ને સમરૂપ છે.

આપણે એ પણ નોંધીશું કે, શિરોબિંદુ A' એ શિરોબિંદુ A ને સંગત છે, શિરોબિંદુ B' એ શિરોબિંદુ B ને સંગત છે, શિરોબિંદુ C' એ શિરોબિંદુ C ને સંગત છે અને શિરોબિંદુ D' એ શિરોબિંદુ D ને સંગત છે.

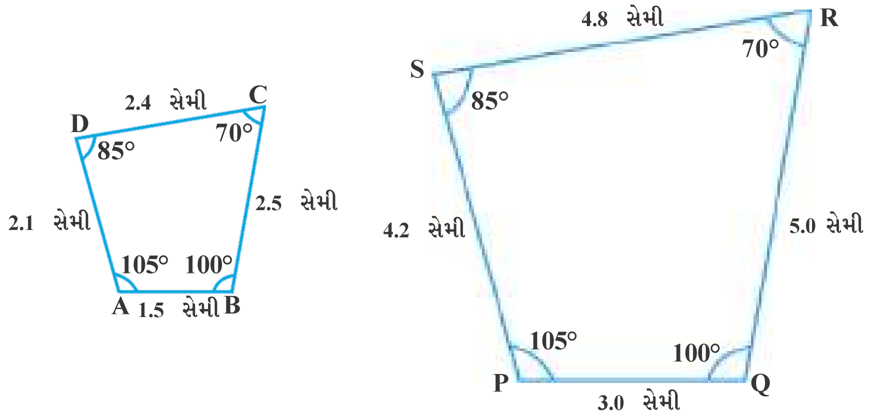
સંકેતમાં આ સંગતતાઓને $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$, $D' \leftrightarrow D$ થી દર્શાવી શકાય. હકીકતમાં, બે ચતુષ્કોણોના ખૂણાઓ તથા બાજુઓ માપીને, તમે ચકાસી શકો કે,

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ અને

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$

આ પરથી ફરીથી સ્પષ્ટ થાય છે કે ***જો (i) બે બહુકોણના બધા જ અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની બધી અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો સમાન સંખ્યાની બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ થાય.***

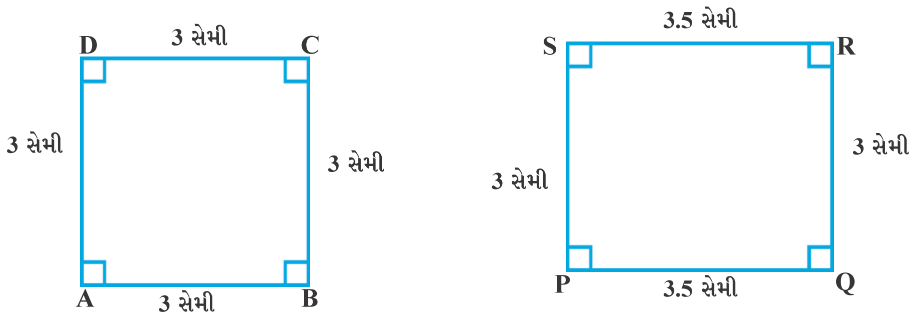
ઉપર પ્રમાણે, તમે સહેલાઈથી કહી શકશો કે આકૃતિ 6.5 માંના ચતુષ્કોણો ABCD અને PQRS સમરૂપ છે.



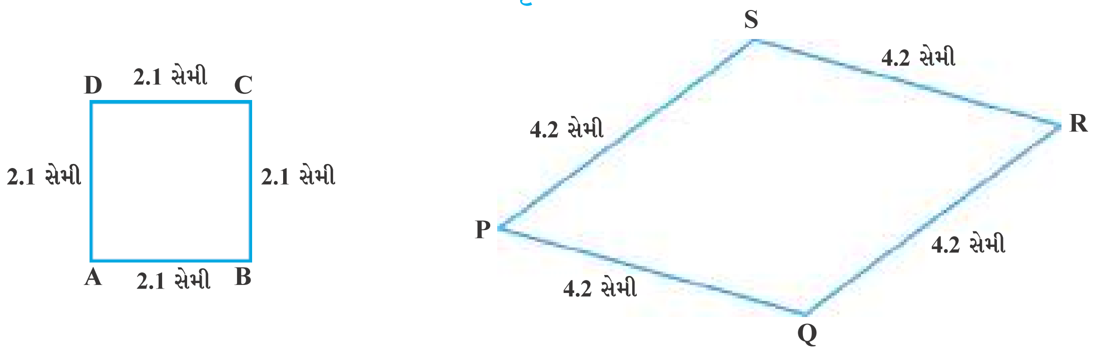
આકૃતિ 6.5

નોંધ : તમે જોઈ શકશો કે, જો એક બહુકોણ બીજા બહુકોણને સમરૂપ હોય અને બીજો બહુકોણ ત્રીજા બહુકોણને સમરૂપ હોય, તો પહેલો બહુકોણ ત્રીજા બહુકોણને સમરૂપ છે.

તમે નોંધ્યું હશે કે આકૃતિ 6.6 માંના બે ચતુષ્કોણો (ચોરસ અને લંબચોરસ)માં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે, પરંતુ, તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન નથી.



આકૃતિ 6.6



આકૃતિ 6.7

એ જ રીતે તમે નોંધ્યું હશે કે, આકૃતિ 6.7 માંના બે ચતુષ્કોણો (ચોરસ અને સમબાજુ ચતુષ્કોણ)ની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર સમાન છે. પરંતુ, તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન નથી. ફરીથી બે બહુકોણો (ચતુષ્કોણો) સમરૂપ નથી.

આમ, બે બહુકોણોની સમરૂપતા માટેની ઉપર દર્શાવેલી બે શરતો (i) અને (ii) પૈકી કોઈ એકના પાલન થવાથી બહુકોણો સમરૂપ છે તેમ કહી શકાય નહીં.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. કૌંસમાં આપેલ શબ્દો પૈકી સાચા શબ્દનો ઉપયોગ કરીને ખાલી જગા પૂરો :

(i) બધાં વર્તુળો .... છે. (એકરૂપ, સમરૂપ)

(ii) બધા ચોરસો .... છે. (સમરૂપ, એકરૂપ)

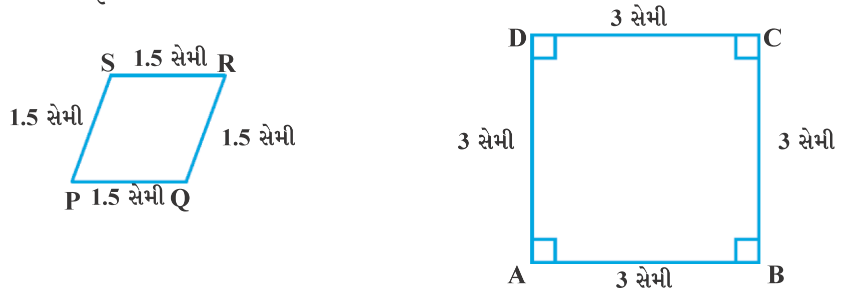
(iii) બધા .... ત્રિકોણો સમરૂપ છે. (સમદ્વિબાજુ, સમબાજુ)

(iv) જો (અ) બે બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ .... હોય. (બ) તેમની અનુરૂપ બાજુઓ .... હોય. (સમાન, સમપ્રમાણમાં) તો સમાન સંખ્યાની બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ છે.

2. નીચેની જોડીઓનાં બે જુદાં-જુદાં ઉદાહરણો આપો :

(i) સમરૂપ આકૃતિઓ (ii) સમરૂપ ન હોય તેવી આકૃતિઓ

3. નીચેના ચતુષ્કોણો સમરૂપ છે કે નહિ તે જણાવો :



આકૃતિ 6.8

6.3 ત્રિકોણોની સમરૂપતા

બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા વિશે શું કહી શકો ?

તમને યાદ હશે કે ત્રિકોણ પણ બહુકોણ છે. તેથી સમરૂપતા માટેની શરતો બે ત્રિકોણની સમરૂપતા માટે પણ દર્શાવી શકાય. તે આ પ્રમાણે છે.

જો (i) બે ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય (એટલે કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય) તો, તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

Thales
(B.C.E.640-B.C.E.546)

આપણે જાણીએ છીએ કે, જો બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તેમને સમકોણિક ત્રિકોણો કહેવાય છે. પ્રખ્યાત ગ્રીક ગણિતજ્ઞ **થેલ્સે** બે સમકોણિક ત્રિકોણો વિશે અગત્યનું પરિણામ આપ્યું હતું. તે નીચે પ્રમાણે છે :

બે સમકોણિક ત્રિકોણોમાં પ્રત્યેક બે અનુરૂપ બાજુઓની જોડના ગુણોત્તર સમાન હોય છે.

એવું માનવામાં આવે છે કે તેના માટે તેણે ***સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેયના*** પરિણામનો ઉપયોગ કર્યો હતો. (તે હવે ***થેલ્સના પ્રમેય*** તરીકે જાણીતું છે.)

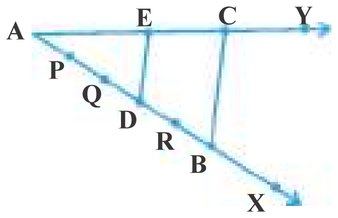
સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેયને સમજવા માટે આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 2 : કોઈ પણ ખૂણો (XAY) દોરો અને તેના ભુજ AX પર બિંદુઓ (કહો કે, પાંચ બિંદુઓ) P, Q, D, R અને B એવી રીતે દર્શાવો કે,

AP = PQ = QD = DR = RB.

હવે, B માંથી ભુજ AYને C માં છેદતી કોઈ રેખા દોરો (જુઓ આકૃતિ 6.9.)

તદુપરાંત, બિંદુ D માંથી AC ને E માં છેદતી તથા BC ને સમાંતર હોય તેવી રેખા દોરો.



આકૃતિ 6.9

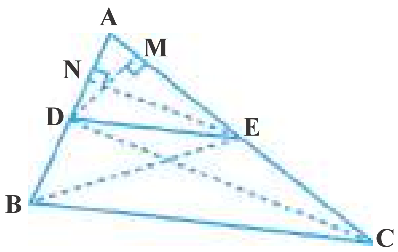
તમારી રચના પરથી તમે અવલોકન કર્યું $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$? AE અને EC માપો. $\frac{AE}{EC}$ માટે શું કહી શકાય ?

અવલોકન કરો કે, $\frac{AE}{EC}$ પણ $\frac{3}{2}$ થશે.

આમ, તમે જોઈ શકશો કે, Δ ABCમાં, DE || BC અને $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. શું આ યોગાનુયોગ માત્ર છે ? ના, તે નીચેના પ્રમેયના કારણે છે. (***આ પ્રમેય સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેય તરીકે જાણીતું છે.***)

પ્રમેય 6.1 : જો ત્રિકોણની કોઈ એક બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા બાકીની બે બાજુઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો તે બાજુઓ પર કપાતા રેખાખંડો તે બાજુઓનું સમપ્રમાણમાં વિભાજન કરે છે.

સાબિતી : અહીં આપેલું છે કે, ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC ને સમાંતર રેખા બાકીની બે બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.10.)



આકૃતિ 6.10

આપણે સાબિત કરવાનું છે કે, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

BE અને CD જોડો અને DM ⊥ AC અને EN ⊥ AB દોરો.

હવે, Δ ADE નું ક્ષેત્રફળ (= $\frac{1}{2}$ પાયો × વેધ) = $\frac{1}{2}$ AD × EN

ધોરણ IXમાં શીખ્યાં હતાં તે પ્રમાણે Δ ADEનું ક્ષેત્રફળ ADE વડે દર્શાવાય છે, તે યાદ કરો.

તેથી, $ADE = \frac{1}{2} AD \times EN$

એ જ રીતે $BDE = \frac{1}{2} DB \times EN$

$ADE = \frac{1}{2} AE \times DM$ અને $DEC = \frac{1}{2} EC \times DM$

તેથી, $$\frac{ADE}{BDE} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN}$$

$$= \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

અને $$\frac{ADE}{DEC} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM}$$

$$= \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

હવે નોંધો કે, Δ BDE અને Δ DEC એક જ પાયા DE પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડ BC અને DE વચ્ચે આવેલાં છે.

તેથી, BDE = DEC (3)

તેથી, (1), (2) અને (3) પરથી

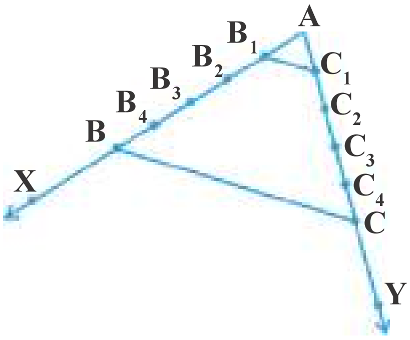
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ■

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે ? (પ્રતીપના અર્થ માટે પરિશિષ્ટ 1 જુઓ.)

આ ચકાસવા માટે, ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 3 : તમારી નોંધપોથીમાં ∠XAY દોરો અને કિરણ AX પર, બિંદુઓ B_1, B_2, B_3, B_4 અને B એવી રીતે લો કે, જેથી $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$.

એ જ રીતે કિરણ AY પર બિંદુઓ C_1, C_2, C_3, C_4 અને C એવી રીતે લો કે, જેથી $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. હવે, B_1C_1 અને BC જોડો (જુઓ આકૃતિ 6.11.)



આકૃતિ 6.11

જુઓ $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (દરેક $\frac{1}{4}$ બરાબર છે.)

તમે એ પણ જોઈ શકશો કે રેખાઓ B_1C_1 અને BC એકબીજાને સમાંતર છે.

એટલે કે $B_1C_1 \parallel BC$ (1)

એ જ રીતે, B_2C_2, B_3C_3 અને B_4C_4 જોડીને જોઈ શકો કે,

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(=\frac{2}{3}\right)$ અને $B_2C_2 \parallel BC$ (2)

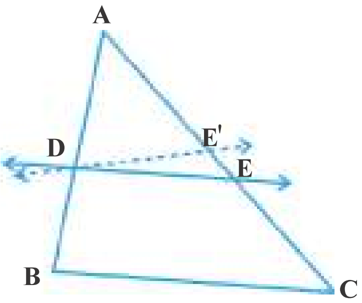
$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(=\frac{3}{2}\right)$ અને $B_3C_3 \parallel BC$ (3)

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(=\frac{4}{1}\right)$ અને $B_4C_4 \parallel BC$ (4)

(1), (2), (3) અને (4) પરથી જોઈ શકાય છે કે જો એક રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે.

તમે આ પ્રવૃત્તિનું કોઈ અલગ માપનો ખૂણો XAY દોરી અને તેના ભુજ AX અને AY પર ગમે તેટલા સમાન ભાગ પાડીને પુનરાવર્તન કરો. દરેક વખતે સમાન પરિણામ મળશે. આથી, આપણને નીચેનું પ્રમેય મળે. તે પ્રમેય 6.1નું પ્રતીપ છે.

પ્રમેય 6.2 : *જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.*



આકૃતિ 6.12

આ પ્રમેય સાબિત કરવા કોઈ રેખા DE એવી લો જેથી $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ થાય. અને ધારો કે, DE એ BC ને સમાંતર નથી. (જુઓ આકૃતિ 6.12.)

જો DE, BC ને સમાંતર ન હોય તો, D માંથી BC ને સમાંતર રેખા DE' દોરો.

તેથી, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (શા માટે ?)

તેથી, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (શા માટે ?)

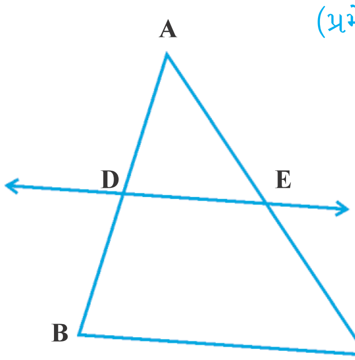
ઉપરના પરિણામમાં બંને બાજુ 1 ઉમેરતાં, જોઈ શકાય કે, E અને E' એક જ હોવા જોઈએ. (શા માટે ?)

હવે, જેમાં ઉપરના પ્રમેયોનો ઉપયોગ થતો હોય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ :

ઉદાહરણ 1 : જો કોઈ એક રેખા Δ ABC ની બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદે છે તથા BC ને સમાંતર છે, તો સાબિત કરો કે $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (જુઓ, આકૃતિ 6.13.)

ઉકેલ : DE || BC (આપેલ છે.)

તેથી, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (પ્રમેય 6.1)



આકૃતિ 6.13

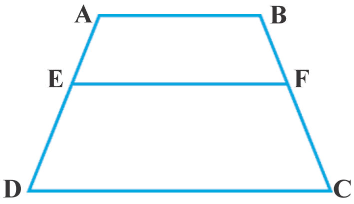
અથવા $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

અથવા $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

અથવા $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

તેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ઉદાહરણ 2 : સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC છે. બિંદુઓ E અને F અનુક્રમે તેની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ AD અને BC પર એવાં છે કે, જેથી EF, AB ને સમાંતર હોય. (જુઓ આકૃતિ 6.14.) સાબિત કરો $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

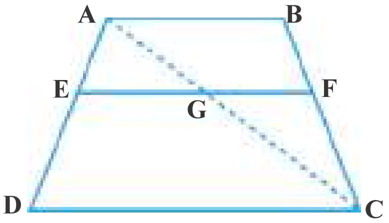


આકૃતિ 6.14

ઉકેલ : EF ને G માં છેદતી રેખા AC દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.15)

AB || DC અને EF || AB (આપેલ છે.)

તેથી, EF || DC (કોઈ એક રેખાને સમાંતર રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય.)



આકૃતિ 6.15

હવે, Δ ADC માં,

EG || DC (કારણ કે, EF || DC)

તેથી, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (પ્રમેય 6.1) (1)

એ જ રીતે, Δ CAB પરથી,

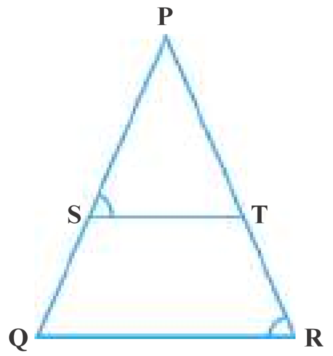
$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

એટલે કે, $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 6.16 માં, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ અને $\angle PST = \angle PRQ$ તો, સાબિત કરો કે Δ PQR સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 6.16

ઉકેલ : અહીં આપેલ છે કે $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

તેથી, ST || QR (પ્રમેય 6.2)

તેથી, $\angle PST = \angle PQR$ (અનુકોણો) (1)

એવું પણ આપેલ છે કે

$\angle PST = \angle PRQ$ (2)

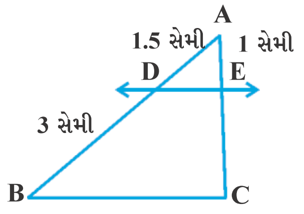
તેથી, $\angle PRQ = \angle PQR$ ((1) અને (2) પરથી)

તેથી, PQ = PR (સમાન ખૂણાની સામેની બાજુ)

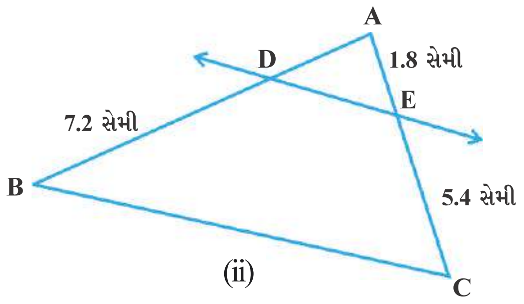
એટલે કે, PQR સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. આકૃતિ 6.17 (i) અને (ii) માં, DE || BC. (i) માં EC શોધો. (ii) માં AD શોધો.



(i)



(ii)

આકૃતિ 6.17

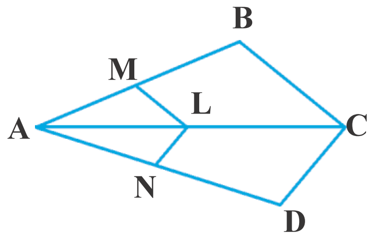
2. બિંદુઓ E અને F એ Δ PQRની બાજુઓ અનુક્રમે PQ અને PR પર આવેલાં છે. નીચેના દરેક વિકલ્પમાં EF || QR છે કે કેમ તે જણાવો :

(i) PE = 3.9 સેમી, EQ = 3 સેમી, PF = 3.6 સેમી અને FR = 2.4 સેમી

(ii) PE = 4 સેમી, QE = 4.5 સેમી, PF = 8 સેમી અને RF = 9 સેમી

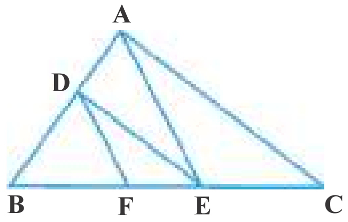
(iii) PQ = 1.28 સેમી, PR = 2.56 સેમી, PE = 0.18 સેમી અને PF = 0.36 સેમી

3. આકૃતિ 6.18 માં, જો LM || CB અને LN || CD હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$.



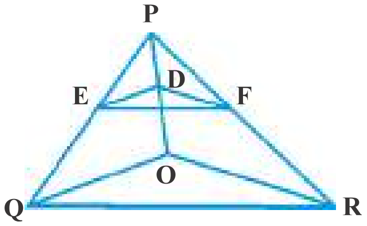
આકૃતિ 6.18

4. આકૃતિ 6.19 માં, જો DE || AC અને DF || AE હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$.



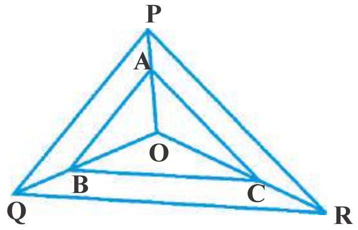
આકૃતિ 6.19

5. આકૃતિ 6.20 માં, DE || OQ અને DF || OR. સાબિત કરો EF || QR.



આકૃતિ 6.20

6. આકૃતિ 6.21 માં AB || PQ અને AC || PR બને તે રીતે બિંદુઓ A, B અને C અનુક્રમે OP, OQ અને OR પર આવેલાં છે. તો સાબિત કરો કે, BC || QR.



આકૃતિ 6.21

7. પ્રમેય 6.1 નો ઉપયોગ કરીને, સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની એકબાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બીજી બાજુને સમાંતર રેખા, ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે. (યાદ કરો, તમે ધોરણ IX માં આ પરિણામ સાબિત કર્યું છે.)

8. પ્રમેય 6.2 નો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની બે બાજુઓના મધ્યબિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે. (યાદ કરો તમે ધોરણ IXમાં આ પરિણામ સાબિત કર્યું છે.)

9. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC અને તેના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

10. ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે અને તેથી $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ થાય છે, તો સાબિત કરો કે, ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

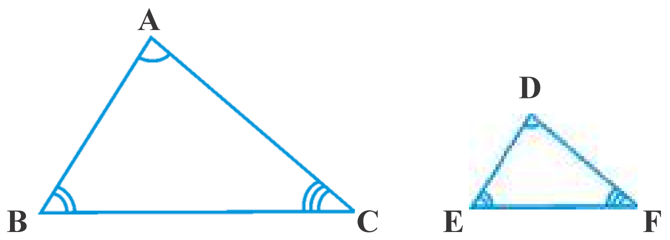
6.4 ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો સિદ્ધાંત

અગાઉના વિભાગમાં, આપણે જોયું છે કે જો (i) બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર સમાન હોય (કે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય), તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

એટલે કે, Δ ABC અને Δ DEF માં

જો (i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ અને

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, તો Δ ABC અને Δ DEF ત્રિકોણો સમરૂપ છે. (જુઓ આકૃતિ 6.22.)



આકૃતિ 6.22

અહીં, તમે જોશો કે A ને સંગત D, B ને સંગત E અને C ને સંગત F છે. સંકેતમાં આ બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાને '$\Delta ABC \sim \Delta DEF$' એમ લખીશું અને તેને 'ત્રિકોણ ABC સમરૂપ ત્રિકોણ DEF' એમ વાંચીશું. સંકેત ~ નો અર્થ છે 'ને સમરૂપ છે.' યાદ કરો ધોરણ IX માં સંકેત ≅ નો ઉપયોગ 'ને એકરૂપ છે.' તેવું દર્શાવવા કરેલો.

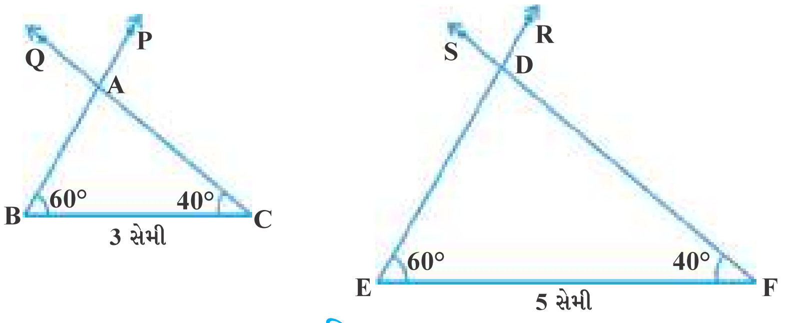
> એ નોંધવું પડશે કે જેમ બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા દર્શાવી છે એમ બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાને તેના શિરોબિંદુઓની સાચી સંગતતાના સંકેતમાં દર્શાવીને અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, આકૃતિ 6.22 ના ત્રિકોણો ABC અને DEF માટે આપણે $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ કે $\Delta ABC \sim \Delta FED$ લખી શકતા નથી. તેમ છતાં આપણે $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ લખી શકીએ.

હવે સ્વાભાવિક રીતે એક પ્રશ્ન થાય.

બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા ચકાસવા, કહો કે, ABC અને DEF માટે તેમના બધા જ અનુરૂપ ખૂણાઓની સમાનતાનો સંબંધ ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$) અને બધી જ અનુરૂપ બાજુઓના સમાન ગુણોત્તરોની સમાનતાનો સંબંધ $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ હંમેશાં ચકાસવો જરૂરી છે ?

ચાલો વિચાર કરીએ. તમને યાદ હશે કે ધોરણ IX માં તમે બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા માટેના કેટલાક સિદ્ધાંત પૈકી બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા માટેના કેટલાક સિદ્ધાંત જેમાં બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ભાગો (કે ઘટકો)ની ફક્ત ત્રણ જોડ સમાયેલી હતી. અહીં આપણે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે સમાયેલા સિદ્ધાંત માટે ઘટકોની છ જોડના બદલે ઓછી સંખ્યામાં અનુરૂપ ઘટકોની જોડના સબંધમાં ચોક્કસ સિદ્ધાંત મેળવીએ. હવે, આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 4 : બે જુદી-જુદી લંબાઈના રેખાખંડો BC અને EF અનુક્રમે 3 સેમી અને 5 સેમી લંબાઈના દોરો. ત્યારબાદ અનુક્રમે બિંદુ B અને C પર 60° અને 40° માપના ખૂણાઓ PBC અને QCB રચો. ઉપરાંત, બિંદુઓ E અને F પર અનુક્રમે 60° અને 40° ના ખૂણાઓ REF અને SFE રચો. (જુઓ આકૃતિ 6.23.)



આકૃતિ 6.23

ધારો કે કિરણો BP અને CQ એકબીજાને A માં છેદે છે. અને કિરણો ER અને FS એકબીજાને D માં છેદે છે.

ત્રિકોણો ABC અને DEF માં, તમે જોશો કે, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F અને ∠A = ∠D. એટલે કે, આ બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. તેમની અનુરૂપ બાજુઓ માટે શું કહી શકાય ?

તમારું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો. $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6.$ $\frac{AB}{DE}$ અને $\frac{CA}{FD}$ માટે શું કહી શકો ? AB, DE, CA અને FD માપીને તમે જોઈ શકશો કે, $\frac{AB}{DE}$ અને $\frac{CA}{FD}$ પણ 0.6 થાય છે. (અથવા જો માપવામાં કોઈ ક્ષતિ હોય તો 0.6ની નજીક છે.)

આમ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

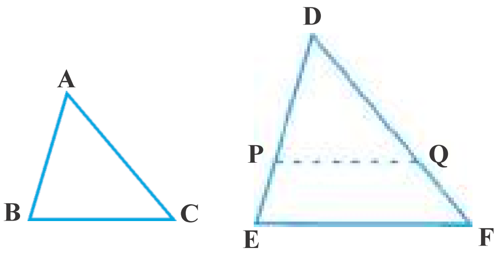
તમે, અનુરૂપ ખૂણાઓની જોડીઓ સમાન હોય તેવા બીજા ત્રિકોણો રચીને આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી શકો. દરેક સમયે તમે જોશો કે તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન છે. (અથવા સમપ્રમાણમાં છે.)

આ પ્રવૃત્તિથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટે નીચેની શરત મળે છે.

પ્રમેય 6.3 : *જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓની જોડના ગુણોત્તર સમાન હોય (અથવા બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય) અને તેથી તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.*

આ શરત બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેની ખૂખૂખૂ (ખૂણો-ખૂણો-ખૂણો) શરત તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રમેયને ત્રિકોણો ABC અને DEF માં, ∠A = ∠D, ∠B = ∠E અને ∠C = ∠F લઈ સાબિત કરી શકાય છે (જુઓ આકૃતિ 6.24.)



આકૃતિ 6.24

DP = AB અને DQ= AC દોરો અને PQ જોડો.

તેથી, Δ ABC ≅ Δ DPQ (કેમ ?)

આના પરથી, ∠B = ∠P = ∠E અને તેથી, PQ || EF (કેવી રીતે ?)

તેથી, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (કેમ ?)

એટલે કે, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (કેમ ?)

એ જ રીતે, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ અને તેથી, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

નોંધ : જો કોઈ એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાના ગુણધર્મ પ્રમાણે તેમનો ત્રીજો ખૂણો પણ સમાન થાય. તેથી ખૂખૂખૂ સમરૂપતાની શરતને આમ લખી શકાય.

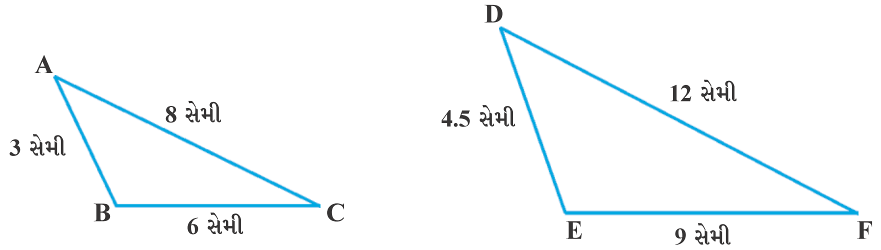
જો કોઈ એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. આ શરતને બે ત્રિકોણો માટેની સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

તમે જોયું હશે કે, જો કોઈ એક ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના ત્રણે ય ખૂણાઓને સમાન હોય, તો તેમની અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય (ગુણોત્તરો સમાન હોય છે.) આના પ્રતીપ વિધાન માટે શું કહી શકાય ? શું પ્રતીપ સાચું છે ?

બીજા શબ્દોમાં, જો કોઈ એક ત્રિકોણની બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બાજુઓને સમપ્રમાણમાં હોય, તો તેના અનુરૂપ ખૂણાઓ પણ એકરૂપ હોય છે તે સાચું છે ?

તે એક પ્રવૃત્તિ દ્વારા જોઈએ.

પ્રવૃત્તિ 5 : બે ત્રિકોણો ABC અને DEF એવાં દોરો કે જેમાં, AB = 3 સેમી, BC = 6 સેમી, CA = 8 સેમી, DE = 4.5 સેમી, EF = 9 સેમી અને FD = 12 સેમી (જુઓ આકૃતિ 6.25.)



આકૃતિ 6.25

તેથી, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ થશે. (દરેક $\frac{2}{3}$ ને સમાન છે.)

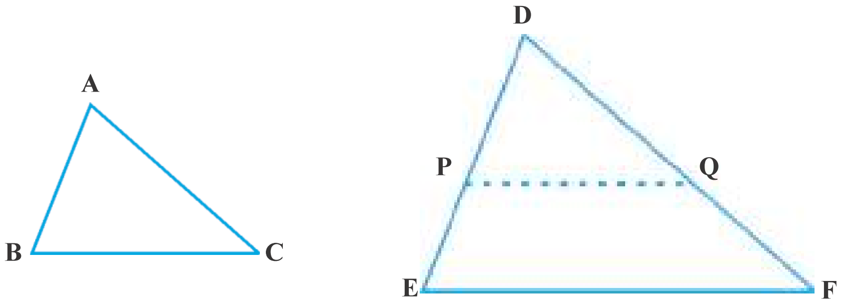
હવે, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ અને $\angle F$ માપો અને તમે જોઈ શકશો કે,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ એટલે કે, બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે.

બીજા આવા કેટલાક ત્રિકોણો (જેની બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય) લઈને આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી જુઓ. દરેક વખતે જોઈ શકાશે તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. તેના પરથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની નીચેની શરત મળે છે.

પ્રમેય 6.4 : જો બે ત્રિકોણોમાં, એક ત્રિકોણની બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓના સમપ્રમાણમાં હોય (એટલે કે, ગુણોત્તરો સમાન હોય), તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને તેથી બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય. આ શરત બે ત્રિકોણો માટે બાબાબા (બાજુ-બાજુ-બાજુ) શરત તરીકે ઓળખાય છે.

આ પ્રમેય બે ત્રિકોણો ABC અને DEF માં $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) (જુઓ આકૃતિ 6.26) લઈને સિદ્ધ કરી શકાય.



આકૃતિ 6.26

DP = AB અને DQ = AC દોરો અને PQ જોડો.

સ્પષ્ટ છે કે, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ અને તેથી, PQ || EF (કેવી રીતે ?)

તેથી, $\angle P = \angle E$ અને $\angle Q = \angle F$

તેથી, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

તેથી, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (કેમ ?)

તેથી, BC = PQ (કેમ ?)

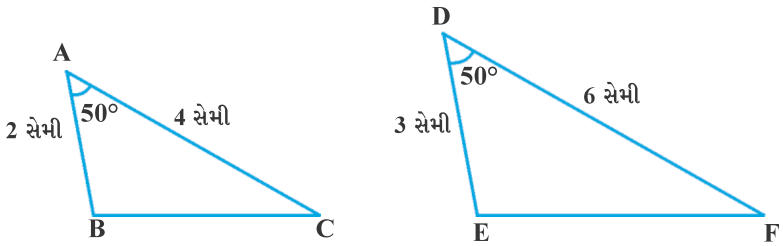
આમ, $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DPQ$ (કેમ ?)

તેથી, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ અને $\angle C = \angle F$ (કેવી રીતે ?)

નોંધ : તમને યાદ હશે કે બે બહુકોણો સમરૂપ છે તે માટે બે શરતો પૈકી કોઈ એક (i) અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન છે. (ii) અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન છે તે પર્યાપ્ત નથી. તેમ છતાં પ્રમેય 6.3 અને 6.4ના આધારે તમે હવે કહી શકશો કે બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા દર્શાવવા માટે બંને શરતો ચકાસવી જરૂરી નથી. તેમાં એક શરત પરથી બીજી શરત સિદ્ધ થાય.

હવે આપણે ધોરણ IX માં જેનો અભ્યાસ કર્યો હતો, બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા વિશેની જુદી-જુદી શરતો યાદ કરીએ. તમે કદાચ બાબાબા સમરૂપતાની બાબાબા એકરૂપતા સાથે સરખામણી કરી હશે. આ પરિણામ આપણને ત્રિકોણોની સમરૂપતાને ત્રિકોણોની એકરૂપતા સાથે સરખાવવા સૂચવે છે. આના માટે એક પ્રવૃત્તિ કરીએ.

પ્રવૃત્તિ 6 : જેમાં, AB = 2 સેમી, $\angle A = 50°$, AC = 4 સેમી, DE = 3 સેમી, $\angle D = 50°$ અને DF = 6 સેમી હોય તેવા બે ત્રિકોણો ABC અને DEF દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.27.)



આકૃતિ 6.27

અહીં, તમે જોયું હશે કે $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (દરેક $\frac{2}{3}$ ને સમાન છે.) અને $\angle A$ (બાજુઓ AB અને ACનો અંતર્ગત ખૂણો છે) = $\angle D$ (બાજુઓ DE અને DFનો અંતર્ગત ખૂણો છે.) એટલે કે, કોઈ એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો

બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન છે અને જે બાજુઓને અંતર્ગત આ ખૂણાઓ છે તેમનો ગુણોત્તર સમાન છે. (એટલે કે તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય.)

હવે, આપણે ∠B, ∠C, ∠E અને ∠F માપીએ, તમે જોશો કે, ∠B = ∠E અને ∠C = ∠F. એટલે કે, ∠A = ∠D, ∠B = ∠E અને ∠C = ∠F. તેથી ખૂખૂખૂ સમરૂપતા પરથી, Δ ABC ~ Δ DEF.

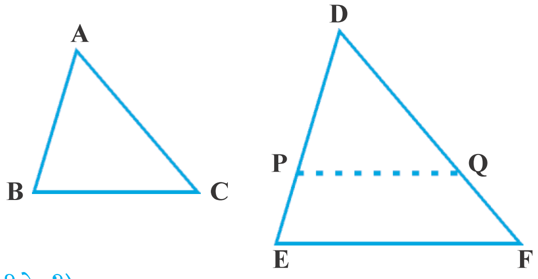
તમે જેમાં કોઈ એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને જે ત્રિકોણની બાજુઓને આપેલા ખૂણા અંતર્ગત હોય તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય એવા બીજા ત્રિકોણો દોરીને પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરી શકો.

દરેક સમયે, તમે જોશો કે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. તેથી બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની નીચેની શરત આ પ્રમાણે મળે છે.

પ્રમેય 6.5 : જો કોઈ ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને આ ખૂણાઓ જે બાજુઓને અંતર્ગત હોય તે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે.

આ શરત બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા માટેના બાખૂબા (બાજુ-ખૂણો-બાજુ) નિયમ તરીકે ઓળખાય છે.

અગાઉની જેમ, આ પ્રમેય બે ત્રિકોણો ABC અને DEF માં $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) અને ∠A = ∠D લઈને સાબિત કરી શકાય. (જુઓ આકૃતિ 6.28.)



આકૃતિ 6.28

DP = AB અને DQ = AC દોરો અને PQ જોડો.

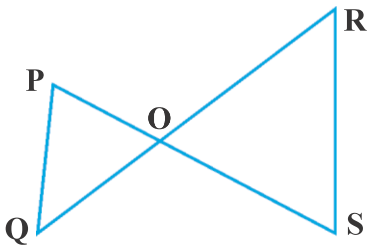
હવે, PQ || EF અને Δ ABC ≅ Δ DPQ (કેવી રીતે ?)

તેથી, ∠A = ∠D, ∠B = ∠P અને ∠C = ∠Q

તેથી, Δ ABC ~ Δ DEF (કેમ ?)

હવે, આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 6.29 માં, જો PQ || RS તો સાબિત કરો કે ΔPOQ ~ ΔSOR



આકૃતિ 6.29

ઉકેલ : PQ || RS

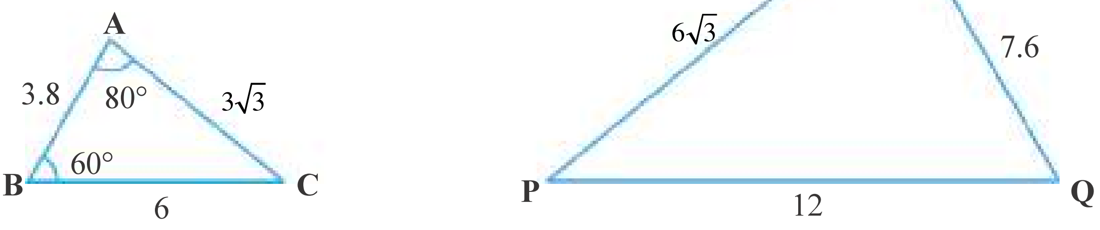
તેથી, ∠P = ∠S (આપેલ છે.)

અને ∠Q = ∠R (યુગ્મકોણો)

તેમજ, $\angle POQ = \angle SOR$ (અભિકોણો)

તેથી, $\Delta\ POQ \sim \Delta\ SOR$ (ખૂખૂખૂ સમરૂપતા)

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 6.30 નું નિરીક્ષણ કરો અને $\angle P$ શોધો.



આકૃતિ 6.30

ઉકેલ : Δ ABC અને Δ PQRમાં,

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2},\ \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},\ \text{અને}\ \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

એટલે કે, $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

તેથી, $\Delta\ ABC \sim \Delta\ RQP$ (બાબાબા સમરૂપતા)

$\therefore\ \angle C = \angle P$ (સમરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

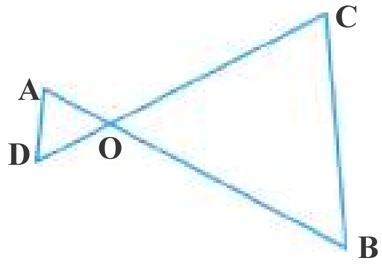
પરંતુ, $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$

$= 180° - 80° - 60°$

$= 40°$

તેથી, $\angle P = 40°$

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 6.31 માં, $OA \cdot OB = OC \cdot OD$, તો સાબિત કરો કે, $\angle A = \angle C$ અને $\angle B = \angle D$



આકૃતિ 6.31

ઉકેલ : $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

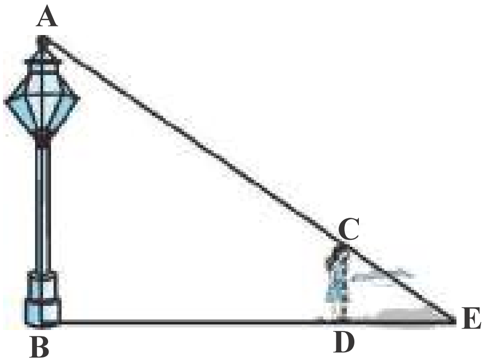
વળી, એ જુઓ, $\angle AOD = \angle COB$ (અભિકોણો) (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી, $\Delta\ AOD \sim \Delta\ COB$ (બાખૂબા સમરૂપતા)

તેથી, $\angle A = \angle C$ અને $\angle D = \angle B$ (સમરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

ઉદાહરણ 7 : 90 સેમી ઊંચાઈવાળી એક છોકરી વીજળીના થાંભલાના તળીયેથી 1.2 મી/સેની ઝડપથી દૂર જઈ રહી છે. જો વીજળીનો ગોળો જમીનના સમતલથી 3.6 મીટર ઊંચે હોય તો ચાર સેકન્ડ પછી તેના પડછાયાની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે AB એ વીજ થાંભલો છે અને CD વીજ થાંભલાથી 4 સેકન્ડ ચાલ્યા પછીની પરિસ્થિતિમાં છોકરીનું સ્થાન દર્શાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.32.)



આકૃતિ 6.32

આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય કે DE છોકરીનો પડછાયો છે. ધારો કે, DE એ x મીટર છે.

હવે, BD = $1.2 \times 4 = 4.8$ મીટર

જુઓ કે, Δ ABE અને Δ CDE માં,

$\angle B = \angle D$ (દરેક 90° નો છે. કારણ કે લાઈટનો થાંભલો અને છોકરી જમીન પર શિરોલંબ છે.)

અને $\angle E = \angle E$ (એક જ ખૂણો)

તેથી, $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (ખૂખૂ સમરૂપતા)

તેથી, $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

એટલે કે, $\frac{4.8+x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ (90 સેમી = $\frac{90}{100}$ મી = 0.9 મી)

એટલે કે, $4.8 + x = 4x$

એટલે કે, $3x = 4.8$

એટલે કે, $x = 1.6$

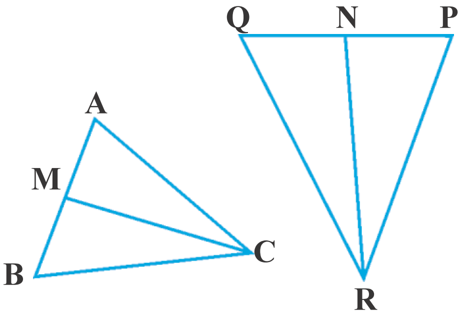
તેથી 4 સેકન્ડ ચાલ્યા પછી છોકરીનો પડછાયો 1.6 મીટર લાંબો હોય.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 6.33માં, CM અને RN અનુક્રમે Δ ABC અને Δ PQR ની મધ્યગાઓ છે. જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



આકૃતિ 6.33

ઉકેલ : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

તેથી, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

અને $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ અને $\angle C = \angle R$ (2)

પરંતુ, $AB = 2\ AM$ અને $PQ = 2PN$

(કેમ કે, CM અને RN મધ્યગાઓ છે.)

તેથી, (1) પરથી, $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

એટલે કે, $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

પરંતુ, $\angle MAC = \angle NPR$ [(2) પરથી] (4)

તેથી, (3) અને (4) પરથી,

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (બાજુબા સમરૂપતા) (5)

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ [(5) પરથી] (6)

પરંતુ, $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [(1) પરથી] (7)

તેથી, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [(6) અને (7) પરથી] (8)

(iii) ફરીથી, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) પરથી]

તેથી, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [(8) પરથી] (9)

પરંતુ, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2BM}{2QN}$

એટલે કે, $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

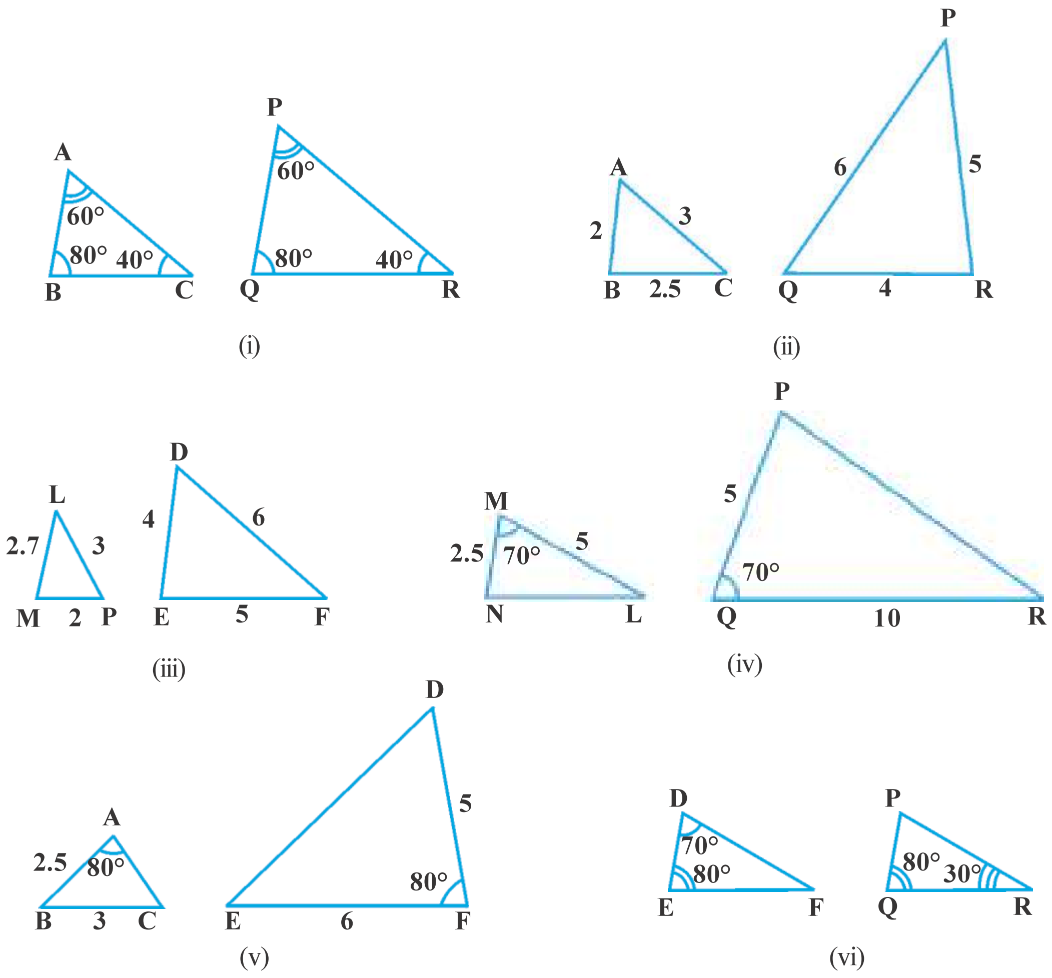
એટલે કે, $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) અને (10) પરથી]

તેથી, $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (બાબાબા સમરૂપતા)

[**નોંધ :** ભાગ (i) સાબિત કરવા પૈકી ઉપયોગમાં લીધેલ રીતનો ઉપયોગ કરીને પણ ભાગ (iii) સાબિત કરી શકાય.]

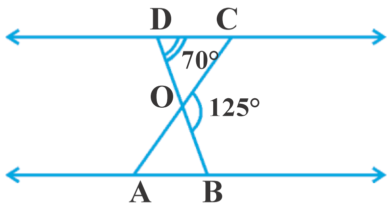
સ્વાધ્યાય 6.3

1. આકૃતિ 6.34 માં આપેલ ત્રિકોણો પૈકી કઈ જોડીના ત્રિકોણો સમરૂપ છે તે જણાવો. પ્રશ્નનો જવાબ આપવા કઈ સમરૂપતાની શરતનો ઉપયોગ કર્યો તે લખો. અને સમરૂપ ત્રિકોણની જોડીઓને સંકેતમાં લખો :



આકૃતિ 6.34

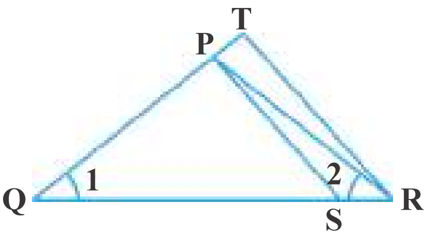
2. આકૃતિ 6.35માં, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ અને $\angle CDO = 70°$ હોય, તો $\angle DOC$, $\angle DCO$ અને $\angle OAB$ શોધો.



આકૃતિ 6.35

3. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં $AB \parallel DC$ છે. વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. હવે ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

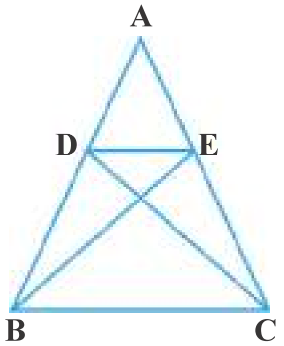
4. આકૃતિ 6.36 માં, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ અને $\angle 1 = \angle 2$. સાબિત કરો કે $\Delta PQS \sim \Delta TQR$.



આકૃતિ 6.36

5. Δ PQR ની બાજુઓ PR અને QR પર બિંદુઓ S અને T એવાં છે કે, જેથી, $\angle P = \angle RTS$. સાબિત કરો કે, $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

6. આકૃતિ 6.37 માં, જો $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



આકૃતિ 6.37

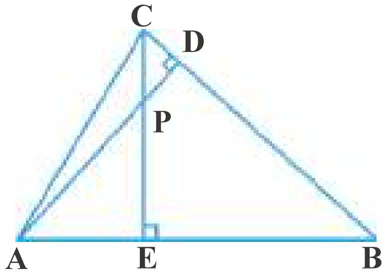
7. આકૃતિ 6.38 માં, Δ ABC ના વેધ AD અને CE એકબીજાને P બિંદુ માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$



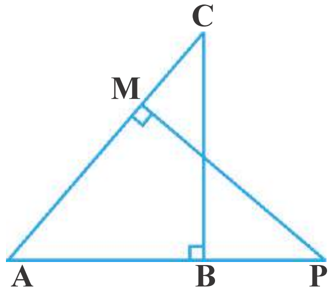
આકૃતિ 6.38

8. બિંદુ E એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની લંબાવેલ બાજુ AD પરનું બિંદુ છે. BE એ CD ને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

9. આકૃતિ 6.39 માં, ત્રિકોણ ABC અને AMP કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને તેમાં ખૂણા B અને M કાટખૂણા છે. સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



આકૃતિ 6.39

10. D અને H એ Δ ABC અને Δ EFG ની અનુક્રમે બાજુઓ AB અને FE પર આવેલાં હોય તેવી રીતે CD અને GH અનુક્રમે $\angle ACB$ અને $\angle EGF$ ના દ્વિભાજક છે. જો $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

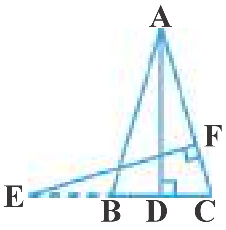
(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

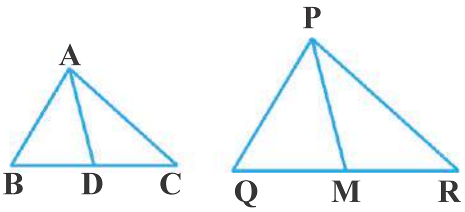
11. આકૃતિ 6.40 માં E એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC ની લંબાવેલ બાજુ CB પર આવેલ બિંદુ છે તથા AB = AC. જો $AD \perp BC$ અને $EF \perp AC$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

$\Delta ABD \sim \Delta ECF$.



આકૃતિ 6.40

12. Δ ABC ની બાજુઓ AB અને BC તથા મધ્યગા AD અનુક્રમે Δ PQRની બાજુઓ PQ અને QR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે (જુઓ, આકૃતિ 6.41) સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



આકૃતિ 6.41

13. બિંદુ D એ Δ ABC ની બાજુ BC પરનું એવું બિંદુ છે કે, $\angle ADC = \angle BAC$. સાબિત કરો કે $CA^2 = CB \cdot CD$

14. Δ ABC ની બાજુઓ AB અને AC તથા મધ્યગા AD એ અનુક્રમે Δ PQRની બાજુઓ PQ અને QR તથા મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે. સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

15. એક 6 મીટર ઊંચા શિરોલંબ વાંસનો જમીન પર પડતો પડછાયો 4 મીટર લાંબો છે. એ જ વખતે એક મિનારાનો પડછાયો 28 મીટર લાંબો છે. મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.

16. જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ તથા AD અને PM અનુક્રમે Δ ABC અને Δ PQR ની મધ્યગા હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

6.5 સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ

તમે જાણો છો કે, બે સમરૂપ ત્રિકોણોની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય છે. તેમનાં ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તર અને અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર વચ્ચેના સંબંધ વિશે તમે શું કલ્પના કરી શકો છો ? તમે જાણો છે કે, ક્ષેત્રફળ ચોરસ એકમમાં માપવામાં આવે છે. તેથી, તમે કદાચ એવી કલ્પના કરી હશે કે, આ ગુણોત્તર અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હશે. આ ખરેખર સત્ય છે અને તે હવે આપણે પછીના પ્રમેયમાં સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 6.6 : ***બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હોય છે.***

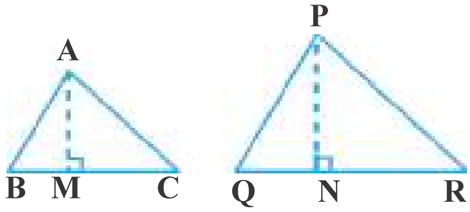
સાબિતી : અહીં બે ત્રિકોણો Δ ABC અને Δ PQR આપ્યા છે અને $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (જુઓ આકૃતિ 6.42.)

અહીં એ સાબિત કરવું છે કે, $\frac{ABC}{PQR} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$

બે ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, ત્રિકોણોના વેધ AM અને PN દોરો.

હવે, $ABC = \frac{1}{2}\ BC \times AM$

અને $PQR = \frac{1}{2}\ QR \times PN$



આકૃતિ 6.42

તેથી, $\frac{ABC}{PQR} = \frac{\frac{1}{2}BC \times AM}{\frac{1}{2}QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN}$ (1)

હવે, Δ ABM અને Δ PQN માં,

$\angle B = \angle Q$ (કારણ કે $\Delta ABC \sim \Delta PQR$)

અને $\angle M = \angle N$ (કાટખૂણા છે.)

તેથી, $\Delta ABM \sim \Delta PQN$ (ખૂખૂ સમરૂપતા)

તેથી, $\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ}$ (2)

વળી, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (3)

તેથી, $\frac{ABC}{PQR} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AM}{PN}$ [(1) અને (3) પરથી]

$= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ}$ [(2) પરથી]

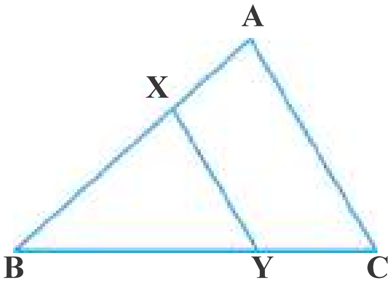
$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$

હવે, (3) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{ABC}{PQR} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$ ■

જેમાં આ પ્રમેયનો ઉપયોગ થાય તેવાં ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 9 : આકૃતિ 6.43 માં રેખાખંડ XY એ ΔABC ની બાજુ AC ને સમાંતર છે અને તે ત્રિકોણનું સમાન ક્ષેત્રફળના ભાગોમાં વિભાજન કરે છે. ગુણોત્તર $\frac{AX}{AB}$ શોધો.



આકૃતિ 6.43

ઉકેલ : અહીં $XY \parallel AC$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\angle BXY = \angle A$ અને $\angle BYX = \angle C$ (અનુકોણો)

તેથી, $\Delta ABC \sim \Delta XBY$ (ખૂખૂ સમરૂપતા)

તેથી, $\frac{ABC}{XBY} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2$ (પ્રમેય 6.6) (1)

વળી, $ABC = 2XBY$ (આપેલ છે.)

તેથી, $\frac{ABC}{XBY} = \frac{2}{1}$ (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1}, \text{ એટલે કે, } \frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

અથવા $\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

અથવા $1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

અથવા $\frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

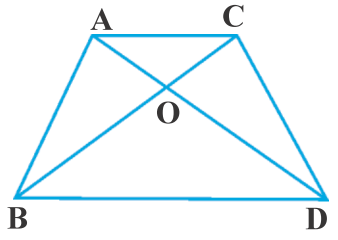
એટલે કે, $\frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

સ્વાધ્યાય 6.4

1. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ છે. તેમનાં ક્ષેત્રફળો અનુક્રમે 64 સેમી^{2} અને 121 સેમી^{2} છે. જો EF = 15.4 સેમી હોય, તો BC શોધો.

2. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || CD છે. તેના વિકર્ણો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. જો AB = 2CD હોય, તો Δ AOB અને Δ COD નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

3. આકૃતિ 6.44માં, ABC અને DBC એક જ પાયા BC પરના બે ત્રિકોણો છે. જો AD એ BC ને O માં છેદે, તો સાબિત કરો કે $\frac{ABC}{DBC} = \frac{AO}{DO}$.



આકૃતિ 6.44

4. જો બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળો સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે એકરૂપ છે.

5. D, E અને F અનુક્રમે Δ ABC ની બાજુઓ AB, BC અને CA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. Δ DEF અને Δ ABC નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

6. સાબિત કરો કે, બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ મધ્યગાના ગુણોત્તરના વર્ગ બરાબર હોય છે.

7. સાબિત કરો કે, ચોરસની કોઈ એક બાજુ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, તે ચોરસના વિકર્ણ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળથી અડધું હોય છે.

સાચા જવાબ પર (✓) નિશાની કરો અને ચકાસણી કરો.

8. જેમાં D એ BC નું મધ્યબિંદુ છે, એવા બે સમબાજુ ત્રિકોણો ABC અને BDE છે. ત્રિકોણો ABC અને BDE નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

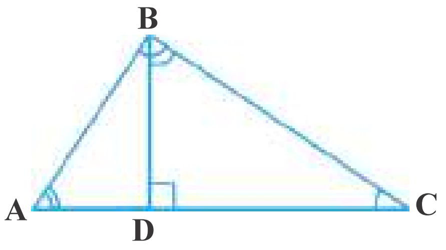
   (A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4

9. બે સમરૂપ ત્રિકોણોની બાજુઓનો ગુણોત્તર 4:9 છે. આ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

   (A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6 પાયથાગોરસ પ્રમેય

તમે અગાઉના ધોરણથી પાયથાગોરસ પ્રમેયથી પરિચિત છો. તમે કેટલીક પ્રવૃત્તિઓથી આ પ્રમેયને ચકાસ્યો છે અને કેટલાક પ્રશ્નો ઉકેલવા તેનો ઉપયોગ કર્યો છે. તમે ધોરણ IX માં આ પ્રમેયની સાબિતી જોઈ ગયાં છો. હવે આપણે આ પ્રમેયને બે ત્રિકોણોની સમરૂપતાની સંકલ્પનાના ઉપયોગથી સાબિત કરીશું. આ સાબિત કરવા માટે કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પર તેની સામેના શિરોબિંદુથી રચાતા વેધથી બનતા બે ત્રિકોણોની સમરૂપતા પર આધારિત પરિણામનો ઉપયોગ કરીશું.



આકૃતિ 6.45

હવે, કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લઈએ. તેમાં ખૂણો B કાટખૂણો છે. BD એ કર્ણ AC પરનો વેધ છે. (જુઓ, આકૃતિ 6.45.)

Δ ADB અને Δ ABC માં તમે જોઈ શકશો

$\angle A = \angle A$

અને $\angle ADB = \angle ABC$ (કેમ ?)

તેથી, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (કેમ ?) (1)

એ જ રીતે, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (કેવી રીતે ?) (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી, વેધ BD ની બંને બાજુ પરના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ છે.

તેથી $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ અને $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

હોવાથી, $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (વિભાગ 6.2ની નોંધ પરથી)

ઉપરની ચર્ચા પરથી નીચેનો પ્રમેય મળે છે :

પાયથાગોરસ
(B.C.E.569 - B.C.E.479)

પ્રમેય 6.7 : જો કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણો બનાવતા શિરોબિંદુથી કર્ણ પર વેધ દોરેલ હોય, તો વેધની બંને તરફના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને સમરૂપ હોય છે અને એકબીજાને સમરૂપ હોય છે.

હવે પાયથાગોરસનો પ્રમેય સાબિત કરવા આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

પ્રમેય 6.8 : કાટકોણ ત્રિકોણમાં, કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

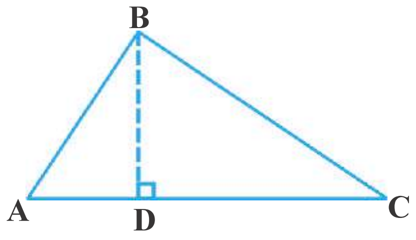
સાબિતી : Δ ABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે એમ આપ્યું છે.

એ સાબિત કરવું છે કે, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

અહીં, $BD \perp AC$ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 6.46.)

હવે, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (બાજુઓ સમપ્રમાણમાં છે.)



આકૃતિ 6.46

અથવા, $AD \cdot AC = AB^2$ (1)

તેમજ $\Delta\, BDC \sim \Delta\, ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$

અથવા $CD \cdot AC = BC^2$ (2)

(1) અને (2) નો સરવાળો લેતાં,

$AD \cdot AC + CD \cdot AC = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC \cdot AC = AB^2 + BC^2$

અથવા $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ■

ઉપરનું પ્રમેય અગાઉ પ્રાચીન ***ભારતીય ગણિતજ્ઞ બોધાયને*** (લગભગ B.C.E. 800) નીચેના સ્વરૂપમાં આપ્યું હતું.

લંબચોરસના વિકર્ણથી બનતા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ અને તેની બાજુઓથી બનતા (જેમ કે, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ) ચોરસોના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો સમાન હોય છે.

આ કારણે, આ પ્રમેયને કેટલીક વાર ***બોધાયન પ્રમેય*** તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

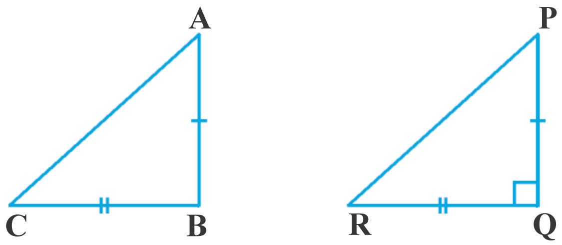
પાયથાગોરસના પ્રતીપ વિશે શું કહી શકો ? તમે અગાઉના ધોરણમાં ચકાસ્યું છે કે, તે સત્ય છે. તેને પ્રમેયના સ્વરૂપમાં સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 6.9 : ***ત્રિકોણમાં જો કોઈ એક બાજુનો વર્ગ, બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા બરાબર હોય તો, પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય.***

સાબિતિ : અહીં, ત્રિકોણ ABC માં, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ આપેલ છે.

એ સાબિત કરવું છે કે, $\angle B = 90°$

સાબિત કરવા, જેમાં એક ખૂણો Q કાટખૂણો હોય તેવો $\Delta\, PQR$ એવો રચીએ કે જેથી, $PQ = AB$ અને $QR = BC$. (જુઓ આકૃતિ 6.47.)



આકૃતિ 6.47

હવે, Δ PQR પરથી,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય, જેમાં $\angle Q = 90°$)

અથવા $PR^2 = AB^2 + BC^2$ (રચના પરથી) (1)

પરંતુ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (આપેલ છે.) (2)

તેથી, $AC = PR$ [(1) અને (2) પરથી] (3)

હવે, Δ ABC અને Δ PQR માં,

$AB = PQ$ (રચના પરથી)

$BC = QR$ (રચના પરથી)

$AC = PR$ (ઉપર (3)માં સાબિત કર્યું.)

તેથી, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (બાબાબા એકરૂપતા)

તેથી, $\angle B = \angle Q$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો)

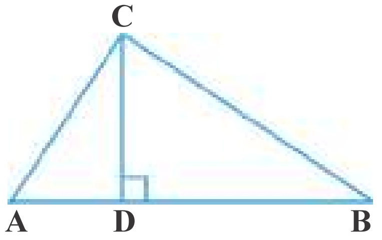
પરંતુ, $\angle Q = 90°$ (રચના પરથી)

તેથી, $\angle B = 90°$ ■

નોંધ : આ પ્રમેયની બીજી સાબિતી માટે પરિશિષ્ટ 1 પણ જુઓ.

હવે આપણે આ પ્રમેયનો ઉપયોગ સમજવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : આકૃતિ 6.48 માં, $\angle ACB = 90°$ અને $CD \perp AB$. સાબિત કરો કે, $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$.



આકૃતિ 6.48

ઉકેલ : $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

અથવા $AC^2 = AB \cdot AD$ (1)

એ જ રીતે, $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (પ્રમેય 6.7)

તેથી, $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$

અથવા $BC^2 = BA \cdot BD$ (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$

ઉદાહરણ 11 : એક નિસરણી દીવાલને અઢેલીને એવી રીતે ગોઠવી છે કે જેથી તેનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 2.5 મીટર દૂર રહે અને તેનો ઉપરનો છેડો જમીનથી 6 મીટર ઊંચે એક બારીને અડકે. નિસરણીની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, AB નિસરણી છે અને CA દિવાલ છે. અને A બારી છે. (જુઓ આકૃતિ 6.49.)

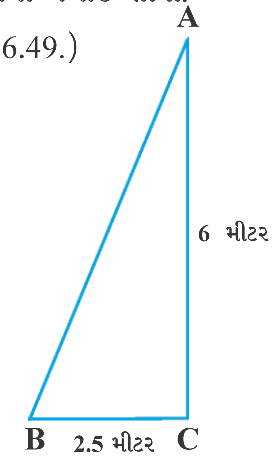
$$BC = 2.5 \text{ મીટર અને } CA = 6 \text{ મીટર}$$

પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$= (2.5)^2 + (6)^2$$
$$= 42.25$$

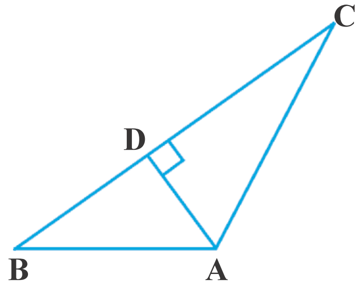
તેથી, $AB = 6.5$

આમ, નિસરણીની લંબાઈ 6.5 મી છે.



આકૃતિ 6.49

ઉદાહરણ 12 : આકૃતિ 6.50 માં, જો $AD \perp BC$ તો સાબિત કરો કે, $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



આકૃતિ 6.50

ઉકેલ : Δ ADC પરથી,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય) (1)

Δ ADB પરથી,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય) (2)

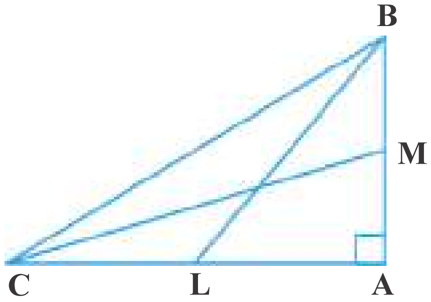
(2) માંથી (1) બાદ કરતાં,

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

અથવા $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

ઉદાહરણ 13 : ખૂણો A કાટખૂણો હોય તેવા ત્રિકોણ ABC માં BL અને CM મધ્યગાઓ છે. સાબિત કરો કે, $4 (BL^2 + CM^2) = 5BC^2$

ઉકેલ : BL અને CM એ ΔABC ની મધ્યગાઓ છે તથા $\angle A = 90°$ (જુઓ આકૃતિ 6.51.)



આકૃતિ 6.51

Δ ABC પરથી,

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય)

Δ ABL પરથી,

$BL^2 = AL^2 + AB^2$ (પાયથાગોરસ પ્રમેય)

અથવા $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ (L એ AC નું મધ્યબિંદુ છે.)

અથવા $BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

અથવા $4\,BL^2 = AC^2 + 4\,AB^2$ (2)

Δ CMA પરથી

$CM^2 = AC^2 + AM^2$

અથવા $CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ (M એ ABનું મધ્યબિંદુ છે.)

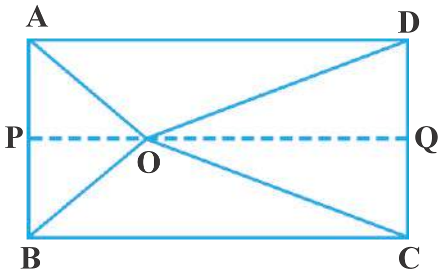
અથવા $CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$

અથવા $4\,CM^2 = 4\,AC^2 + AB^2$ (3)

(2) અને (3)નો સરવાળો લેતાં, $4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,(AC^2 + AB^2)$

$4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$ [(1) પરથી]

ઉદાહરણ 14 : O એ લંબચોરસ ABCD ના અંદરના ભાગનું કોઈ બિંદુ હોય (જુઓ, આકૃતિ 6.52), તો સાબિત કરો કે, $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$



આકૃતિ 6.52

ઉકેલ : P એ AB પર અને Q એ DC પર આવે તે રીતે O માંથી PQ || BC દોરો.

હવે, PQ || BC

તેથી, PQ ⊥ AB અને PQ ⊥ DC ($\angle B = 90°$ અને $\angle C = 90°$)

તેથી, $\angle BPQ = 90°$ અને $\angle CQP = 90°$

તેથી, BPQC અને APQD બંને લંબચોરસો છે.

હવે, Δ OPB પરથી,

$OB^2 = BP^2 + OP^2$ (1)

એ જ રીતે, Δ OQD પરથી,

$OD^2 = OQ^2 + DQ^2$ (2)

Δ OQC પરથી,

$OC^2 = OQ^2 + CQ^2$ (3)

અને Δ OAP પરથી,

$OA^2 = AP^2 + OP^2$ (4)

(1) અને (2) નો સરવાળો લેતાં,

$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$

$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2$ (કારણ કે, BP = CQ અને DQ = AP)

$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$

$= OC^2 + OA^2$ [(3) અને (4) પરથી]

સ્વાધ્યાય 6.5

1. નીચે ત્રિકોણની બાજુઓ આપેલી છે. તે પૈકી કયા ત્રિકોણો કાટકોણ ત્રિકોણો છે તે નક્કી કરો. જે કાટકોણ ત્રિકોણ હોય, તેના કર્ણની લંબાઈ શોધો.

(i) 7 સેમી, 24 સેમી, 25 સેમી

(ii) 3 સેમી, 8 સેમી, 6 સેમી

(iii) 50 સેમી, 80 સેમી, 100 સેમી

(iv) 13 સેમી, 12 સેમી, 5 સેમી

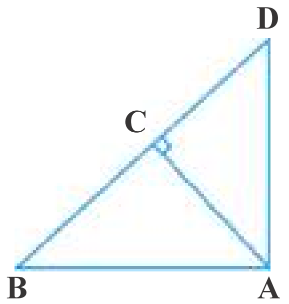
2. ત્રિકોણ PQR માં $\angle P$ કાટખૂણો છે અને M એ QR પરનું એવું બિંદુ છે કે જેથી $PM \perp QR$. સાબિત કરો કે $PM^2 = QM \cdot MR$

3. આકૃતિ 6.53 માં, ત્રિકોણ ABD માં $\angle A$ કાટખૂણો છે અને $AC \perp BD$. સાબિત કરો કે

(i) $AB^2 = BC \cdot BD$

(ii) $AC^2 = BC \cdot DC$

(iii) $AD^2 = BD \cdot CD$



આકૃતિ 6.53

4. સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે. સાબિત કરો કે $AB^2 = 2AC^2$

5. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC માં AC = BC. જો $AB^2 = 2AC^2$ હોય, તો સાબિત કરો કે, ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

6. સમબાજુ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ $2a$ છે. તેના દરેક વેધ શોધો.

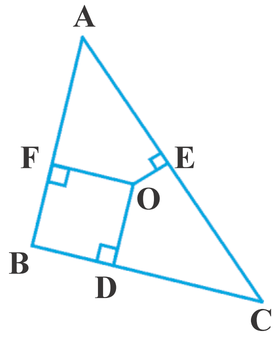
7. સાબિત કરો કે, સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓના વર્ગોનો સરવાળો તેના વિકર્ણોના વર્ગોના સરવાળા જેટલો થાય છે.

8. આકૃતિ 6.54 માં, O ત્રિકોણ ABC ની અંદરનું બિંદુ છે. $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ અને $OF \perp AB$

સાબિત કરો કે,

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$,

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$.



આકૃતિ 6.54

9. 10 મીટર લાંબી એક નિસરણી જમીનથી 8 મીટર ઊંચે આવેલી એક બારીને અડકે છે. નિસરણીના નીચેના છેડાનું દીવાલના તળિયેથી અંતર શોધો.

10. 18 મીટર ઊંચા શિરોલંબ થાંભલાના ઉપરના છેડાથી 24 મીટર લાંબા તારનો એક છેડો જોડાયેલો છે. તે તારનો બીજો છેડો એક ખીલા સાથે જોડાયેલો છે. થાંભલાના આધારથી કેટલા અંતરે ખીલો લગાડવામાં આવે તો તાર તંગ રહે ?

11. એક વિમાન એક વિમાન મથકની ઉત્તર દિશામાં 1000 કિમી/કલાકની ઝડપથી ઊડે છે. એ જ સમયે, બીજું એક વિમાન એ જ વિમાનમથકની પશ્ચિમ દિશામાં 1200 કિમી/કલાકની ઝડપે ઊડે છે. $1\frac{1}{2}$ કલાક પછી આ વિમાનો એકબીજાથી કેટલા દૂર હશે ?

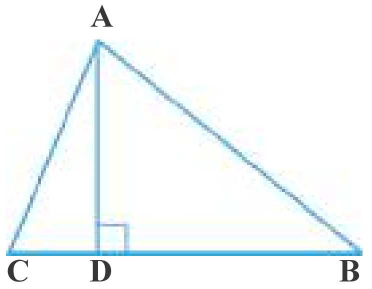
12. 6 મીટર અને 11 મીટર ઊંચાઈના બે થાંભલા સમતલ જમીન પર આવેલા છે. જો થાંભલાના નીચેના છેડા વચ્ચેનું અંતર 12 મીટર હોય તો તેમના ઉપરના છેડા વચ્ચેનું અંતર શોધો.

13. ABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે અને D અને E અનુક્રમે તેની બાજુઓ CA અને CB પરનાં બિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે,

$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

14. A માંથી ΔABC ની બાજુ BC પર દોરેલો લંબ BC ને D માં એવી રીતે છેદે છે કે DB = 3CD (જુઓ આકૃતિ 6.55.) સાબિત કરો કે,

$2\ AB^2 = 2\ AC^2 + BC^2$



આકૃતિ 6.55

15. સમબાજુ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC પર D એવું બિંદુ છે કે જેથી, $BD = \frac{1}{3} BC$. સાબિત કરો કે, $9\ AD^2 = 7\ AB^2$

16. સમબાજુ ત્રિકોણમાં સાબિત કરો કે, કોઈ પણ બાજુના વર્ગના 3 ગણા એ તેના કોઈ પણ વેધના વર્ગના 4 ગણા બરાબર છે.

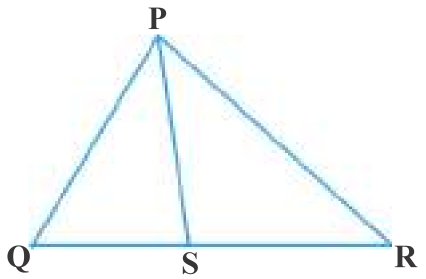
17. સાચા જવાબ પર (✓) નિશાની કરો અને ચકાસો.

ΔABC માં, $AB = 6\sqrt{3}$ સેમી, AC = 12 સેમી અને BC = 6 સેમી હોય, તો ખૂણો B .... :

(A) 120° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

સ્વાધ્યાય 6.6 (વૈકલ્પિક)*

1. આકૃતિ 6.56 માં, PS એ ΔPQR ના $\angle QPR$ નો દ્વિભાજક છે. સાબિત કરો કે $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$.

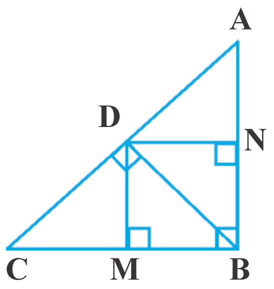


આકૃતિ 6.56

2. આકૃતિ 6.57 માં, ΔABC માં $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ અને $DN \perp AB$ થાય તેવું બિંદુ D કર્ણ AC પર છે, સાબિત કરો કે,

(i) $DM^2 = DN \cdot MC$

(ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

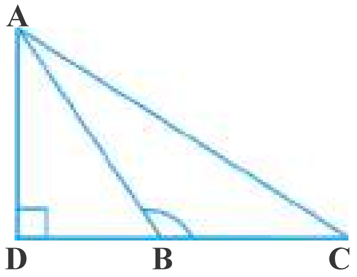


આકૃતિ 6.57

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના દૃષ્ટિકોણથી નથી.

3. આકૃતિ 6.58માં, ત્રિકોણ ABC માં, $\angle ABC > 90°$ અને AD ⊥ લંબાવેલ CB, સાબિત કરો કે.

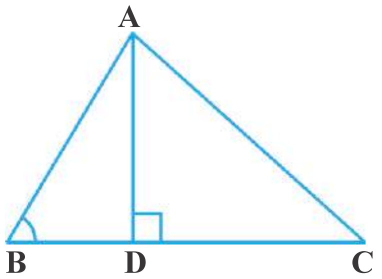
$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$



આકૃતિ 6.58

4. આકૃતિ 6.59માં, ત્રિકોણ ABC માં, $\angle ABC < 90°$ અને AD ⊥ BC છે. સાબિત કરો કે,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\, BC \cdot BD$



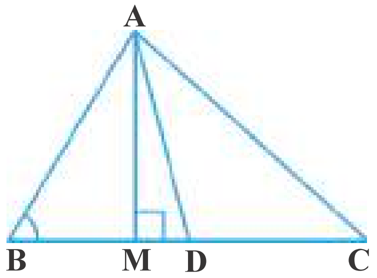
આકૃતિ 6.59

5. આકૃતિ 6.60 માં, AD એ ત્રિકોણ ABC ની મધ્યગા છે અને AM ⊥ BC. સાબિત કરો કે,

(i) $AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2\, AD^2 + \frac{1}{2}\, BC^2$



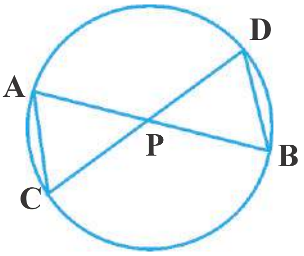
આકૃતિ 6.60

6. સાબિત કરો કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના વર્ગોનો સરવાળો તેની બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

7. આકૃતિ 6.61માં, બે જીવાઓ AB અને CD એકબીજાને બિંદુ P માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

(i) Δ APC ~ Δ DPB

(ii) $AP \cdot PB = CP \cdot DP$

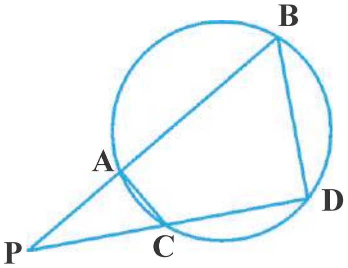


આકૃતિ 6.61

8. આકૃતિ 6.62માં, એક વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD (લંબાવીએ તો) વર્તુળના બહારના ભાગમાં એકબીજાને P માં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

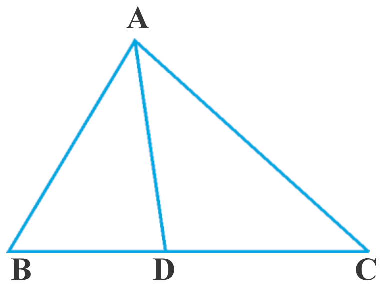
(i) Δ PAC ~ Δ PDB

(ii) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



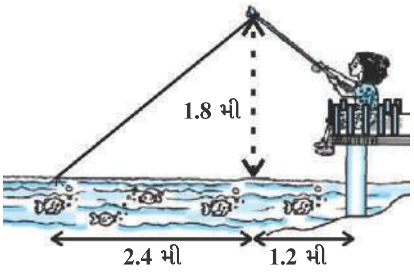
આકૃતિ 6.62

9. આકૃતિ 6.63માં, D એ ત્રિકોણ ABC ની બાજુ BC પરનું એવું બિંદુ છે કે જેથી $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. સાબિત કરો કે AD એ ∠BAC નો દ્વિભાજક છે.



આકૃતિ 6.63

10. નાઝીમા પાણીના પ્રવાહમાં માછલીઓ પકડી રહી છે. તેનો માછલી પકડવાના સળિયાનો હૂક પાણીની સપાટીથી 1.8 મીટર ઊંચે છે અને દોરીના નીચેના છેડા પરનો આંકડો પાણીની સપાટી પર એવી રીતે સ્થિર છે કે, નાઝીમાથી તેનું અંતર 3.6 મીટર છે અને સળિયાના હુકની નીચેની પાણીની સપાટીથી તેનું અંતર 2.4 મીટર છે. એવું માની લઈએ કે, (સળિયાના હૂકથી આંકડા સુધી) તેની દોરી તંગ છે તો, તેણે કેટલી દોરી બહાર કાઢી છે ? (આકૃતિ 6.64 જુઓ.) જો તે દોરીને 5 સેમી/સે ના દરથી અંદર ખેંચે, તો 12 સેકન્ડ પછી નાઝીમાનું આંકડાથી સમક્ષિતિજ અંતર કેટલું હશે ?



આકૃતિ 6.64

6.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે :

1. સમાન આકાર ધરાવતી પરંતુ જેના માટે સમાન કદ હોય તે જરૂરી નથી તેવી બે આકૃતિઓને સમરૂપ આકૃતિઓ કહે છે.
2. બધી એકરૂપ આકૃતિઓ સમરૂપ છે પરંતુ પ્રતીપ સાચું નથી.
3. જો (i) કોઈ બહુકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને (ii) તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તર સમાન હોય, (એટલે કે, સમપ્રમાણમાં હોય) તો સમાન સંખ્યામાં બાજુઓવાળા બે બહુકોણો સમરૂપ છે.
4. જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા, બાકીની બે બાજુઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન થાય છે.
5. જો કોઈ રેખા ત્રિકોણની બે બાજુઓનું સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તો તે રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય.
6. જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરો સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ હોય (ખૂખૂખૂ-સમરૂપતા).
7. જો બે ત્રિકોણોમાં, એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે (ખૂખૂ સમરૂપતા).
8. જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોય, તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય અને તેથી ત્રિકોણો સમરૂપ છે, (બાબાબા સમરૂપતા).

9. જો કોઈ ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના એક ખૂણાને સમાન હોય અને આ ખૂણાઓ જે બાજુઓને અંતર્ગત હોય તે સમપ્રમાણમાં હોય, તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે (બાખૂબા સમરૂપતા)

10. બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરના વર્ગ જેટલો હોય છે.

11. જો કાટકોણ ત્રિકોણના કાટખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર વેધ દોરવામાં આવે, તો વેધની બંને તરફના ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને તેમજ એકબીજાને સમરૂપ હોય છે.

12. કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે (પાયથાગોરસ પ્રમેય).

13. જો ત્રિકોણમાં કોઈ એક બાજુનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય.

વાચકને નોંધ

જો બે કાટકોણ ત્રિકોણોમાં, કોઈ એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને કોઈ એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને કોઈ એક બાજુને સમપ્રમાણમાં હોય તો બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે. આને કાકબા સમરૂપતા તરીકે ઓળખી શકીએ. તમે પ્રકરણ 8ના ઉદાહરણ 2 માં આ સમરૂપતાનો ઉપયોગ કર્યો હોત, તો સાબિતી સરળ બની હોત.