



V3H9G7

ત्रिकोणमितિના ઉપયોગો

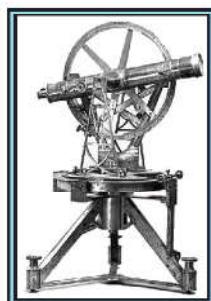
9

9.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળના પ્રકરણમાં તમે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો વિશે અભ્યાસ કર્યો. તમે તમારી આસપાસના વ્યવહારમાં ત્રિકોણમિતિ કેવી રીતે ઉપયોગી બને છે તેનો આ પ્રકરણમાં અભ્યાસ કરશો. જેનો અભ્યાસ સમગ્ર વિશ્વના વિદ્વાનો દ્વારા કરવામાં આવ્યો હોય તેવા અત્યંત પ્રાચીન વિષયોમાંનો એક વિષય ત્રિકોણમિતિ છે. પ્રકરણ VIII માં આપણે ચર્ચા કરી ચૂક્યાં છીએ કે, ત્રિકોણમિતિની શોધ તેની ખગોળશાસ્ત્રમાં ઊભી થતી આવશ્યકતાને ધ્યાનમાં રાખીને કરવામાં આવી. ત્યારથી આજ સુધી ખગોળશાસ્ત્રીઓ તેનો ઉપયોગ પૃથ્વીથી ગ્રહોનું તેમજ તારાઓનું અંતર શોધવામાં કરતા આવ્યા છે. ત્રિકોણમિતિ ભૂગોળ તથા નૌકાયનમાં પણ ઉપયોગી છે. ત્રિકોણમિતીય જ્ઞાનનો ઉપયોગ ભૌગોલિક નકશા બનાવવા તથા રેખાંશ અને અક્ષાંશને સાપેક્ષ કોઈ એક દીપની સ્થિતિ જાણવા કરવામાં આવે છે.

Surveyors have used trigonometry for centuries.

One such large surveying project of the nineteenth century was the '**Great Trigonometric Survey**' of British India for which the two largest-ever theodolites were built. During the survey in 1852, the highest mountain in the world was discovered. From a distance of over 160 km, the peak was observed from six different stations. In 1856, this peak was named after **Sir George Everest**, who had commissioned and first used the giant theodolites (see the figure alongside). The theodolites are now on display in the **Museum of the Survey of India in Dehradun**.



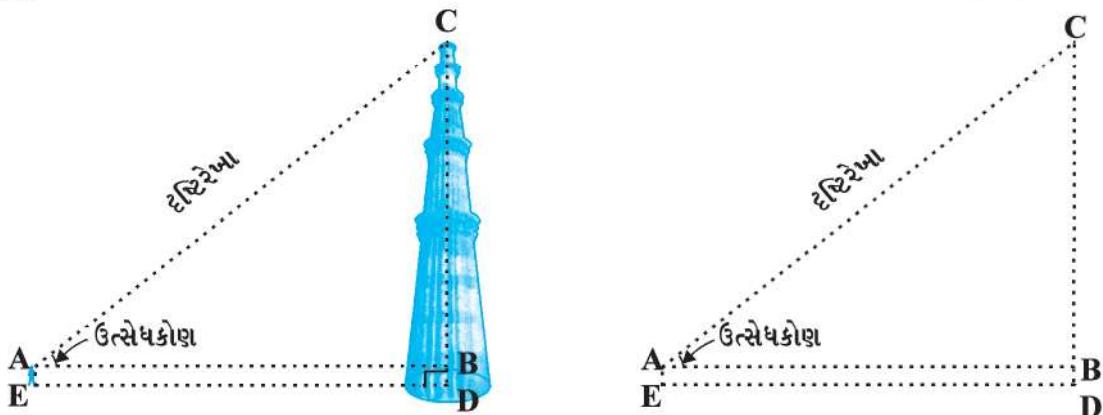
A Theodolite

(Surveying instrument, which is based on the Principles of trigonometry, is used for measuring angles with a rotating telescope)

આપણે આ પ્રકરણમાં પ્રત્યક્ષ માપન વિના વિભિન્ન વસ્તુઓની ઊંચાઈ તથા તેમની વચ્ચેના અંતર કેવી રીતે શોધી શકાય તેની ચર્ચા કરીશું.

9.2 ઊંચાઈ અને અંતર

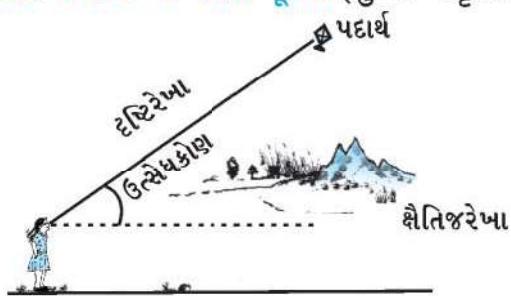
ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.1 તરીકે પુનઃ દર્શાવેલ આગળના પ્રકરણની આકૃતિ 8.1 ની ચર્ચા કરીએ.



આકૃતિ 9.1

આ આકૃતિમાં, વિદ્યાર્થીની આંખથી મિનારાની ટોચ સુધી લંબાવેલ રેખા AC ને દર્શિરેખા કહે છે. વિદ્યાર્થી મિનારાની ટોચનું નિરીક્ષણ કરે છે. આથી, દર્શિરેખાએ ક્ષેત્રજરેખા સાથે બનાવેલ ખૂણા BAC ને, વિદ્યાર્થીની આંખ આગળનો મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોષા (angle of elevation) કહે છે.

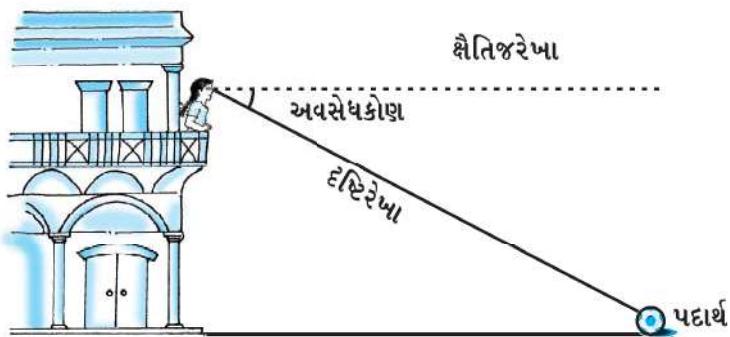
આમ, દર્શિરેખા એ નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે. નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો નિરીક્ષણ બિંદુને સાપેક્ષ ઉત્સેધકોષા એટલે, દર્શિરેખા અને ક્ષેત્રજરેખાથી બનતો ખૂણો જેમાં નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ ક્ષેત્રજરેખાથી ઉપર હોય અર્થાત્, એવી સ્થિતિ કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને ઊંચું કરવું પડે ત્યારે દર્શિરેખા અને ક્ષેત્રજરેખા વચ્ચે બનતો ખૂણો. (જુઓ આકૃતિ 9.2.)



આકૃતિ 9.2

ચાલો, હવે આપણે આકૃતિ 8.2 માં આપેલ સ્થિતિની ચર્ચા કરીએ. બાલકનીમાં બેઠેલી છોકરી મંદિરનાં પગથિયાં પર રાખેલ કુંડાનું નિરીક્ષણ કરે છે. આ સ્થિતિમાં દર્શિરેખા, ક્ષેત્રજરેખાથી નીચે છે. દર્શિરેખાએ ક્ષેત્રજરેખા સાથે બનાવેલ આ પ્રકારના ખૂણાને અવસેધકોષા (angle of depression) કહે છે.

આમ, નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો નિરીક્ષણ બિંદુ આગળનો અવસેધકોષા એટલે જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષેત્રજરેખાથી નીચે હોય, ત્યારે દર્શિરેખા અને ક્ષેત્રજરેખાથી બનતો ખૂણો. અર્થાત્, એવી સ્થિતિ કે જેમાં આપણે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે આપણું મસ્તક નીચે નમાવવું પડે, ત્યારે દર્શિરેખા અને ક્ષેત્રજરેખા વચ્ચે બનતો ખૂણો. (જુઓ આકૃતિ 9.3.)



આકૃતિ 9.3

હવે, તમે આકૃતિ 9.3માં બનેલી દિશારેખા અને આ પ્રકારે બનેલા ખૂણાને ઓળખી શકશો ? આ ખૂણો ઉત્સેધકોણ છે કે અવસેધકોણ ?

ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.1 ને ફરીથી જોઈએ. જો તમે મિનારા CD ની ઊંચાઈ, પ્રત્યક્ષ માપન વિના શોધવા માગતા હો, તો તમારા માટે કઈ માહિતી આવશ્યક હશે ? આ માટે નીચે દર્શાવેલ તથ્યોનું જ્ઞાન આવશ્યક હશે :

- અંતર DE, વિદ્યાર્થી અને મિનારાના પાયા વચ્ચેનું અંતર
- મિનારાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ, $\angle BAC$
- વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ, AE

હવે, જો ઉપરોક્ત ત્રણેય માહિતીથી આપણે પરિચિત હોઈએ, તો મિનારાની ઊંચાઈ કેવી રીતે શોધી શકાય ?

આકૃતિમાં $CD = CB + BD$. અહીં, $BD = AE$ વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ છે.

BC શોધવા માટે આપણે $\angle BAC$ અથવા $\angle A$ ના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીશું.

ΔABC માં, $\angle A$ ની સામેની બાજુ BC છે. હવે, અહીં કયા-કયા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરી શકાય ? જેમાં બે મૂલ્યોનો ઉપયોગ થતો હોય, એક આપેલ હોય અને બીજું શોધવાનું હોય એવા ગુણોત્તર ઉપયોગી થાય. આપણી જરૂરિયાત $\tan A$ અથવા $\cot A$ નો ઉપયોગ કરવાથી પૂરી થઈ શકે, કારણ કે, આ બંને ગુણોત્તરમાં AB અને BC નો સમાવેશ થયેલ છે.

માટે, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ અથવા $\cot A = \frac{AB}{BC}$ નો ઉકેલ મેળવતાં આપણાને BC નું મૂલ્ય મળશે. હવે BC અને AE નો સરવાળો કરતાં મિનારાની ઊંચાઈ મળશે.

હવે, કેટલાંક વધારે ઉદાહરણ દ્વારા આપણે હમણાં જ જેની ચર્ચા કરી હતી તે પદ્ધતિની સમજૂતી મેળવીએ.

ઉદાહરણ 1 : જમીન પર એક ટાવર શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. તેના પાયાથી 15 મીટર દૂર રહેલા જમીન પરના એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ સમયાને દર્શાવતી એક સરળ આકૃતિ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 9.4.) અહીં AB ટાવર દર્શાવે છે,

CB એ બિંદુ C નું ટાવરથી અંતર છે અને $\angle ACB$ ઉત્સેધકોણ છે. આપણે અહીં ટાવરની ઊંચાઈ શોધવાની છે, અર્થાત્ AB શોધવું છે. અહીં ત્રિકોણ ACBમાં ખૂણો B કાટકોણ છે. સમસ્યાના ઉકેલ માટે આપણે ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર $\tan 60^\circ$ (અથવા $\cot 60^\circ$) પસંદ કરીશું કારણ કે, તે ગુણોત્તરમાં AB અને BC બંને રહેલા છે.

$$\text{હવે, } \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{AB}{15}$$

$$\therefore AB = 15\sqrt{3}$$

\therefore ટાવરની ઊંચાઈ $15\sqrt{3}$ મીટર છે.

ઉદાહરણ 2 : એક ઇલેક્ટ્રિશિયનને 5 મી ઊંચાઈવાળા થાંબલા પર 'ફોલ્ટ'નું સમારકામ કરવાનું છે. આ માટે તેણે ટોચથી 1.3 મી નીચે સુધી પહોંચીને સમારકામ કરવાનું છે. (જુઓ આંકૃતિ 9.5.) આ માટે તે સમક્ષિતિજ રેખા સાથે 60° માપનો ખૂણો રહે તે રીતે એક નિસરણી થાંબલા સાથે ત્રાંસી ટેકવે છે અને હાચિંગ જગ્યાએ પહોંચે છે, તો નિસરણીની લંબાઈ કેટલી હશે? તદ્વપરાંત નિસરણીને થાંબલાના પાયાથી કેટલે દૂર રાખવી પડશે? (અહીં, $\sqrt{3} = 1.73$ લઈ શકાય.)

ઉકેલ : આંકૃતિ 9.5 માં, ઇલેક્ટ્રિશિયનને થાંબલા AD પરના બિંદુ B સુધી પહોંચવું પડે.

$$\text{આથી, } BD = AD - AB = (5 - 1.3) \text{ મી} = 3.7 \text{ મી}$$

અહીં, BC નિસરણી દર્શાવે છે અને તેની લંબાઈ શોધવાની છે. અર્થાત્ કાટકોણ ત્રિકોણ BDCના કર્ણની લંબાઈ શોધવાની છે.

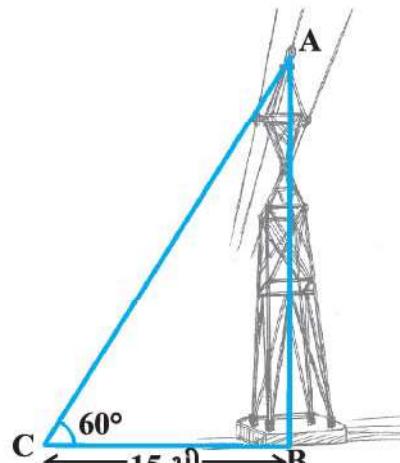
હવે, તમે કહી શકો કે આપણે કયા ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ કરીશું?

તે ગુણોત્તર $\sin 60^\circ$ હોવો જોઈએ.

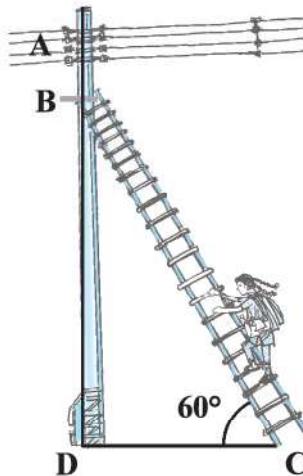
$$\text{માટે, } \frac{BD}{BC} = \sin 60^\circ \text{ અથવા } \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28 \text{ મી (આસત્ર મૂલ્ય)}$$

આમ, નિસરણીની લંબાઈ 4.28 મી હોવી જોઈએ.



આંકૃતિ 9.4



આંકૃતિ 9.5

$$\text{હવે, } \frac{DC}{BD} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14 \text{ મી (આસમ મૂલ્ય)}$$

આથી, તેને નિસરણીના નીચેના છેડાને થાંબલાથી 2.14 મી દૂર રાખવો પડે.

ઉદાહરણ 3 : 1.5 મી ઊંચાઈવાળી એક નિરીક્ષક એક ચીમનીથી 28.5 મી દૂર ઉલ્લેખ છે. તેની આંખથી ચીમનીની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45° છે. ચીમનીની ઊંચાઈ કેટલી હશે ?

ઉકેલ : અહીં, AB ચીમની છે. CD નિરીક્ષક અને $\angle ADE$ ઉત્સેધકોણ છે. (જુઓ આકૃતિ 9.6.) અહીં, જેમાં ખૂણો E કાટકોણ હોય તેવો એક ત્રિકોણ ADE છે અને આપણે અહીં ચીમનીની ઊંચાઈ શોધવા માગીએ છીએ.

$$\text{આપણી પાસે, } AB = AE + BE = AE + 1.5$$

$$\text{અને } DE = CB = 28.5 \text{ મી છે.}$$

AE શોધવા માટે આપણે એવો ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર પસંદ કરીશું, જેમાં AE અને DE બંને હોય. ચાલો ઉત્સેધકોણનો tangent પસંદ કરીએ.

$$\text{હવે, } \tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$$

$$\therefore 1 = \frac{AE}{28.5}$$

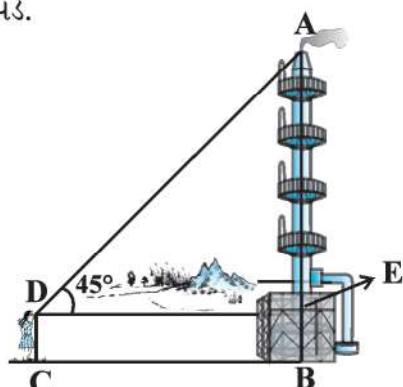
$$\therefore AE = 28.5$$

તેથી, ચીમનીની ઊંચાઈ $AB = (28.5 + 1.5)$ મી = 30 મી

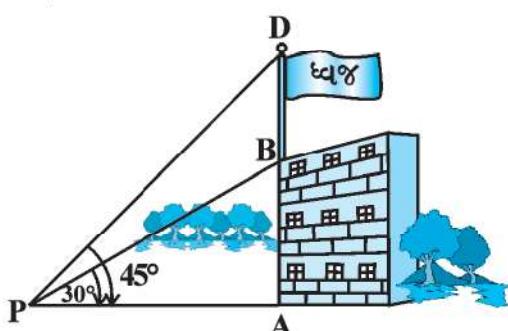
ઉદાહરણ 4 : જમીન પરના બિંદુ P થી એક 10 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30° છે. ઈમારતની ટોચ પર ધ્વજ ફરકાવવામાં આવ્યો છે અને બિંદુ P થી આ ધ્વજસ્તંભની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 45° છે, તો ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ તથા ઈમારતનું બિંદુ P થી અંતર શોધો. ($\sqrt{3} = 1.732$ લઈ શકાય.)

ઉકેલ : આકૃતિ 9.7 માં, AB ઈમારતની ઊંચાઈ દર્શાવે છે BD ધ્વજસ્તંભ દર્શાવે છે અને P એ જમીન પરનું બિંદુ દર્શાવે છે. ધ્વાન રાખો, અહીં બે કાટકોણ ત્રિકોણ PAB અને PAD બને છે. અહીં ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ અર્થાત્ DB અને ઈમારતનું બિંદુ P થી અંતર અર્થાત્ AP શોધવાનું છે.

આપણે ઈમારતની ઊંચાઈ AB જાડીએ છીએ તેથી સૌપ્રથમ આપણે કાટકોણ ΔPAB નો વિચાર કરીશું.



આકૃતિ 9.6



આકૃતિ 9.7

$$\text{અહીં, } \tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$$

$$\therefore AP = 10\sqrt{3}$$

અર્થાત્, ઈમારતનું બિંદુ P થી અંતર $10\sqrt{3}$ મી = 17.32 મી છે.

હવે, ધારો કે $DB = x$ મી છે, તેથી $AD = (10 + x)$ મી થાય.

હવે, કાટકોણ આંગાડી માં,

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

$$\text{માટે, } 1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

$$\text{અર્થાત્, } x = 10(\sqrt{3}-1) = 7.32$$

આમ, ધ્વજસ્તંભની લંબાઈ 7.32 મી છે.

ઉદાહરણ 5 : સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° થી ઘટીને 30° થતાં, સમતલ જમીન પર ઊભેલ ટાવરના પડછાયાની લંબાઈમાં 40 મીટર જેટલો વધારો થાય છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.8 માં, AB ટાવર તથા સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° હોય, ત્યારે ટાવરનો પડછાયો BC અને સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° હોય, ત્યારે ટાવરનો પડછાયો DB છે.

ધારો કે, AB ની ઊંચાઈ 'h' મી અને BC 'x' મી છે, પ્રશ્નમાં જ્ઞાત્વા પ્રમાણે DB, BC કરતાં 40 મી વધારે છે.

$$\text{આથી, } DB = (40 + x) \text{ મી}$$

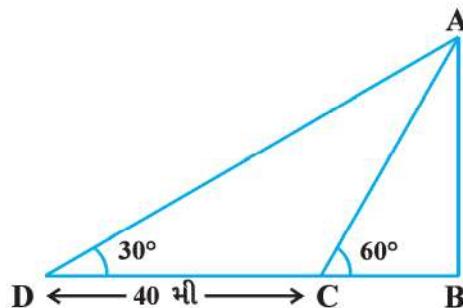
હવે, આપણી પાસે બે કાટકોણ નિકોણ ABC અને ABD છે.

$$\Delta ABC \text{ માં, } \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{h}{x} \quad (1)$$

$$\Delta ABD \text{ માં, } \tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40} \quad (2)$$



આકૃતિ 9.8

હવે, (1) પરથી, $h = x\sqrt{3}$

h ના આ મૂલ્યને (2) માં મૂકુટાં આપશાને $(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40$, એટલે કે, $3x = x + 40$

$$\therefore x = 20$$

$$\text{તેથી, } h = 20\sqrt{3}$$

((1) પરથી)

આમ, ટાવરની ઊંચાઈ $20\sqrt{3}$ મી છે.

ઉદાહરણ 6 : એક બહુમાળી ઈમારતની ટોચ પરથી અવલોકન કરતાં એક 8 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચ અને તળિયાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 30° અને 45° માલૂમ પડે છે, તો બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ અને બે ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.9 માં, PC એ બહુમાળી ઈમારત દર્શાવે છે તથા AB એ 8 મી ઊંચી ઈમારત દર્શાવે છે. આપણાને અહીં બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ અર્થાત् PC અને બે ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર અર્થાત् AC શોધવામાં રસ છે.

ધ્યાનથી આકૃતિનું અવલોકન કરો. તમે જોઈ શકો છો કે, બે સમાંતર રેખા PQ અને BD ની છેદિકા PB છે. આથી, $\angle QPB$ અને $\angle PBD$ યુગ્મકોણ થાય. તેથી તે સમાન છે. એટલે કે, $\angle PBD = 30^\circ$. આ જ રીતે, $\angle PAC = 45^\circ$ થાય.

કાટકોણ ΔPBD માં,

$$\tan 30^\circ = \frac{PD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ અથવા } BD = PD\sqrt{3}$$

કાટકોણ ΔPAC માં,

$$\tan 45^\circ = \frac{PC}{AC} = 1$$

$$\therefore PC = AC$$

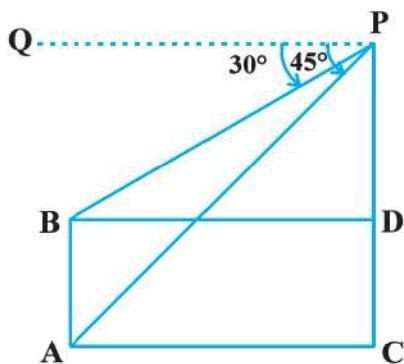
$$\text{પરંતુ, } PC = PD + DC. \text{ માટે } PD + DC = AC$$

$$\text{અહીં, } AC = BD \text{ અને } DC = AB = 8 \text{ મી હોવાથી, આપણાને } PD + 8 = BD = PD\sqrt{3} \text{ મળે. (કેમ?)}$$

$$\therefore PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1) \text{ મી}$$

આમ, બહુમાળી ઈમારતની ઊંચાઈ $\{4(\sqrt{3}+1)+8\}$ મી = $4(3+\sqrt{3})$ મી

અને બંને ઈમારતો વચ્ચેનું અંતર પણ $4(3+\sqrt{3})$ મી હશે.



આકૃતિ 9.9

ઉદાહરણ 7 : નદી પર રહેલા પુલના એક બિંદુથી નદીના બંને કિનારાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 30° અને 45° માલૂમ પડે છે. જો નદીની સપાટીથી પુલની ઊંચાઈ તમી હોય તો નદીની પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.10 માં, બિંદુઓ A અને B નદીના સામસામેના બે કિનારા દર્શાવે છે. આથી નદીની પહોળાઈ AB થાય. નદીની સપાટીથી 3 મી ઊંચાઈએ આવેલા પુલ પરનું એક બિંદુ P છે, અર્થાત્ $DP = 3$ મી.

અહીં, નદીની પહોળાઈ એટલે કે, $\triangle APB$ ની એક બાજુ AB ની લંબાઈ, શોધવાની છે.

હવે,

$$AB = AD + DB$$

કાટકોણ ત્રિકોણ APD માં, $\angle A = 30^\circ$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{PD}{AD}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD} \text{ અથવા } AD = 3\sqrt{3} \text{ મી}$$

અને કાટકોણ $\triangle PBD$ માં, $\angle B = 45^\circ$. આથી, $BD = PD = 3$ મી

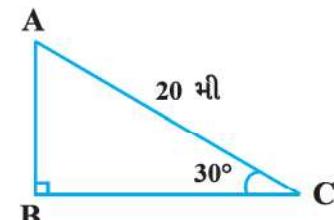
હવે,

$$AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3}) \text{ મી}$$

આમ, નદીની પહોળાઈ $3(\sqrt{3} + 1)$ મી છે.

સ્વાધ્યાય 9.1

- સર્કસના તંબુમાં, જમીન સાથે શિરોલંબ સ્થિતિમાં રહેલા થાંભલાની ટોચથી જમીન સાથે જેંચીને બાંધેલા 20 મી લંબા દોરડા પર એક કલાકાર ચઢી રહ્યો છે. જો દોરડું જમીન સાથે 30° માપનો ખૂણો બનાવે તો થાંભલાની ઊંચાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 9.11.)

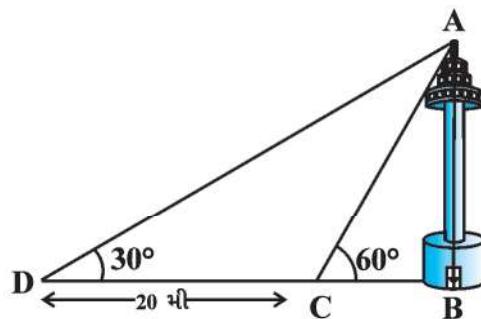


- વાવાજોડાને કારણે એક ઝડ એવી રીતે ભાંગીને વળી જાય છે, જેથી તેની ટોચ, જમીન સાથે 30° માપનો ખૂણો બનાવે તે રીતે જમીનને સ્પર્શ છે. ઝડની જમીનને સ્પર્શતી ટોચ અને ઝડના થડ વચ્ચેનું અંતર 8 મી હોય, તો ઝડની ઊંચાઈ શોધો.
- એક ઠેકેદારે બાળકોને રમવા માટે, બગીચામાં બે લપસણી લગાવવાની છે. આ માટે તે 5 વર્ષથી ઓછી ઉંમરનાં બાળકો માટે, જમીનથી ઉપરનો છેડો 1.5 મી રહે અને જમીન સાથે 30° નો ખૂણો બનાવે તેવી અને તેનાથી વધારે ઉંમરનાં બાળકો માટે 3 મીની ઊંચાઈથી સીધો ઢાળ હોય તથા જમીન સાથે 60° નો ખૂણો બનાવતી હોય તેવી લપસણીઓ પસંદ કરે છે. તો બંને લપસણીઓની લંબાઈ શોધો.

આકૃતિ 9.11

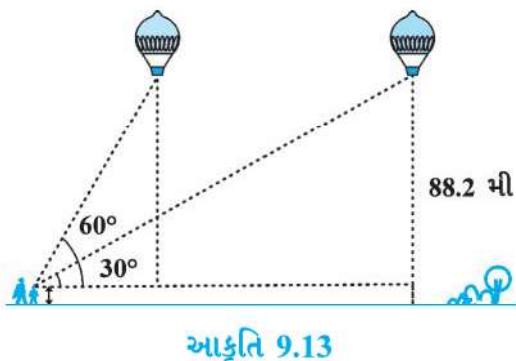
ગણિત

4. ટાવરના પાયાથી 30 મી દૂર રહેલા જમીન પરના એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
5. એક પતંગ જમીનથી 60 મી ની ઊંચાઈ પર ઊડી રહેલ છે. આ પતંગની દોરીનો એક છેડો ક્ષણભર માટે જમીન પરના એક બિંદુ સાથે બાંધેલ છે. આ સ્થિતિમાં દોરીનો જમીન સાથેનો ખૂઝો 60° છે. જો દોરીમાં કોઈ ઢીલ નથી તેવું માની લેવામાં આવે તો દોરીની લંબાઈ શોધો.
6. 1.5 મી ઊંચો એક છોકરો એક 30 મી ઊંચી ઈમારતથી કોઈક અંતરે ઊભેલ છે. હવે જ્યારે તે ઈમારત તરફ ચાલવાનું શરૂ કરે છે ત્યારે કેટલાક સમય પછી તેની આંખથી ઈમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° થી વર્ધીને 60° થાય છે. તો તે ઈમારત તરફ કેટલું અંતર ચાલ્યો હશે ?
7. જમીન પર આવેલ એક બિંદુથી એક 20 મી ઊંચી ઈમારતની ટોચ પર રહેલ એક સંચાર ટાવરના તળિયા અને ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 45° અને 60° છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
8. એક ઊંચી બેઠક પર 1.6 મી ઊંચી એક પ્રતિમા ગોઠવેલ છે. જમીન પરના એક બિંદુએથી પ્રતિમાની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° અને બેઠકની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 45° છે. તો બેઠકની ઊંચાઈ શોધો.
9. એક ટાવરના તળિયાથી એક ઈમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે અને ઈમારતના તળિયાથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° છે. જો ટાવરની ઊંચાઈ 50 મી હોય તો ઈમારતની ઊંચાઈ શોધો.
10. એક 80 મી પહોળા માર્ગની બંને બાજુએ સમાન ઊંચાઈના બે સંભળ શિરોલંબ સ્થિતિમાં છે. માર્ગ પર વચ્ચે આવેલ કોઈ એક બિંદુએથી બંને સંભળની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ 60° અને 30° જણાય છે. તો દરેક સંભળની ઊંચાઈ શોધો. તથા બંને સંભળનું નિરીક્ષણ બિંદુથી અંતર શોધો.
11. નહેરના એક ડિનારા પર ટીવીનો ટાવર શિરોલંબ ઊભો કરવામાં આવેલ છે. ટાવરની સામેના બીજા ડિનારા પર રહેલા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° છે. ટાવરના તળિયા અને નિરીક્ષણ બિંદુને જોડતી રેખા પર આવેલ અને નિરીક્ષણ બિંદુથી 20 મી દૂર બીજા એક બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. (જુઓ આંકૃતિક 9.12.) તો ટાવરની ઊંચાઈ અને નહેરની પહોળાઈ શોધો.
12. 7 મી ઊંચી ઈમારત પરથી એક 'કેબલ' ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° અને ટાવરના તળિયાનો અવસેધકોણ 45° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
13. દરિયાની સપાટીથી 75 મી ઊંચી દીવાદંડી પરથી અવલોકન કરતાં, દરિયામાં રહેલા બે વહાણના અવસેધકોણનાં માપ 30° અને 45° માલૂમ પડે છે. જો એક વહાણ બીજાની બરાબર પાછળ હોય અને બંને વહાણ દીવાદંડીની એક જ બાજુ પર આવેલ હોય તો બંને વહાણ વચ્ચેનું અંતર શોધો.



આંકૃતિક 9.12

14. 1.2 મી ઊંચાઈવાળી એક છોકરીને, જમીનથી 88.2 મી ઊંચાઈ પર રહેલું એક બલૂન જોવા મળે છે. પવનને કારણે તે સમક્ષિતિજ રેખામાં ગતિ કરે છે. કોઈ એક સમયે છોકરીને તેના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° મળે છે. થોડા સમય બાદ બલૂનના ઉત્સેધકોણનું માપ ઘટીને 30° થાય છે (જુઓ આકૃતિ 9.13), તો આ સમય દરમિયાન બલૂન કાપેલું અંતર શોધો.



આકૃતિ 9.13

15. એક સુરેખ ભાર્ગ ટાવર તરફ જાય છે. ટાવરની ટોચ પર રહેલ એક વ્યક્તિ, ટાવર તરફ અચળ ઝડપથી આવતી એક મોટરકારના અવસેધકોણનું માપ 30° નોંધે છે. 6 સેકન્ડ પછી આ કારના અવસેધકોણનું માપ 60° થાય છે, તો હવે કારને ટાવર સુધી પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે ?
16. ટાવરના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા પર તળિયાથી 4 મી અને 9 મી દૂર આવેલાં બે બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ ક્રોટિકોણનાં માપ છે. સાબિત કરો કે, ટાવરની ઊંચાઈ 6 મી છે.

9.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

- (i) દાખિલેખા એ નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે.
 (ii) નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો ઉત્સેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી ઊંચે હોય અર્થાત્, એવી સ્થિતિમાં હોય કે જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને ઊંચું કરવું પડે ત્યારે દાખિલેખા અને ક્ષૈતિજરેખા વડે બનતો ખૂણો.
 (iii) નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો અવસેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજરેખાથી નીચે હોય, અર્થાત્, એવી સ્થિતિમાં હોય કે, જ્યારે પદાર્થના નિરીક્ષણ માટે મસ્તકને નીચે નમાવવું પડે ત્યારે દાખિલેખા અને ક્ષૈતિજરેખા વડે બનતો ખૂણો.
- પદાર્થની ઊંચાઈ અથવા લંબાઈ અથવા બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.

