

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

— R.S. Woodward

15.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ઘટનાઓની પ્રાયોગિક સંભાવનાઓનો અભ્યાસ ધોરણ IX માં કર્યો છે. તે પ્રયોગોનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત હતી.

આપણે એક પ્રયોગની ચર્ચા કરી હતી. તેમાં એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાથી મળતાં પરિણામોની આવૃત્તિ નીચે પ્રમાણે હતી :

$$\text{ઇએ (H)} : 455 \quad \text{કાંટો (T)} : 545$$

આ પ્રયોગના આધારે, ઇએ મળવાની પ્રાયોગિક સંભાવના $\frac{455}{1000}$, એટલે કે 0.455 હતી અને કાંટો મળવાની સંભાવના 0.545 હતી. (આ સાથે જ ધોરણ IX ગણિતશાસ્કના પાઠ્યપુસ્તકના પ્રકરણ 15 નું (ઉદાહરણ 1 જુઓ.) નોંધ કરો કે, આ સંભાવનાઓ એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત છે. આ કારણે, તે પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ કહેવાય છે. વાસ્તવમાં, પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ, ઘટનાઓ ઉદ્ભવે તે માટેના પ્રત્યક્ષ પ્રયોગો અને જરૂર પૂરતા સાનુકૂળ સંજોગોનાં પરિણામો પર આધારિત છે. તદ્વપરાંત, આ સંભાવનાઓ કેવળ ‘અંદાજિત’ છે. જો આપણે આ જ પ્રયોગને અન્ય 1000 વખત કરીએ, તો આપણને જુદી માહિતી મળી શકે અને તે અન્ય અંદાજિત સંભાવના આપતી હોય.

તમે એક સિક્કાને અનેક વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ ધોરણ IX માં કર્યો છે અને નોંધ્યું છે કે, ઘણી વાર સિક્કા પર ઇએ (અથવા કાંટો) મળ્યો છે. (પ્રકરણ 15 ની પ્રવૃત્તિઓ 1 અને 2 નો સંદર્ભ જુઓ.) તમે એ પણ નોંધ્યું હશે કે,

ગણિત

જેમ જેમ સિક્કાને ઉધાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના, સંખ્યા $\frac{1}{2}$ ની નજીક અને નજીક પહોંચે છે. કેવળ તમે જ નહિ, પરંતુ દુનિયાના જુદા-જુદા ભાગોમાંથી અન્ય ઘણી બધી વ્યક્તિઓએ આ પ્રકારના પ્રયોગ કર્યા છે અને સિક્કા પર મળતી છાપની સંખ્યા નોંધી છે.

ઉદાહરણ તરીકે, અઠારમી સદીના ફેન્ચ પ્રકૃતિશાસ્ક્રિપ્ટ કોમ્ટ દ બફફન (Comte de Buffon) એક સિક્કાને 4040 વખત ઉધાય્યો અને 2048 વખત છાપ મેળવી. આ કિસ્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{2048}{4040}$ હતી, એટલે કે 0.507. બ્રિટનના ડે. ઈ. કેરિચ (J. E. Kerrich) સિક્કાને 10000 વખત ઉધાળતાં 5067 વખત છાપ મેળવી. આ કિસ્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ હતી. અંકડાશાસ્ક્રી કાર્લ પીઅરસન (Karl Pearson) કેટલોક વધારે સમય ફાળવ્યો અને 24,000 વખત સિક્કાને ઉધાય્યો. તેણે 12,012 વખત છાપ મેળવી અને આમ, તેણે છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના 0.5005 મેળવી હતી.

હવે, ધારો કે આપણો પૂછીએ, જો પ્રયોગને દસ લાખ વખત અથવા એક કરોડ વખત અને આમ વધુ ને વધુ વખત (પુનરાવર્તિત) કરવામાં આવે તો છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના શું થશે? આપને સહજ જ્ઞાનથી અંતઃસ્કુરણા થશે કે જેમ સિક્કાને ઉધાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના સંખ્યા 0.5 એટલે કે $\frac{1}{2}$ ની આસપાસ સ્થાયી થાય છે. તેને જ આપણે છાપ મેળવવાની (અથવા કાંટો મેળવવાની) સૈદ્ધાંતિક સંભાવના (theoretical probability) કહીએ છીએ. તે તમે પછીના વિભાગમાં જોશો. આ પ્રકરણમાં, આપણે ઘટનાની પ્રશ્ના (સૈદ્ધાંતિક પણ કહેવાય છે) સંભાવનાનો પરિચય અને આ જ્યાલ પર આધારિત સરળ કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું.

15.2 સંભાવના – પ્રશ્નાંની અભિગમ

ચાલો, આપણે નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

ધારો કે, એક સિક્કાને યાદચિંહ રીતે ઉધાય્યો છે.

જ્યારે આપણે એક સિક્કો બોલીએ છીએ, ત્યારે આપણે માની લઈએ છીએ કે, તે ‘સમતોલ’ છે, એટલે કે, તેના માટે એવું કોઈ જ કારણ નથી કે તે બીજુ બાજુ કરતાં એક બાજુ પર વધુ વખત નીચે પડે છે. એવા સિક્કાના આ સમપ્રમાણાતાના ગુણધર્મને આપણે સમતોલ હોવાનો ગુણધર્મ કહીશું. શબ્દપ્રયોગ ‘યાદચિંહ ઉધાળ’નો આપણે એ અર્થ કરીશું કે, સિક્કો મુક્તપણે, કોઈપણ પ્રકારના પૂર્વગ્રહ કે વિધન વિના નીચે પડવા માટે મુક્ત છે.

આપણે અગાઉથી જ જાણીએ છીએ કે બે શક્ય રીતો પૈકી કોઈ એક રીતે જ સિક્કો નીચે પડશે - સિક્કા ઉપર છાપ (H) આવશે અથવા કાંટો (T) આવશે (સિક્કો તેની ધાર પર નીચે પડશે, તે શક્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, સિક્કો રેતીમાં પડે છે. આપણે આ શક્યતાને નકારી કાઢીએ છીએ.). આપણે વ્યાજબીપણે ધારી શક્ય છીએ કે, પ્રત્યેક પરિણામ, છાપ અથવા કાંટો, ઉદ્ભબવાની એટલી જ શક્યતા છે, જેટલી બીજાની. પરિણામો છાપ અથવા કાંટો, સમસંભાવી છે, એમ કહીને આપણે તેનો ઉલ્લેખ કરીશું.

સમસંભાવી પરિણામોના અન્ય ઉદાહરણ માટે, ધારો કે, આપણે એક પાસાને એકવાર ફેંકીએ છીએ. આપણા માટે, પાસાનો અર્થ હંમેશાં સમતોલ પાસો એવો કરીશું. શક્ય પરિણામો શું છે? તે પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે.

પ્રત્યેક સંખ્યા પાસા ઉપર તે દેખાય તેની શક્યતા સમાન છે. તેથી પાસાને ફેંકવાનાં સમસંભાવી પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે.

શું પ્રત્યેક પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી હોય છે ? ચાલો આપણે જોઈએ.

ધારો કે, એક થેલામાં 4 લાલ દડા અને 1 ભૂરો દડો છે અને તમે થેલામાં જોયા વગર એક દડો યાદચિક રીતે પસંદ કરો છો. કયાં પરિણામો મળશે ? શું પરિણામો - ‘એક લાલ દડો’ અને ‘એક ભૂરો દડો’ સમસંભાવી છે ? 4 લાલ દડા અને માત્ર એક ભૂરો દડો હોવાથી, તમે સંમત થશો કે, તમને ભૂરો દડો મળે તે કરતાં લાલ દડો મળવાની શક્યતા વધુ છે. તેથી, પરિણામ (લાલ દડો અથવા ભૂરો દડો) સમસંભાવી નથી. આમ છતાં, થેલામાંથી કોઈ પણ રંગનો એક દડો યાદચિક રીતે પસંદ કરવાના પ્રયોગનાં પરિણામ સમસંભાવી છે. તેથી, બધા જ પ્રયોગો માટે જરૂરી નથી કે, પરિણામો સમસંભાવી હોય.

પરંતુ, આ પ્રકરણમાં, હવે પછીથી, **આપણે ધારી લઈશું કે, બધા જ પ્રયોગોનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.**

ધોરણ IX માં ઘટના E ની પ્રયોગાત્મક સંભાવના P(E) આપણે નીચે આપેલ સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરી છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના } E \text{ ઉદ્ભવે તેવા પ્રયત્નોની સંખ્યા}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}$$

સંભાવનાનું પ્રયોગમૂલક અર્થઘટન પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ઘણી વખત મોટી સંખ્યાના પ્રયત્નો પુનરાવર્તિત કરી શકાય એવી પ્રત્યેક ઘટના પર લાગુ પાડી શકાય. પ્રયોગને પુનરાવર્તિત કરવાની કિયાને કેટલીક મર્યાદાઓ છે, જેમ કે, તે ખૂબ જ ખર્ચળ હોઈ શકે અથવા ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં અવ્યવહારુ પણ હોય. અલબત્ત, સિક્કાને ઉછાળવાના અથવા પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગોમાં તે સારી રીતે કાર્ય કરે છે. પરંતુ, ઉપગ્રહનું પ્રક્રિપણ કરવાના પ્રયોગના પુનરાવર્તન વિશે શું કહેવાય ? ખાસ કરીને પ્રક્રિપણ દરમિયાન ઉપગ્રહના નિષ્ફળ જવાની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે અથવા બહુમાળી ઈમારત ભૂકુપમાં નાશ પામે તેની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે ઘટનાનું પુનરાવર્તન કરાય ?

જે પ્રયોગોમાં આપણે ચોક્કસ પ્રકારની ધારણાઓ કરવા માટે તૈયાર હોઈએ છીએ, તે પ્રયોગના પુનરાવર્તનને ટાળી શકાય, કારણ કે ધારણાઓ સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની ગણતરીમાં પ્રત્યક્ષ રીતે મદદ કરે છે. સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા આપણાને સંભાવનાની નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે. (આ ધારણા ઉપરનાં બે ઉદાહરણો સિક્કા તથા પાસા ઉછાળવા જેવા ઘણા પ્રયોગોમાં સત્ય છે.)

ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના (પ્રશિષ્ટ સંભાવના પણ કહેવાય છે), P(E) તરીકે દર્શાવાય છે અને તેને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના } E \text{ માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}{\text{પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા}$$

અતે આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાને આપણે ટૂંકમાં સંભાવના તરીકે લઈશું.

સંભાવનાની આ વ્યાખ્યા **પિઅર સિમોન લાપ્લાસે (Pierre Simon Laplace)** C.E. 1795 માં આપી હતી.

Probability theory had its origin in the 16th century when an Italian physicist and mathematician **J.Cardan** wrote the first book on the subject, **The Book on Games of Chance**. Since its inception, the study of probability has attracted the attention of great mathematicians. **James Bernoulli** (C.E.1654 – C.E.1705), **A. de Moivre** (C.E.1667 – C.E.1754), and **Pierre Simon Laplace** are among those who made significant contributions to this field. Laplace's **Theorie Analytique des Probabilités**, C.E. 1812, is considered to be the greatest contribution by a single person to the theory of probability. In recent years, probability has been used extensively in many areas such as biology, economics, genetics, physics, sociology etc.



Pierre Simon Laplace
(C.E.1749-C.E.1827)

ચાલો, આપણે જેમના માટે કેટલીક સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા સત્ય છે તેવી ઘટનાઓની સંભાવના શોધીએ.

ઉદાહરણ 1 : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવામાં આવે ત્યારે છાપ (H) મળવાની સંભાવના શોધો તથા કાંટો (T) મળવાની સંભાવના પડા શોધો.

ઉકેલ : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા બે છે - છાપ (H) અને કાંટો (T). છાપ મળે તેને ઘટના E લો. ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા (એટલે કે છાપ મળવાની) 1 છે. તેથી

$$P(E) = P(\text{છાપ}) = \frac{\text{E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}} = \frac{1}{2}$$

આ જ પ્રમાણે, જો 'કાંટો મળે' તે ઘટના F હોય તો

$$P(F) = P(\text{કાંટો}) = \frac{1}{2} \quad (\text{શા માટે ?})$$

ઉદાહરણ 2 : એક થેલામાં લાલ, ભૂરો અને પીળો એમ ત્રણ સમાન કદના દડા છે. કિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચિક રીતે પસંદ કરે છે. તેણે પસંદ કરેલ દડો (i) પીળો હોય (ii) લાલ હોય (iii) ભૂરો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : કિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચિક રીતે પસંદ કરે છે. તેથી, તે આપેલ દડામાંથી ગમે તે એક દડો પસંદ કરે એ સમસંભાવી છે.

'પસંદ કરેલ દડો પીળો હોય' તેને ઘટના Y લો,

‘પસંદ કરેલ દડો ભૂરો હોય’ તેને ઘટના B લો, અને ‘પસંદ કરેલ દડો લાલ હોય’ તેને ઘટના R લો.
હવે, શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા = 3 છે.

(i) ઘટના Y માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 1. તેથી, $P(Y) = \frac{1}{3}$

આ જ પ્રમાણે (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ અને (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$

નોંધ :

- જે ઘટના પ્રયોગનું માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી હોય તેને પ્રાથમિક ઘટના કહે છે. ઉદાહરણ 1 માં બંને ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે. આ જ પ્રમાણે ઉદાહરણ 2 માં ત્રણોય ઘટનાઓ Y, B અને R પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે.
- ઉદાહરણ 1માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(E) + P(F) = 1$

ઉદાહરણ 2 માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

અવલોકન કરો કે, પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 છે. વ્યાપક રીતે પણ આ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : ધારો કે, આપણે પાસાને એકવાર ફેંકીએ છીએ. (i) પાસાના ઉપરના પૃષ્ઠ 4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ? (ii) 4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ?

ઉકેલ : (i) અહીં, ધારો કે, ‘4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવી’ તે ઘટના E છે. પાસો ફેંકવાના કુલ શક્ય પરિણામો છ છે : 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 અને E માટે સાનુકૂળ પરિણામો 5 અને 6 છે. માટે E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 2 છે. તેથી,

$$P(E) = P(4 \text{ કરતાં મોટી સંખ્યા}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) ધારો કે ‘4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવી’ તે ઘટના F છે. શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 6

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામો 1, 2, 3, 4 છે.

તેથી, F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે.

$$\text{માટે, } P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ઉપરના ઉદાહરણમાં ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે ? ના, તેઓ પ્રાથમિક ઘટનાઓ નથી કારણ કે, ઘટના E માં 2 પરિણામો અને ઘટના F માં 4 પરિણામો છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 1 પરથી, આપણે નોંધ કરીએ,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

જ્યાં, E એ ‘ધાપ મેળવવાની’ ઘટના છે અને F એ ‘કાંટો મેળવવાની’ ઘટના છે. ઉદાહરણ 3 નાં (i) અને (ii) પરથી, આપણને મળે છે ;

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \quad (2)$$

જ્યાં, E એ ઘટના ‘4 કરતાં મોટી સંખ્યા’ અને F એ ઘટના 4 કરતાં નાની અથવા તેને સમાન સંખ્યા છે.

ગણિત

આપણે નોંધીએ કે, 4 કરતાં મોટી નહી તેવી સંખ્યા મેળવવી એ 4 કે 4 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવા બરાબર જ છે અને એથી ઉલ્લંઘન પણ.

ઉપર દર્શાવેલ (1) અને (2) માં, શું F એ ‘not E’ (એટલે કે, ‘E નહિ’) ને સમાન નથી ? હા, તે છે. આપણે ઘટના ‘E નહી’ ને \bar{E} દ્વારા દર્શાવીશું.

$$\text{તેથી } P(E) + P(E \text{ નહિ}) = 1$$

$$\text{એટલે કે } P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

$$\text{આ પરિણામ આપણને આપે છે, } P(\bar{E}) = 1 - P(E).$$

$$\text{વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ ઘટના } E \text{ માટે સત્ય છે કે } P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

ઘટના \bar{E} , ઘટના ‘E નહિ’ રજૂ કરે છે. તેને ઘટના E ની પૂરક ઘટના કહે છે. આપણે E અને \bar{E} એકબીજાની પૂરક ઘટનાઓ છે તેમ પણ કહીએ છીએ.

આગળનો અભ્યાસ કરતાં પહેલાં, ચાલો આપણે નીચે આપેલા પ્રશ્નોના ઉત્તર શોધવાના પ્રયત્ન કરીએ.

(i) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં સંખ્યા 8 મળે તેની સંભાવના શું છે ?

(ii) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં 7 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના શું છે ?

ચાલો આપણે (i) નો ઉત્તર જોઈએ :

આપણે જાણીએ છીએ કે પાસાને એકવાર ઉછાળતાં માત્ર જ શક્ય પરિણામો મળે છે. આ પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે. પાસાના કોઈ પણ પૃષ્ઠ પર 8 અંકિત નથી, તેથી 8 માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી. એટલે કે, આવાં પરિણામોની સંખ્યા શૂન્ય છે. બીજા શરૂદોમાં, પાસાને એક વાર ઉછાળતાં 8 મેળવવો, અશક્ય છે.

$$\text{તેથી, } P(8 \text{ મેળવવું}) = \frac{0}{6} = 0$$

એટલે કે, જે ઘટના ઉદ્ભવવી અશક્ય છે તેની સંભાવના 0 છે. આવી ઘટનાને અશક્ય ઘટના કહે છે.

ચાલો આપણે (ii) નો ઉત્તર જોઈએ :

પાસાની દરેક સપાટી પર 7 કરતાં નાની સંખ્યા અંકિત કરેલ હોવાથી, એ વાત ચોક્કસ છે કે, પાસાને એકવાર ઉછાળવાથી હંમેશા 7 કરતાં નાની સંખ્યા જ મળશે. તેથી, સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા પણ બધા જ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા જેટલી જ એટલે કે 6 છે.

$$\text{એના પરિણામ સ્વરૂપે } P(E) = P(7 \text{ કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવી) = \frac{6}{6} = 1$$

તેથી, જે ઘટના ચોક્કસપણે અથવા નિશ્ચિતપણે ઉદ્ભવે તેમ હોય તેની સંભાવના 1 છે. આવી ઘટનાને ચોક્કસ ઘટના અથવા નિશ્ચિત ઘટના કહે છે.

નોંધ : સંભાવના $P(E)$ ની વાખ્યા પરથી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, અંશ (ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા) એ હંમેશાં છેદ જેટલી અથવા તેનાં કરતા નાની (શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા) સંખ્યા છે. તેથી,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

હવે, ચાલો આપણે પતાંની રમત સાથે સંકળાયેલ ઉદાહરણ લઈએ. તમે પતાં રમવાની થોકડી જોઈ છે ? તે 52 પતાં ધરાવે છે તેમને એક ભાતનાં 13 પતાં હોય તેવા 4 સમૂહમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. પ્રત્યેક પતું કાળી (\spadesuit), લાલ (\heartsuit), ચોકટ (\diamond) અને ફુલ્લી (\clubsuit) નું હોય છે. કાળી અને ફુલ્લીનાં પતાં કાળા રંગના, જ્યારે લાલ અને ચોકટનાં પતાં લાલ રંગના હોય છે. પ્રત્યેક સમૂહમાં એકો, રાજા, રાણી, ગુલામ, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 અને 2 નાં પતાં હોય છે. રાજા, રાણી અને ગુલામના પતાંઓને મુખમુદ્રા પતાં (face cards) કહે છે.

ઉદાહરણ 4 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પતાંની થોકડીમાંથી એક પતું ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચેલું પતું (i) એક્કો હોય (ii) એક્કો ન હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : સરખી રીતે ચીપેલાં પતાં સમસંભાવી પરિણામોની ખાતરી આપે છે.

(i) થોકડીમાં 4 એક્કો હોય છે. ‘પતું એક્કો છે’ તેને ઘટના E લો.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે અને શક્ય પરિણામોની સંખ્યા 52 છે. (શા માટે ?)

$$\text{તેથી, } P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ii) ‘ખેંચેલું પતું એક્કો નથી’ તે ઘટનાને F લો.

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = $52 - 4 = 48$ છે.

(શા માટે ?)

શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 52

$$\text{તેથી, } P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

નોંધ : નોંધ કરો કે, F બીજું કર્શું નહીં પરંતુ \bar{E} છે. તેથી, આપણે P(F) ની ગણતરી નીચે પ્રમાણે પણ કરી

$$\text{શકીએ : } P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

ઉદાહરણ 5 : બે ખેલાડીઓ, સંગીતા અને રેશ્મા ટેનિસ મેચ રમે છે. સંગીતા મેચ જીતે તેની સંભાવના 0.62 આપેલ છે. રેશ્મા મેચ જીતે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, S અને R અનુક્રમે સંગીતા મેચ જીતે અને રેશ્મા મેચ જીતે તે ઘટનાઓ દર્શાવે છે.

સંગીતાની મેચ જીતવાની સંભાવના = $P(S) = 0.62$ (આપેલ છે.)

$$\begin{aligned} \text{રેશ્માની મેચ જીવતાની સંભાવના} &= P(R) = 1 - P(S) & [\text{કારણ કે, R અને S પૂરક ઘટનાઓ છે.}] \\ &= 1 - 0.62 = 0.38 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 6 : સવિતા અને હમિદા ભિત્રો છે. બંનેના (i) જન્મદિવસ જુદા-જુદા હોય (ii) જન્મદિવસ એક જ હોય તેની સંભાવના કેટલી થશે? (લીપ વર્ષને અવગાણવું.)

ઉકેલ : બે ભિત્રોમાંથી, એક છોકરી, કહો સવિતાનો જન્મદિવસ વર્ષનો કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે છે. હવે, હમિદાનો જન્મદિવસ પણ વર્ષનાં 365 દિવસ પૈકી કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે.

આપણે માની લઈશું કે, આ 365 પરિણામો સમસંભાવી છે.

(i) જો હમિદાનો જન્મદિવસ, સવિતાના જન્મદિવસ કરતાં જુદો હોય, તો તેના જન્મદિવસ માટે સાનુકૂળ પરિણામો $365 - 1 = 364$ છે.

$$\text{તેથી, } P(\text{હમિદાનો જન્મદિવસ એ સવિતાના જન્મદિવસથી જુદો છે.}) = \frac{364}{365}$$

(ii) $P(\text{સવિતા અને હમિદાનો જન્મદિવસ એક જ છે.})$

$$= 1 - P(\text{બંનેના જન્મદિવસ જુદા છે.})$$

$$= 1 - \frac{364}{365} \quad [P(\bar{E}) = 1 - P(E) નો ઉપરોગ કરતાં]$$

$$= \frac{1}{365}$$

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X માં 40 વિદ્યાર્થીઓ છે. તેમાંથી 25 છોકરીઓ અને 15 છોકરાઓ છે. વર્ગ શિક્ષકે એક વિદ્યાર્થનિ વર્ગ પ્રતિનિધિ તરીકે પસંદ કરવાનો છે. તે દરેક વિદ્યાર્થના નામ બિન્ન બિન્ન ચિહ્ની પર લખે છે, ચિહ્ની એકસમાન છે. પછી તે ચિહ્નીઓને થેલામાં મૂકે છે અને તેમને સંપૂર્ણરીતે મિશ્ર કરે છે. પછી તે થેલામાંથી એક ચિહ્ની કાઢે છે. ચિહ્ની પર લખેલ નામ (i) છોકરીનું હોય (ii) છોકરાનું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : કુલ 40 વિદ્યાર્થીઓ છે અને એક નામની ચિહ્ની પર લખેલ નામ (i) છોકરીનું હોય (ii) છોકરાનું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(i) શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા 40 છે.

છોકરીનું નામ લખેલ ચિહ્ની પર લખેલ નામ માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 25 છે. (શા માટે ?)

$$\text{તેથી, } P(\text{છોકરીના નામવાળી ચિહ્ની}) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

(ii) છોકરાનું નામ લખેલ ચિહ્ની પર લખેલ નામ માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 15 છે. (શા માટે ?)

$$\text{તેથી, } P(\text{છોકરાના નામવાળી ચિહ્ની}) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

નોંધ : $P(\text{છોકરો})$ આપણે અન્ય રીતે પણ શોધી શકીએ.

$$P(\text{છોકરો}) = 1 - P(\text{છોકરો નથી}) = 1 - P(\text{છોકરી}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

ઉદાહરણ 8 : એક ડબામાં 3 ભૂરી, 2 સફેદ અને 4 લાલ લખોટીઓ છે. જો ડબામાંથી યાદચિક રીતે એક લખોટી યાદચિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો તે (i) સફેદ (ii) ભૂરી (iii) લાલ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : એમ કહેવું કે, યાદચિક રીતે એક લખોટી પર લખેલ નામ માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 3 + 2 + 4 = 9 (શા માટે ?)

ધારો કે, W એ પસંદ થયેલ 'લખોટી સફેદ હોય' તે ઘટના, B એ 'લખોટી ભૂરી હોય' તે ઘટના અને R એ 'લખોટી લાલ હોય' તે ઘટના દર્શાવે છે.

(i) ઘટના W માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 2 છે.

$$\text{તેથી, } P(W) = \frac{2}{9}$$

$$\text{આ જ પ્રમાણે, (ii) } P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ અને (iii) } P(R) = \frac{4}{9}$$

$$\text{નોંધ કરો કે, } P(W) + P(B) + P(R) = 1$$

ઉદાહરણ 9 : હરપ્રીત બે જુદા-જુદા સિક્કાઓને એક સાથે ઉછાળે છે (કહો, 1 ₹ નો એક અને 2 ₹ નો બીજો) તે ઓછામાં ઓછી એક છાપ (H) મેળવે તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : આપણે 'છાપ' માટે H અને 'કાંટો' માટે T લખીશું. જ્યારે બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, ત્યારે શક્ય પરિણામો (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) મળે છે, તે તમામ સમસંભાવી છે. અહીં, (H, H) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા (કહો, ₹ 1) પર છાપ અને બીજા સિક્કા (₹ 2) પર પણ છાપ મળે છે. આ જ પ્રમાણે (H, T) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા પર છાપ અને બીજા સિક્કા પર કાંટો છે અને આમ આગળ.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામો, 'ઓછામાં ઓછી એક છાપ'; (H, H), (H, T) અને (T, H) છે. (શા માટે ?)

તેથી, E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 3 છે.

$$\text{માટે, } P(E) = \frac{3}{4}$$

એટલે કે, હરપ્રીત ઓછામાં ઓછી એક છાપ મેળવે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે.

નોંધ : તમે $P(E)$ નીચે પ્રમાણે પડા શોધી શકો છો :

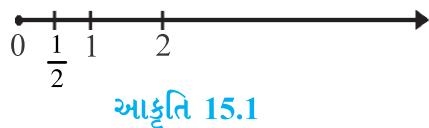
$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (\text{કારણ કે, } P(\bar{E}) = P(\text{છાપ નહિ}) = \frac{1}{4})$$

અત્યાર સુધી જેમની ચર્ચા કરી તે બધાં જ ઉદાહરણોમાં તમે એ નિરીક્ષણ કર્યું કે પ્રત્યેક પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા સાન્ત (finite) હતી ? જો ના હોય, તો શું થાય તે ચકાસીએ.

એવા ઘણા પ્રયોગો છે કે જેનાં પરિણામો આપેલ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેની ગમે તે સંખ્યા હોય, અથવા જેનાં પરિણામો વર્તુળ અથવા લંબયોરસની અંદરનું પ્રત્યેક બિંદુ હોય, વગેરે. શું હવે તમે તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા ગણી શકો છો ? તમે જાણો છો કે, આ શક્ય નથી ‘કારણ કે બે સંખ્યાઓ વચ્ચે અસંખ્ય (અનંત) સંખ્યાઓ હોય છે, અથવા વર્તુળની અંદર અનંત બિંદુઓ હોય છે. તેથી, સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની જે વ્યાખ્યા તમે શીખ્યાં તે વર્તમાન સ્વરૂપમાં લાગુ કરી શકશો નહિ. આમાંથી બહાર નીકળવાનો શું માર્ગ છે ? આના ઉત્તર માટે, ચાલો આપણે નીચે આપેલ ઉદાહરણનો વિચાર કરીએ :

ઉદાહરણ 10* : સંગીત ખુરશીની રમતમાં, સંગીત પૂરું પાડતી વ્યક્તિને સૂચના આપવામાં આવી છે કે, તે વગાડવાનું શરૂ કરે તેની 2 મિનિટમાં ગમે તે સમયે સંગીત વગાડવાનું રોકી છે. સંગીત શરૂ થયા પછીની પહેલી અડધી મિનિટમાં સંગીત બંધ થઈ જશે તેની સંભાવના શું છે ?

ઉકેલ : અહીં શક્ય પરિણામો 0 અને 2 વચ્ચેની તમામ સંખ્યાઓ છે. આ 0 થી 2 વચ્ચેનો સંખ્યા રેખા પરનો ભાગ છે. (આકૃતિ 15.1 જુઓ.)



ધારો કે, E એ ઘટના છે કે ‘પ્રથમ અડધી મિનિટ દરમિયાન સંગીત રોકાયું છે.’ ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામો સંખ્યા રેખા પર 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનાં બિંદુઓ છે.

0 થી 2 સુધીનું અંતર 2 છે અને 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનું અંતર $\frac{1}{2}$ છે. બધાં પરિણામો સમસંભાવી હોવાથી આપણે કહી શકીએ કે, કુલ અંતર 2 માંથી, ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર $\frac{1}{2}$ છે.

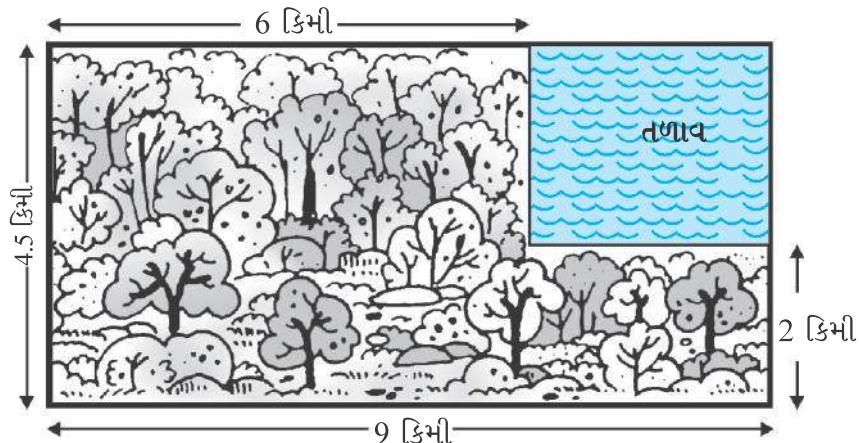
$$\begin{aligned} \text{તેથી, } P(E) &= \frac{\text{ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર}}{\text{કુલ અંતર કે, જેમાં પરિણામો સમાઈ શકે છે}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

શું આપણે ઉદાહરણ 10 નો જ્યાલ, સાનુકૂળ ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તરની સંભાવના શોધવા માટે વિસ્તૃત કરી શકીએ ?

* પરીક્ષાના દિઝિનિંદ્ધી નથી.

ગણિત

ઉદાહરણ 11* : ખોવાઈ ગયેલ હેલિકોપ્ટર વિશે ખબર મળી છે કે તે આકૃતિ 15.2 માં દર્શાવેલ લંબચોરસ વિસ્તારમાં ક્યાંક તૂટી પડ્યું છે. શું સંભાવના છે કે, તે આકૃતિમાં બતાવેલ તળાવમાં તૂટી પડ્યું છે ?



આકૃતિ 15.2

ઉકેલ : હેલિકોપ્ટર આપેલ વિસ્તારમાં ગમે ત્યાં તૂટી પડે તે સમસંભાવી છે.

$$\text{હેલિકોપ્ટર જ્યાં તૂટીને પડી શકે છે તે વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ} = (4.5 \times 9) \text{ કિમી}^2 = 40.5 \text{ કિમી}^2$$

$$\text{તળાવનું ક્ષેત્રફળ} = (2.5 \times 3) \text{ કિમી}^2 = 7.5 \text{ કિમી}^2$$

$$\text{તેથી, } P (\text{હેલિકોપ્ટર તળાવમાં તૂટી પડે}) = \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$$

ઉદાહરણ 12 : પૂંઠાની પેટીમાં રાખેલાં 100 ખમીસ પૈકી 88 ક્ષતિરહિત છે. તે પૈકી 8 માં નાની ખામીઓ છે અને 4 માં મોટી ખામીઓ છે. વેપારી જિમી ક્ષતિરહિત ખમીસ જ સ્વીકારશે, પરંતુ અન્ય વેપારી સુજાતા માત્ર મોટી ખામીવાળા ખમીસ જ નકારશે. પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે છે.

(i) તે જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) તે સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : 100 ખમીસ ધરાવતી પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. માટે, 100 સમસંભાવી પરિણામો છે.

$$(i) \text{ જિમીને સાનુકૂળ (એટલે કે, સ્વીકાર્ય) પરિણામોની સંખ્યા} = 88 \quad (\text{શા માટે ?})$$

$$\text{આથી, જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ પસંદ થયું હોય તેની સંભાવના} = \frac{88}{100} = 0.88$$

$$(ii) \text{ સુજાતાને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા} = 88 + 8 = 96 \quad (\text{શા માટે ?})$$

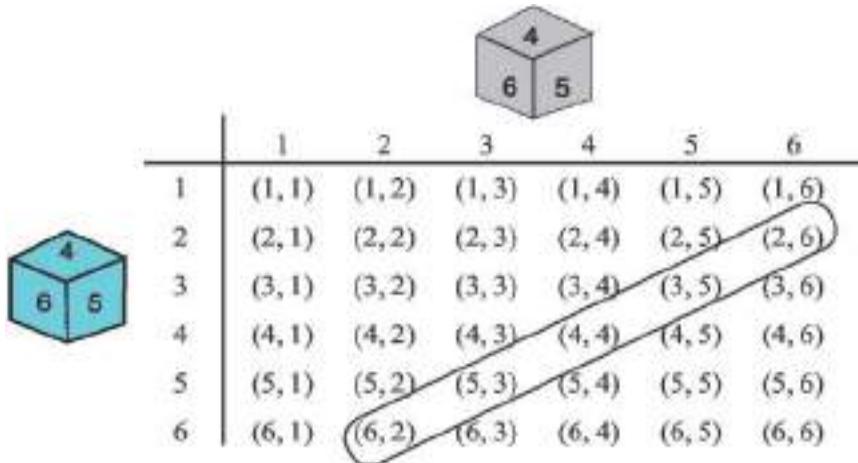
$$\text{તેથી, } P (\text{સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ}) = \frac{96}{100} = 0.96$$

ઉદાહરણ 13 : એક ભૂરો અને એક રાખોડી એમ બે પાસાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. તમામ શક્ય પરિણામો લખો. પાસાની ઉપરની સપાટી પર દેખાતી સંખ્યાઓનો સરવાળો (i) 8 હોય (ii) 13 હોય (iii) 12 કે, તેનાથી નાનો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : જ્યારે ભૂરો પાસો '1' બતાવે, ત્યારે રાખોડી પાસો 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી કોઈ પણ એક સંખ્યા બતાવે. આ

* પરીક્ષાના દણિબંદુથી નથી.

જ રીતે જ્યારે ભૂરો પાસો ‘2’, ‘3’, ‘4’, ‘5’ અથવા ‘6’ બતાવે ત્યારે શક્ય પરિણામોની સૂચિ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે ; પ્રત્યેક કમ્યુક્ટ જોડનો પ્રથમ ઘટક એ ભૂરો પાસા પર દેખાતી સંખ્યા અને દ્વિતીય ઘટક એ રાખોડી પાસા પર દેખાતી સંખ્યા છે.



	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

આકૃતિ 15.3

આપણે નોંધીએ કે, (1, 4) એ (4, 1) કરતાં જુદી છે.

(શા માટે ?)

તેથી શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = $6 \times 6 = 36$

- (i) ઘટના ‘બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 8 છે’ ને E વડે દર્શાવો તેનાં સાનુકૂળ પરિણામો (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) અને (6, 2) છે. (જુઓ આકૃતિ 15.3.)
એટલે કે, ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 5 છે.

$$\text{તેથી, } P(E) = \frac{5}{36}$$

- (ii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના F, ‘બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 13’ માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી.

$$\text{તેથી, } P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

- (iii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના G, ‘બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 12 કે તેથી ઓછો હોય તે માટે તમામ પરિણામો સાનુકૂળ છે. તેથી, $P(G) = \frac{36}{36} = 1$.

સ્વાધ્યાય 15.1

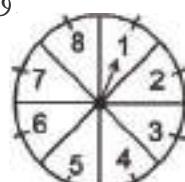
1. નીચેનાં વિધાનો પૂર્ણ કરો :

- ઘટના E ની સંભાવના + ઘટના ‘E નહિ’ ની સંભાવના =
- ઉદ્ભવી ન શકે તેવી ઘટનાની સંભાવના છે. આવી ઘટનાને કહે છે.
- ચોક્કસપણે ઉદ્ભવતી ઘટનાની સંભાવના છે. આવી ઘટનાને કહે છે.
- પ્રયોગની તમામ મૂળભૂત (પ્રાથમિક) ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો છે.
- ઘટનાની સંભાવના થી મોટી અથવા તેના જેટલી અને થી નાની અથવા તેના જેટલી હોય છે.

ଗାଁର୍ବାତ



આકૃતિ 15.4



આકૃતિ 15.5

- 13.** પાસાને એકવાર ફેંકવામાં આવે છે તો (i) અવિભાજ્ય સંખ્યા (ii) 2 અને 6 વચ્ચેની સંખ્યા (iii) અયુગ્મ સંખ્યા મળવાની સંભાવના શોધો.

14. સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પતાંની થોકડીમાંથી એક પતું કાઢવામાં આવે, તો

(i) લાલ રંગનો રાજા	(ii) મુખમુદ્રાવાળું પતું	(iii) લાલ રંગનું મુખમુદ્રાવાળું પતું
(iv) લાલનો ગુલામ	(v) કાળીનું પતું	(vi) ચોકટની રાણી

મળવાની સંભાવના શોધો.

15. પાંચ ચોકટનાં પતાં - દસ્સો, ગુલામ, રાણી, રાજા અને એક્કો એ તમામના મુખ નીચે તરફ રાખીને સરખી રીતે ચીપેલાં છે પછી એક પતું યાદચિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે.

(i) પતું રાણીનું હશે તેની સંભાવના શું છે ?

(ii) જો રાણીને કાઢીને એક બાજુએ મૂકવામાં આવે અને બીજું પતું ખેંચવામાં આવે તે (a) એક્કો હોય
(b) રાણી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

16. ખામીવાળી 12 પેન આકસ્મિક રીતે 132 સારી પેનની સાથે ભળી ગઈ છે. એવું શક્ય નથી કે, કેવળ પેનને જોઈને જ કહી શકાય કે, પેન ખામીયુક્ત છે કે નહિ. આ જથ્થામાંથી એક પેન યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. કાઢવામાં આવેલી પેન ખામીરહિત છે તેની સંભાવના શોધો.

17. (i) 20 વીજળીના ગોળાઓનો જથ્થો 4 ખામીયુક્ત ગોળા ધરાવે છે. આ જથ્થામાંથી એક ગોળો યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ ગોળો ખામીયુક્ત હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) ધારો કે, (i) માં કાઢવામાં આવેલ ગોળો ખામીયુક્ત નથી અને તેને પાછે મૂકવામાં પડો નથી આવ્યો. હવે, બાકીનાં ગોળામાંથી એક ગોળો યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ ગોળો ખામીયુક્ત ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

18. એક ખોખામાં 1 થી 90 સુધીના અંક લખેલી 90 ગોળ તકતીઓ છે. જો ખોખામાંથી એક ગોળ તકતી યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તેના પર (i) બે અંકની સંખ્યા (ii) પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા (iii) 5 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

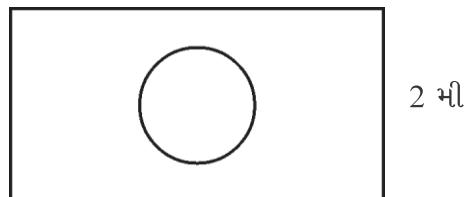
19. એક બાળક પાસે એક એવો પાસો છે જેની છ સપાટીઓ નીચે આપેલા અક્ષરો બતાવે છે :

A B C D E A

આ પાસાને એકવાર ઉછાળવામાં આવે છે પાસા પર (i) A મળે (ii) D મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

- 20*. धारो के, एक पासाने तमे यादचिक रीते आकृति 15.6 मां बताव्या प्रमाणे लंबयोरेस क्षेत्र पर फँको छो. ते 1 भी व्यासना वर्तुणनी अंदर पडशे तेनी संभावना केटली ?**

3 4



આકૃતિ 15.6

- 21.** એક જથ્થો 144 બોલપેન ધરાવે છે. તેમાંથી 20 ખામીયુક્ત અને બાકીની સારી છે. જો પેન સારી હશે તો, નુંચી પેન ખરીદશે, પરંતુ જો તે ખામીયુક્ત હશે તો ખરીદશે નહિ. દુકાનદાર યાદાંચિક રીતે એક પેન કાઢે છે અને તેને આપે છે.

ગણિત

- (i) તે પેન ખરીદશે તેની સંભાવના કેટલી ?
(ii) તે પેન નહિ ખરીદ તેની સંભાવના કેટલી ?
22. ઉદાહરણ 13 નાં સંદર્ભમાં (i) નીચે આપેલ કોષ્ટક પૂરું કરો :

ઘટના :											
'પાસા પરનો સરવાળો'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

- (ii) એક વિદ્યાર્થી દલીલ કરે છે કે 11 શક્ય પરિણામો 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અને 12 છે. તેમાંના પ્રત્યેકની સંભાવના $\frac{1}{11}$ છે. શું આપ આ દલીલ સાથે સહમત છો? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.
23. એક રમતમાં એક રૂપિયાના સિક્કાને 3 વાર ઉધાળવાનો છે અને તેના પરિણામ દરેક વખતે નોંધવાના છે. જો તમામ વખત ઉધાળતાં સરખું પરિણામ મળે, એટલે કે ત્રણ છાપ અથવા ત્રણ કાંટા તો હનિફ રમત જીતી જાય છે, અન્યથા હારે છે. તો હનિફ રમત હારે તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.
24. પાસાને બે વખત ઉધાળવામાં આવે છે :
- (i) એક પણ વખત ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે નહિ.
 - (ii) ઓછામાં ઓછી એકવાર ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?
- [સૂચન : એક પાસાને બે વાર ઉધાળવો અને બે પાસાને એક સાથે ઉધાળવા, એ બંનેને એક જ પ્રયોગ ગણવામાં આવે છે.]
25. નીચેનામાંથી કઈ દલીલો સાચી છે અને કઈ સાચી નથી? તમારા જવાબ માટે કારણો આપો.
- (i) જો બે સિક્કાને એક સાથે ઉધાળવામાં આવે તો ત્રણ શક્યતાઓ મળે છે - બે છાપ અથવા બે કાંટા અથવા પ્રત્યેકનો એક તેથી, આ પ્રત્યેક પરિણામની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે.
 - (ii) જો પાસાને ઉધાળવામાં આવે તો બે શક્ય પરિણામો મળે છે - અયુગ્મ સંખ્યા અથવા યુગ્મ સંખ્યા, તેથી અયુગ્મ સંખ્યા મળવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય 15.2 (વૈકલ્પિક)*

- બે ગ્રાહકો શ્યામ અને એકતા એક જ અઠવાડિયામાં (મંગળવાર થી શનિવાર) કોઈ ચોક્કસ દુકાનની મુલાકાત લે છે. દરેક વ્યક્તિ કોઈ પણ દિવસે દુકાનની મુલાકાત, અન્ય દિવસની જેમ જ લે છે. બંને વ્યક્તિ દુકાનની મુલાકાત (i) એક જ દિવસે (ii) કમિક (એક પણી એક) દિવસોએ (iii) જુદા-જુદા દિવસોએ લેશે તેની સંભાવના કેટલી ?
- પાસા પર સંખ્યાઓ એ રીતે લખવામાં આવી છે કે તેનાં પૃષ્ઠ, સંખ્યાઓ 1, 2, 2, 3, 3, 6 દર્શાવે છે. તે પાસાને બે વાર ઉધાળવામાં આવે છે અને બંને પાસા પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો પાછળના કોષ્ટકમાં નોંધી તે પૂર્ણ કરો :

* પરીક્ષાના દણિબંદુથી નથી.

		પ્રથમવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ					
		1	2	2	3	3	6
બીજીવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ	+	2	3	3	4	4	7
	1	3	4	4	5	5	8
	2				5		
	3						
	3		5			9	
	6	7	8	8	9	9	12

કુલ સરવાળો

(i) યુગ્મ મળે. (ii) 6 મળે. (iii) ઓછામાં ઓછો 6 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

3. એક થેલામાં 5 લાલ દડા અને કેટલાંક વાદળી (ભૂરા) દડા છે. જો ભૂરા દડો નીકળવાની સંભાવના લાલ દડો નીકળે તેની સંભાવના કરતાં બમળી હોય, તો થેલામાં રહેલા ભૂરા દડાઓની સંખ્યા શોધો.
4. એક પેટીમાં 12 દડા છે. તેમાંના x દડા કાળા છે. જો પેટીમાંથી એક દડો યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે કાળો દડો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

જો બીજા 6 કાળા દડા ખોખામાં મૂકવામાં આવે તો કાળો દડો નીકળવાની સંભાવના હવે પહેલાં હતી તેનાં કરતાં બમળી થાય છે, તો x શોધો.

5. એક બરણીમાં 24 લખોટીઓ છે, કેટલીક લીલી અને બાકીની ભૂરી છે. બરણીમાંથી જો એક લખોટી યાદચિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે લીલી હોય તેની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. બરણીમાંની ભૂરી લખોટીઓની સંખ્યા શોધો.

15.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે :

1. પ્રાયોગિક સંભાવના અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવના વચ્ચેનો તફાવત
2. ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, સંકેત $P(E)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$P(E) = \frac{E \text{ માટે સાનુક્કળ પરિણામોની સંખ્યા}{પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}$$

આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

3. ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના 1 છે.
4. અશક્ય ઘટનાની સંભાવના 0 છે.
5. ઘટના E ની સંભાવના એ સંખ્યા $P(E)$ છે

તથા,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

6. માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી ઘટનાને પ્રાથમિક (મૂળભૂત) ઘટના કહે છે. પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે.
7. કોઈ પણ ઘટના E માટે $P(E) + P(\bar{E}) = 1$. \bar{E} એ ઘટના ‘ E નહિ’ દર્શાવે છે. E અને \bar{E} પૂરક ઘટનાઓ કહેવાય છે.

વાચકને નોંધ

ઘટનાની એક પ્રાયોગિક અથવા પ્રયોગમૂલક સંભાવના એ હકીકતમાં જે બન્યું છે તેના પર આધારિત છે અને ઘટનાની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, ચોક્કસ ધારણાઓના આધાર પર શું ઘટિત થશે તેની આગાહી કરવાના પ્રયત્નો કરે છે. જેમ પ્રયોગ કરવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા વધતી જાય છે તેમ આપણે અપેક્ષા રાખી શકીએ કે, પ્રાયોગિક અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાઓ લગભગ સમાન થાય છે.

