પ્રકરણ 1

ગણ

❖ In these days of conflict between ancient and modern studies; there must surely be something to be said for a study which did not begin with Pythagoras and will not end with Einstein; but is the oldest and the youngest. — G. H. HARDY ❖

1.1 પ્રાસ્તાવિક

Georg Cantor
(1845-1918)

ગણની સંકલ્પના એ આધુનિક ગણિતનો મૂળભૂત ભાગ છે. આજે આ સંકલ્પનાનો ગણિતની લગભગ બધી જ શાખાઓમાં ઉપયોગ થાય છે. સંબંધ અને વિધેયોના સિદ્ધાંતો વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે ગણનો ઉપયોગ થાય છે. ભૂમિતિ, શ્રેણીઓ, સંભાવના વગેરેના અભ્યાસ માટે ગણનું જ્ઞાન જરૂરી છે.

જર્મન ગણિતશાસ્ત્રી ***Georg Cantor*** એ (1845-1918) ગણની સંકલ્પનાનો સૈદ્ધાંતિક વિકાસ કર્યો. તેમણે ત્રિકોણમિતિય શ્રેઢીઓના કોયડાઓના ઉકેલ માટે પ્રથમ વખત ગણનો ઉપયોગ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે ગણ સંબંધિત પાયાની વ્યાખ્યાઓ અને ગણ પરની ક્રિયાઓ વિશે ચર્ચા કરીશું.

1.2 ગણ અને તેમનું નિરૂપણ

દૈનિક જીવનમાં, આપણે ઘણી વખત ચોક્કસ પ્રકારની વસ્તુઓના સમૂહ વિશે બોલતા હોઈએ છીએ, જેમકે પત્તાંનો ઢગ, વ્યક્તિઓનું ટોળું, ક્રિકેટ-ટીમ વગેરે. ગણિતમાં પણ આપણે કેટલાક સમૂહો વિશે વાત કરતાં હોઈએ

છીએ જેમકે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સમૂહ, બિંદુઓનો સમૂહ, અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો સમૂહ વગેરે. આપણે વિશેષ રૂપે નીચેના સમૂહોનું નિરીક્ષણ કરીશું :

(i) 10 થી નાની અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, એટલે કે 1, 3, 5, 7, 9.

(ii) ભારતની નદીઓ

(iii) અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના સ્વરો, એટલે કે a, e, i, o, u

(iv) વિવિધ પ્રકારના ત્રિકોણો

(v) 210 ના અવિભાજ્ય અવયવો, એટલે કે 2, 3, 5 અને 7

(vi) સમીકરણ : $x^2 - 5x + 6 = 0$ નો ઉકેલ, એટલે કે 2 અને 3.

આપણે નોંધીશું કે ઉપરનું દરેક ઉદાહરણ એ આપેલી સુવ્યાખ્યાયિત વસ્તુઓ કે સંખ્યાઓનો સમૂહ છે. એટલે કે આપેલી વસ્તુ કે સંખ્યા જે-તે સમૂહનો સભ્ય છે કે નહિ તે ચોક્કસપણે નક્કી કરી શકીએ તેવો જથ્થો છે. દાખલા તરીકે આપણે કહી શકીએ કે, નાઈલ નદી એ ભારતની નદીઓના સમૂહનો સભ્ય નથી, પરંતુ ગંગા નદી આ સમૂહનો સભ્ય છે જ.

હવે, આપણે કહી શકીએ કે, ગણ એ સુવ્યાખ્યાયિત વસ્તુઓનો સમૂહ છે.

ખાસ કરીને ગણિતમાં ઉપયોગ થતો હોય તેવાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો આપીશું, જેમકે,

N : બધી જ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ

Z : બધી જ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ

Q : બધી જ સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ

R : વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ

$\mathbf{Z^+}$: ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ

$\mathbf{Q^+}$: ધન સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ

$\mathbf{R^+}$: ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ

ઉપર દર્શાવેલા વિશિષ્ટ ગણોને જે-તે સંકેત વડે દર્શાવેલ છે. તે સંકેતોનો ઉપયોગ આપણે આ સમગ્ર અભ્યાસ દરમિયાન કરીશું.

અલબત્ત, દુનિયાના પાંચ નામાંકિત ગણિતશાસ્ત્રીઓનો સમૂહ એ સુવ્યાખ્યાયિત નથી, કારણ કે કોઈ ગણિતશાસ્ત્રી નામાંકિત છે કે નહિ તે માટેનો અભિપ્રાય વ્યક્તિ-વ્યક્તિએ બદલાતો રહેશે.

આમ, આ સુવ્યાખ્યાયિત સમૂહ નથી.

નીચેના મુદ્દાઓ નોંધીશું :

(i) ગણની વસ્તુઓ, ઘટકો અને સભ્યો એ ગણ સંબંધિત સમાનાર્થી શબ્દો છે.

(ii) સામાન્ય રીતે ગણને અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના કૅપિટલ અક્ષરો A, B, C, X, Y, Z વગેરે વડે દર્શાવાય છે.

(iii) ગણના સભ્યોને અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના નાના અક્ષરો *a, b, c, x, y, z* વડે દર્શાવાય છે.

જો 'a' એ ગણ 'A' નો ઘટક હોય તો *"a એ A નો સભ્ય છે."* (*a belongs to* A) એમ કહીશું. શબ્દસમૂહ *"નો સભ્ય છે"* (*belongs to*)ને ગ્રીક સંકેત $\in$ વડે દર્શાવીશું. આમ આપણે $a \in$ A લખીશું. જો b એ ગણ A નો સભ્ય ન હોય, તો તેને આપણે $b \notin$ A વડે દર્શાવીશું અને *"b એ ગણ A નો સભ્ય નથી."* (*b does not belong to A*) પ્રમાણે વાંચીશું.

આમ, અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના સ્વરોના ગણ V માટે $a \in$ V, પરંતુ $b \notin$ V. 30 ના અવિભાજ્ય અવયવોના ગણ P માટે $3 \in$ P, પરંતુ $15 \notin$ P.

ગણને દર્શાવવા માટે બે પદ્ધતિ છે :

(i) *યાદીની રીત (Roster or tabular form)*

(ii) *ગુણધર્મની રીત (Set-builder form)*

(i) યાદીની રીતમાં ગણના બધા જ ઘટકોની યાદી બનાવાય છે. બે ઘટકોને દર્શાવતા સંકેત વચ્ચે અલ્પવિરામ મૂકીને તેમને જુદા પાડવામાં આવે છે અને તેમને ધનુષ્કૌંસ { } માં મુકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે 7 થી નાના ધન યુગ્મ પૂર્ણાંકોના ગણને યાદીની રીતમાં {2, 4, 6} પ્રમાણે દર્શાવાય. યાદીની રીત દર્શાવતાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો નીચે પ્રમાણે છે:

(a) જેના વડે 42 વિભાજ્ય છે તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

નોંધ : યાદીની રીતમાં ઘટકોના ક્રમનું મહત્ત્વ નથી. આમ, ઉપરના ગણને {1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42}રીતે પણ રજૂ કરી શકાય.

(b) અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના બધા જ સ્વરનો ગણ {a, e, i, o, u} છે.

(c) અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણને {1, 3, 5,...} રીતે દર્શાવી શકાય. ટપકાં આપણને કહે છે કે, અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સમૂહ અનંત સુધી ચાલશે.

નોંધ : એમ પણ નોંધીએ કે, યાદીની રીતે ગણ લખીએ તો ઘટકોનું પુનરાવર્તન કરવામાં આવતું નથી. એટલે કે બધા ભિન્ન ઘટકો જ લેવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે 'SCHOOL' શબ્દ બનાવતા મૂળાક્ષરોનો ગણ{ S, C, H, O, L} અથવા {H, O, L, C, S} થશે. અહીં ઘટકોના ક્રમનું કોઈ મહત્ત્વ નથી.

(ii) ગુણધર્મની રીતમાં ગણના બધા જ ઘટકો એક સામાન્ય ગુણધર્મ ધરાવે છે અને તે ગુણધર્મ ન ધરાવતા ઘટકો તે ગણમાં હોતા નથી. ઉદાહરણ તરીકે {*a, e, i, o, u*} ના બધા જ ઘટકો એક સામાન્ય ગુણધર્મ ધરાવે છે. ગણના બધા જ ઘટકો અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના સ્વર છે અને બીજા કોઈ મૂળાક્ષર આ ગુણધર્મ ધરાવતા નથી. આ ગણને V વડે દર્શાવીએ તો આપણે V = {x : x એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો પૈકીનો સ્વર છે.} પ્રમાણે લખીશું.

આપણે નોંધીશું કે ગણનો સભ્ય બતાવવા માટે સંકેત x (કોઈ પણ બીજા સંકેત y, z વગેરેનો ઉપયોગ કરી શકાય.)નો ઉપયોગ કર્યો છે અને તેના પછી " : " કૉલન લખેલ છે. કૉલનની સંજ્ઞા કર્યા પછી, ગણના બધા જ ઘટકોનો સમાવેશ થાય તેવો લાક્ષણિક ગુણધર્મ લખીએ છીએ અને પછી આપણે આ સમગ્ર વર્ણનને ધનુષ્કૌંસથી બંધ કરીએ છીએ. ઉપર વર્ણવેલ ગણ V ને "x એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરનો સ્વર હોય તેવા બધા જ x નો ગણ છે" તરીકે વાંચી શકાય. આ વર્ણનમાં કૌંસ એ "બધા જ ઘટકોનો ગણ" માટે વપરાય છે. કૉલન "કે જ્યાં" માટે ઉપયોગમાં લેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે ગણ

A = {x : x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $3 < x < 10$} ને ''જ્યાં x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને x એ 3 અને 10 ની વચ્ચે આવેલી સંખ્યા છે.'' રીતે વાંચીશું. આથી, સંખ્યાઓ 4, 5, 6, 7, 8 અને 9 ગણ A ના ઘટકો થાય.

જો આપણે ઉપર (*a*), (*b*) અને (*c*) માં વર્ણવેલ ગણોને અનુક્રમે સંજ્ઞા A, B અને C આપીએ, તો A, B અને C ને ગુણધર્મની રીતે નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

A = {x : x એ 42 નો પ્રાકૃતિક પૂર્ણાંક અવયવ છે.}

B = {y : y એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો પૈકીનો સ્વર છે.}

C = {z : z એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

ઉદાહરણ 1 : સમીકરણ $x^2 + x - 2 = 0$ ના ઉકેલગણને યાદીની રીતે લખો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને $(x - 1)\ (x + 2) = 0$ તરીકે લખી શકીએ. આમ $x = 1$ અથવા -2.

તેથી આપેલ સમીકરણના ઉકેલગણને યાદીની રીતે {1, – 2} સ્વરૂપે લખી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : ગણ {x : x એ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા છે અને $x^2 < 40$} ને યાદીની રીતે લખો.

ઉકેલ : માંગેલ સંખ્યાઓ 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે. તેથી આપેલ ગણ યાદીની રીતે {1, 2, 3, 4, 5, 6} છે.

ઉદાહરણ 3 : ગણ A = {1, 4, 9, 16, 25, ...} ને ગુણધર્મની રીતે લખો.

ઉકેલ : આપેલ ગણ એ A = {x : x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ છે.}

બીજી રીતે, આપણે A = {x : $x = n^2$, જ્યાં $n \in \mathbf{N}$} તરીકે લખી શકીએ.

નોંધ : આ ઉકેલ અનન્ય નથી. ઉદાહરણ તરીકે B = {x : x શૂન્યેતર પૂર્ણાંકનો વર્ગ છે.} પણ ઉકેલ થાય.

ઉદાહરણ 4 : ગણ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$ ને ગુણધર્મની રીતે દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં આપેલ ગણના દરેક ઘટકનો અંશ તેના છેદ કરતાં એક જેટલો ઓછો છે. અંશની શરૂઆત 1 થી થાય છે અને તે 6 થી વધારે નથી. આથી આપેલ ગણને ગુણધર્મની રીતે

$\left\{x : x = \frac{n}{n+1},\right.$ જ્યાં n એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $\left.1 \le n \le 6\right\}$ લખી શકાય.

ઉદાહરણ 5 : ડાબી બાજુએ યાદીની રીતે દર્શાવેલ દરેક ગણના જમણી બાજુએ ગુણધર્મની રીતે દર્શાવેલા ગણ સાથે યોગ્ય જોડકાં બનાવો.

(i) {P, R, I, N, C, A, L}	(a) { x : x એ ધન પૂર્ણાંક છે અને 18 નો ભાજક છે.}
(ii) { 0 }	(b) { x : x એ પૂર્ણાંક છે અને $x^2 - 9 = 0$}
(iii) {1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c) {x : x એ પૂર્ણાંક છે અને $x + 1 = 1$}
(iv) {3, –3}	(d) {x : x એ PRINCIPAL શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.}

ઉકેલ : (d) માં PRINCIPAL શબ્દના 9 અક્ષરો છે અને તેમાં બે અક્ષરો P અને I પુનરાવર્તિત થાય છે. આથી (i) એ (d) સાથે જોડાશે. તે જ પ્રમાણે $x + 1 = 1$ તો $x = 0$ હોવાથી (ii) એ (c) સાથે જોડી બનાવશે. 1, 2, 3, 6, 9, 18 એ 18 ના ધન અવયવો છે અને આ સિવાય 18 ને કોઇ ધન અવયવ નથી અને તેથી (iii) એ (a) સાથે જોડાશે. છેલ્લે $x^2 - 9 = 0$ તો અને તો જ $x = 3$ અથવા -3. આથી (iv) એ (b) સાથે જોડકું બનાવશે.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. નીચેનામાંથી કયા સમૂહ ગણ દર્શાવે છે ? તમારો જવાબ ચકાસો.

(i) J અક્ષરથી શરૂ થતા અંગ્રેજી કૅલેન્ડરના વર્ષના તમામ મહિનાઓનો સમૂહ

(ii) ભારતના દસ અતિ પ્રતિભાશાળી લેખકોનો સમૂહ

(iii) દુનિયાના ક્રિકેટના ઉત્તમ અગિયાર બૅટ્સમેનોની ટીમ

(iv) તમારા વર્ગના બધા જ છોકરાઓનો સમૂહ

(v) 100 થી નાની બધી જ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સમૂહ

(vi) લેખક મુન્શી પ્રેમચંદે લખેલી બધી જ નવલકથાઓનો સમૂહ

(vii) બધા જ યુગ્મ પૂર્ણાંકોનો સમૂહ

(viii) આ પ્રકરણના બધા પ્રશ્નોનો સમૂહ

(ix) દુનિયાનાં ખૂબ જ ભયાનક પ્રાણીઓનો સમૂહ

2. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} લો. ખાલી જગ્યામાં યોગ્ય સંજ્ઞા $\in$ અથવા $\notin$ મૂકો.

(i) 5…A (ii) 8…A (iii) 0…A

(iv) 4…A (v) 2…A (vi) 10...A

3. નીચેના ગણોને યાદીની રીતે લખો :

(i) A = {x : x એ પૂર્ણાંક છે અને $-3 < x < 7$.}

(ii) B = {x : x એ 6 કરતાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(iii) C = {x : x એ જેના અંકોનો સરવાળો 8 થતો હોય તેવી બે અંકોની સંખ્યા છે.}

(iv) D = {x : x એ 60 નો ધન અવયવ હોય તેવી અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.}

(v) E = TRIGONOMETRY શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ગણ

(vi) F = BETTER શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ગણ

4. નીચેના ગણોને ગુણધર્મની રીતે લખો :

(i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32} (iii) {5, 25, 125, 625}

(iv) {2, 4, 6,…} (v) {1, 4, 9, …100}

5. નીચેના ગણોના બધા જ ઘટકો લખો :

(i) A = {x : x એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(ii) B = {x : x એ પૂર્ણાંક છે, $-\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$ }

(iii) C = {x : x એ પૂર્ણાંક છે, $x^2 \leq 4$}

(iv) D = {x : x એ "LOYAL" શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.}

(v) E = {x : x એ વર્ષનો 31 દિવસનો ન હોય તેવો મહિનો છે.}

(vi) F = {x : x એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોની ક્રમાનુસાર યાદીમાં k પહેલાંનો વ્યંજન છે.}

6. ડાબી બાજુએ યાદીની રીતે દર્શાવેલ ગણોને જમણી બાજુએ તેના જ ગુણધર્મની રીતે દર્શાવેલા ગણો સાથે સાંકળો.

(i) {1, 2, 3, 6}	(a) {x : x એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે અને 6 નો અવયવ છે.}
(ii) {2, 3}	(b) {x : x એ 10 કરતાં નાની અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}
(iii) {M,A,T,H,E,I,C,S}	(c) {x : x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને 6 નો અવયવ છે.}
(iv) {1, 3, 5, 7, 9}	(d) {x : x એ MATHEMATICS શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.}

1.3 ખાલીગણ

ગણ A = { x : x એ અત્યારે એક ચોક્કસ શાળાના ધોરણ XI માં અભ્યાસ કરતો વિદ્યાર્થી છે.} લો.

આપણે શાળાએ જઈશું અને ત્યાં ધોરણ XI માં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા ગણીશું. આમ, ગણ A નિશ્ચિત સંખ્યાના ઘટકો ધરાવે છે.

આપણે હવે નીચે પ્રમાણે બીજો ગણ B લઈએ:

B = { x : x એ અત્યારે ધોરણ X અને XI બંનેમાં અભ્યાસ કરતો વિદ્યાર્થી છે.}

આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે એક પણ વિદ્યાર્થી બંને વર્ગ X અને XI માં એક સાથે અભ્યાસ કરી શકે નહિ.

આમ, ગણ B માં એક પણ ઘટક નથી.

વ્યાખ્યા 1 *જે ગણ એક પણ ઘટક ન ધરાવતો હોય તેવા ગણને ખાલીગણ (null set) અથવા રિક્ત ગણ (Empty set or the void set) કહે છે.*

આ વ્યાખ્યા પ્રમાણે B ખાલીગણ છે, જ્યારે A ખાલીગણ નથી. ખાલીગણને સંકેતમાં ϕ અથવા { } વડે દર્શાવાય છે.

આપણે નીચે ખાલીગણનાં કેટલાંક ઉદાહરણ આપીએ :

(i) જો A = {x : $1 < x < 2$, x એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}, તો A એ ખાલીગણ છે, કારણ કે 1 અને 2 ની વચ્ચે એક પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી.

(ii) જો B = {x : $x^2 - 2 = 0$ અને x એ સંમેય સંખ્યા છે.}, તો B ખાલીગણ છે, કારણ કે કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા x એ સમીકરણ $x^2 - 2 = 0$ નું સમાધાન કરતી નથી.

(iii) જો C = {x : x એ 2 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય યુગ્મ સંખ્યા છે.}, તો C ખાલીગણ છે કારણ કે યુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યા ફક્ત 2 જ છે.

(iv) જો D = { x : $x^2 = 4$, x એ અયુગ્મ છે.}, તો D ખાલીગણ છે, કારણ કે કોઈ પણ અયુગ્મ x એ સમીકરણ $x^2 = 4$ નું સમાધાન ન કરે.

1.4 સાન્ત અને અનંત ગણો

A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {*a, b, c, d, e, g*} અને C = { હાલમાં દુનિયાના જુદા જુદા ભાગમાં રહેતા પુરુષો}

આપણે જોઈએ છીએ કે, A એ 5 ઘટકો ધરાવે છે અને B એ 6 ઘટકો ધરાવે છે. ગણ C કેટલા ઘટકો ધરાવે છે ? C ના ઘટકોની સંખ્યા આપણે જાણતાં નથી, પરંતુ તે કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને તે ખૂબ મોટી સંખ્યા હોઈ શકે. ગણ S ના ઘટકોની સંખ્યા, એટલે ગણ S ના ભિન્ન ઘટકોની સંખ્યા એમ આપણે સમજીશું અને તેને આપણે n (S) દ્વારા દર્શાવીશું. જો n (S) એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય, તો S એ *અરિક્ત સાન્ત ગણ (non-empty finite set)* કહેવાય છે.

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ લો. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આ ગણના ઘટકોની સંખ્યા સાન્ત નથી, કારણ કે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની સંખ્યા અનિશ્ચિત, અસીમિત છે. આપણે કહીશું કે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ *અનંત ગણ (infinite set)* છે. ઉપર આપેલા ગણ A, B અને C સાન્ત ગણ છે અને n(A) = 5, n(B) = 6 અને n(C) = એક નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક.

વ્યાખ્યા 2 *જે ગણ ખાલી હોય અથવા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી સભ્ય સંખ્યા ધરાવે, તે ગણને સાન્ત ગણ કહે છે, અન્યથા તે ગણને અનંત ગણ કહીશું.*

કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ :

(i) જો ગણ W એ અઠવાડિયાના દિવસોનો ગણ લઈએ, તો W સાન્ત ગણ છે.

(ii) જો S એ સમીકરણ $x^2 - 16 = 0$ ના ઉકેલોનો ગણ લઈએ, તો S એ સાન્ત ગણ છે.

(iii) G એ રેખા પરનાં બિંદુઓનો ગણ લઈએ, તો G અનંત ગણ થશે.

જ્યારે આપણે ગણને યાદીની રીતે દર્શાવીએ, ત્યારે આપણે ગણના બધા જ ઘટકોને { }કૌંસમાં લખીશું. અનંત ગણના બધાં જ ઘટકોને { } કૌંસમાં લખવાનું શક્ય નથી, કારણ કે આવા ગણની સભ્ય સંખ્યા સીમિત નથી. આથી આપણે કેટલાક અનંત ગણને યાદીની રીતે દર્શાવવા માટે તે ગણનું સ્પષ્ટ માળખું દર્શાવતા થોડાક સભ્યો લખી તે પછીના સભ્યો માટે (અથવા તે પૂર્વેના સભ્યો માટે) ત્રણ ટપકાં મૂકીશું.

ઉદાહરણ તરીકે {1, 2, 3...} એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે, {1, 3, 5, 7,...} એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો ગણ છે, {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2 , 3,...} એ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ છે. આ બધા જ ગણો અનંત ગણ છે.

નોંધ બધા જ અનંત ગણને યાદીની રીતે દર્શાવી શકાતા નથી. દાખલા તરીકે, વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને આ રીતે દર્શાવી શકાય નહિ, કારણ કે આ ગણનાં ઘટકો કોઈ નિશ્ચિત ભાતને અનુસરતાં નથી.

ઉદાહરણ 6 : નીચેના ગણોમાંથી કયા સાન્ત અને કયા અનંત ગણ છે તે નક્કી કરો :

(i) $\{x : x \in N$ અને $(x - 1)(x - 2) = 0\}$

(ii) $\{x : x \in N$ અને $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in N$ અને $2x - 1 = 0\}$

(iv) $\{x : x \in N$ અને x અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$

(v) $\{x : x \in N$ અને x અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.$\}$

ઉકેલ : (i) આપેલ ગણ = $\{1, 2\}$. આથી, તે સાન્ત ગણ છે.

(ii) આપેલ ગણ = $\{2\}$. આથી, તે સાન્તગણ છે.

(iii) આપેલ ગણ = ϕ. આથી, તે સાન્તગણ છે.

(iv) આપેલ ગણ એ બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ છે અને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની સંખ્યા અનંત છે. આથી આપેલ ગણ અનંત ગણ છે.

(v) અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંકોની સંખ્યા અનંત હોવાથી, આપેલ ગણ અનંત ગણ છે.

1.5 સમાન ગણ

આપેલ બે ગણ A અને B માટે, જો A નો પ્રત્યેક ઘટક એ B નો પણ ઘટક હોય તથા B નો પ્રત્યેક ઘટક એ A નો પણ ઘટક હોય, તો ગણ A અને B ને સમાન ગણ કહેવાય. એ સ્પષ્ટ છે કે, બંને ગણમાં યથાર્થ રીતે એકના એક જ ઘટકો છે.

વ્યાખ્યા 3 *જો બે ગણ A અને B ને યથાર્થ રીતે એકના એક જ ઘટકો હોય, તો A અને B સમાન ગણો કહેવાય અને આપણે $A = B$ પ્રમાણે લખીશું. નહિ તો, આ ગણોને અસમાન ગણ કહીશું અને આપણે $A \neq B$ લખીશું.*

આપણે નીચેનાં ઉદાહરણ લઈશું :

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ અને $B = \{3, 1, 4, 2\}$ લઈએ તો $A = B$.

(ii) ધારો કે A એ 6 કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ છે અને P એ 30 ના અવિભાજ્ય અવયવોનો ગણ છે. ફક્ત 2, 3 અને 5 એ 30 ના અવિભાજ્ય અવયવો છે તથા તેઓ 6 કરતાં નાના છે. વળી 6 કરતાં નાની પ્રત્યેક અવિભાજ્ય સંખ્યા એ 30 નો અવયવ છે. આથી A અને P સમાન છે.

નોંધ : જો ગણમાં એક અથવા વધારે ઘટકોનું પુનરાવર્તન થાય, તો ગણ બદલાતો નથી. દાખલા તરીકે, ગણ $A = \{1, 2, 3\}$ અને $B = \{2, 2, 1, 3, 3\}$ સમાન છે, કારણ કે ગણ A નો દરેક ઘટક ગણ B માં છે અને આથી ઊલટું પણ સત્ય છે. આ કારણે આપણે ગણ દર્શાવતી વખતે મહદંશે ઘટકનું પુનરાવર્તન કરતાં નથી.

ઉદાહરણ 7 : સમાન ગણોની જોડી શોધો (જો હોય તો). તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.

$A = \{0\}$, $B = \{x : x > 15$ અને $x < 5\}$,

$C = \{x : x - 5 = 0\}$, $D = \{x : x^2 = 25\}$,

$E = \{x : x$ એ સમીકરણ $x^2 - 2x - 15 = 0$ નું ધન પૂર્ણાંક બીજ છે.$\}$

ઉકેલ: $0 \in A$ અને B, C, D અને E પૈકી કોઈ પણ ગણમાં 0 આવેલો નથી. આથી આ દર્શાવે છે કે $A \neq B$, $A \neq C$, $A \neq D$, $A \neq E$.

$B = \phi$ પરંતુ બાકીના કોઈ પણ ગણ ખાલીગણ નથી. માટે $B \neq C$, $B \neq D$ અને $B \neq E$. $C = \{5\}$, પરંતુ $-5 \in D$ પણ છે. આથી $C \neq D$.

$E = \{5\}$, $C = E$ તથા $D = \{-5, 5\}$ અને $E = \{5\}$. આપણે જોઈ શકીએ કે $D \neq E$. આમ, સમાન ગણોની ફક્ત એક જ જોડી C અને E ની છે.

ઉદાહરણ 8 : નીચેનામાંથી કઈ જોડીના ગણ સમાન છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

(i) "ALLOY" ના મૂળાક્ષરોનો ગણ X અને "LOYAL" ના મૂળાક્ષરોનો ગણ B છે.

(ii) $A = \{n : n \in Z$ અને $n^2 \leq 4\}$ અને $B = \{x : x \in R$ અને $x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

ઉકેલ : (i) અહીં, $X = \{A, L, L, O, Y\}$, $B = \{L, O, Y, A, L\}$. ગણમાં ઘટકોનું પુનરાવર્તન ગણને બદલતું ન હોવાથી X અને B સમાન ગણ છે. આમ, $X = \{A, L, O, Y\} = B$.

(ii) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$. $0 \in A$ અને $0 \notin B$, હોવાથી A અને B સમાન ગણો નથી.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. નીચેનામાંથી કયા ગણ ખાલીગણનાં ઉદાહરણ છે ?

(i) 2 વડે વિભાજ્ય અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ

(ii) યુગ્મ અવિભાજ્ય પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ

(iii) $\{ x : x$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, $x < 5$ અને $x > 7 \}$

(iv) $\{ y : y$ એ બે ભિન્ન સમાંતર રેખાઓનું સામાન્ય બિંદુ છે.$\}$

2. નીચેનામાંથી કયા ગણ સાન્ત ગણ અને કયા ગણ અનંત ગણ છે ?

(i) વર્ષના મહિનાઓનો ગણ

(ii) $\{1, 2, 3, \ldots\}$

(iii) $\{1, 2, 3, \ldots 99, 100\}$

(iv) 100 કરતાં મોટા ધન પૂર્ણાંકોનો ગણ

(v) 99 કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ

3. નીચેના ગણોમાંથી કયા ગણ સાન્ત અને કયા ગણ અનંત છે તે શોધો.

(i) x-અક્ષને સમાંતર રેખાઓનો ગણ

(ii) અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોનો ગણ

(iii) 5 ની ગુણિત સંખ્યાઓનો ગણ

(iv) પૃથ્વી પર વસતાં પ્રાણીઓનો ગણ

(v) ઊગમબિંદુ (0,0) માંથી પસાર થતાં વર્તુળોનો ગણ

4. નીચેનામાંથી નક્કી કરો કે A = B છે કે નહિ :

(i) $A = \{ a, b, c, d \}$, $B = \{ d, c, b, a \}$

(ii) $A = \{ 4, 8, 12, 16 \}$, $B = \{ 8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{ x : x$ એ યુગ્મ ધન પૂર્ણાંક છે અને $x \leq 10\}$

(iv) $A = \{ x : x$ એ 10 નો ગુણિત છે$\}$, $B = \{ 10, 15, 20, 25, 30,...\}$

5. નીચે આપેલી જોડીઓના ગણ સમાન છે ? કારણ આપો :

(i) $A = \{2, 3\}$, $B = \{x : x$ એ $x^2 + 5x + 6 = 0$ નો ઉકેલ છે.$\}$

(ii) $A = \{ x : x$ એ FOLLOW શબ્દનો મૂળાક્ષર છે$\}$, $B = \{ y : y$ એ WOLF શબ્દનો મૂળાક્ષર છે.$\}$

6. નીચે આપેલ ગણમાંથી સમાન ગણ પસંદ કરો :

$A = \{ 2, 4, 8, 12\}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{ 4, 8, 12, 14\}$, $D = \{ 3, 1, 4, 2\}$

$E = \{-1, 1\}$, $F = \{ 0, a\}$, $G = \{1, -1\}$, $H = \{ 0, 1\}$

1.6 ઉપગણ

ધારો કે ગણ X = તમારી શાળાના તમામ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ તથા Y = તમારા વર્ગના તમામ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ.

આપણે નોંધીશું કે ગણ Y નો દરેક ઘટક એ ગણ X નો પણ ઘટક છે. આપણે કહીશું કે, ગણ Y એ X નો ઉપગણ છે. Y એ X નો ***ઉપગણ*** (*Subset*) છે તે હકીકતને આપણે સંકેતમાં $Y \subset X$ થી દર્શાવીશું. સંકેત $\subset$ એ શબ્દસમૂહ ''ઉપગણ છે'' અથવા ''માં સમાવિષ્ટ છે'' (''*is a subset of*'' અથવા ''*is contained in*'') માટે ઉપયોગ કરીશું.

વ્યાખ્યા 4 *જો ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક એ ગણ B નો પણ ઘટક હોય તો ગણ A ને ગણ B નો ઉપગણ કહેવાય. બીજી રીતે કહીએ તો, જ્યારે $a \in A$ હોય ત્યારે $a \in B$ હોય તો $A \subset B$ થાય.*

ઘણી વખત સંજ્ઞા "$\Rightarrow$" વાપરવી અનુકૂળ હોય છે. તેનો અર્થ પ્રેરણ (implies) કરીશું. આ સંજ્ઞાનો ઉપયોગ કરી, આપણે ઉપગણની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે લખીશું :

જો $a \in A \Rightarrow a \in B$, તો $A \subset B$.

આપણે ઉપરનું વાક્ય આ પ્રમાણે વાંચીશું. ''*જો પ્રત્યેક a માટે, a એ A નો ઘટક હોય, તો a એ B નો પણ ઘટક છે*'' એવું બને તો A એ B નો ઉપગણ છે. જો A એ B નો ઉપગણ ન હોય તો આપણે $A \not\subset B$ લખીશું.

આપણે નોંધીશું કે, A ને B નો ઉપગણ થવા માટે એ જરૂરી છે કે A નો દરેક ઘટક B માં હોવો જોઈએ. B નો દરેક ઘટક A માં હોય અથવા ન પણ હોય તેમ શક્ય છે. જો B નો દરેક ઘટક A માં પણ હોય તેવું શક્ય બને તો આપણે $B \subset A$ લખીશું. આવા કિસ્સામાં A અને B સમાન ગણો થશે, એટલે કે $A \subset B$ અને $B \subset A \Leftrightarrow A = B$,

અહીં "$\Leftrightarrow$" એ ***દ્વિપ્રેરણ*** *(two way implication)* માટેનો સંકેત છે. તેને આપણે સામાન્ય રીતે *"તો અને તો જ" (if and only if ટૂંકમાં, "iff")* પ્રમાણે વાંચીશું.

ઉપરની વ્યાખ્યા પરથી ફલિત થાય છે કે, દરેક ગણ A પોતે પોતાનો ઉપગણ છે, એટલે કે $A \subset A$. ખાલીગણ ϕ ને એક પણ ઘટક નથી. આથી આપણે સંમત થઈશું કે, ϕ એ દરેક ગણનો ઉપગણ છે. હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈશું :

(i) સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ **Q** એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ **R** નો ઉપગણ છે અને આપણે $\mathbf{Q} \subset R$ લખીશું.

(ii) જો 56 ના ધન પૂર્ણાંક અવયવોનો ગણ A અને 56ના ધન અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક અવયવોનો ગણ B હોય, તો B એ A નો ઉપગણ થશે અને આપણે $B \subset A$ લખીશું.

(iii) જો $A = \{1, 3, 5\}$ અને $B = \{x : x$ એ 6 કરતાં નાની અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$ લઈએ, તો $A \subset B$ અને $B \subset A$ અને આથી $A = B$.

(iv) $A = \{ a, e, i, o, u\}$ અને $B = \{ a, b, c, d\}$ લેતાં, A એ B નો ઉપગણ નથી. B પણ A નો ઉપગણ નથી.

ધારો કે A અને B બે ગણ છે. જો $A \subset B$ અને $A \neq B$ હોય, તો A ને B નો ***ઉચિત ઉપગણ*** *(Proper Subset)* કહે છે અને B ને A નો ***અધિગણ*** *(superset)* કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

$A = \{1, 2, 3\}$ એ ગણ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ નો **ઉચિત ઉપગણ** છે.

જો ગણ A ને એક જ સભ્ય હોય તો તેને ***એકાકી*** *(singleton)* કહે છે. આમ, $\{ a \}$ એ એકાકી છે.

ઉદાહરણ 9 : ગણ ϕ, $A = \{ 1, 3 \}$, $B = \{1, 5, 9\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ આપેલા છે.

નીચે દર્શાવેલી દરેક ગણની જોડીની વચ્ચે સંજ્ઞા $\subset$ અથવા $\not\subset$ સમાવિષ્ટ કરો :

(i) ϕ...B (ii) A...B (iii) A...C (iv) B...C

ઉકેલ: (i) ϕ એ દરેક ગણનો ઉપગણ છે, આથી $\phi \subset B$.

(ii) $3 \in A$ અને $3 \notin B$. આથી $A \not\subset B$.

(iii) $A \subset C$ કારણ કે $1, 3 \in A$ અને 1, 3 એ C માં પણ છે.

(iv) $B \subset C$ કારણ કે B નો દરેક ઘટક એ C નો પણ ઘટક છે.

ઉદાહરણ 10 : $A = \{ a, e, i, o, u\}$ અને $B = \{ a, b, c, d\}$ લો. A એ B નો ઉપગણ છે ? ના (શા માટે ?). B એ Aનો ઉપગણ છે ? ના (શા માટે ?)

ઉદાહરણ 11 : A, B અને C ત્રણ ગણ છે. જો $A \in B$ અને $B \subset C$ તો $A \subset C$ સાચું છે ? જો તમારો ઉત્તર 'ના' હોય, તો ઉદાહરણ આપો.

ઉકેલ : ના. ધારો કે $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ અને $C = \{\{1\}, 2, 3\}$. અહીં $A = \{1\}$ હોવાથી $A \in B$ અને $B \subset C$. પરંતુ $A \not\subset C$ કારણ કે $1 \in A$ અને $1 \notin C$.

આપણે નોંધીશું કે ગણનો ઘટક એ પોતે પોતાનો ઉપગણ નથી.

1.6.1 વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણના ઉપગણો

વિભાગ 1.6 માં નોંધ્યા પ્રમાણે **R** ને ઘણા અગત્યના ઉપગણો છે. આપણે આવા કેટલાક ઉપગણોનું નીચે પ્રમાણે નામકરણ કરીશું :

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{Q} = \{x : x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}$ અને $q \neq 0\}$

તેને આ પ્રમાણે વાંચીશું "p અને q પૂર્ણાંક હોય તથા q શૂન્યેતર હોય તેવા અપૂર્ણાંકો $\frac{p}{q}$ નો ગણ **Q** છે." **Q** માં -5 છે. (તેને $\frac{-5}{1}$ સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરી શકાય.) $\frac{5}{7}, 3\frac{1}{2}$ (તેને $\frac{7}{2}$ સ્વરૂપે અભિવ્યક્ત કરી શકાય.) અને $-\frac{11}{3}$ સભ્યોનો સમાવેશ પણ **Q** માં કરી શકાય.

અસંમેય સંખ્યાઓના ગણને **T** દ્વારા દર્શાવીશું. ગણ **T** એ સંમેય સંખ્યાઓ સિવાયની બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો બનેલો છે. આમ, $\mathbf{T} = \{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \notin \mathbf{Q}\}$, એટલે કે **T** સંમેય ન હોય તેવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. સભ્યો $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ અને π નો **T** માં સમાવેશ થાય છે.

આ ઉપગણોના કેટલાક સ્વયંસ્પષ્ટ સંબંધો :

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \mathbf{T} \subset \mathbf{R}, \mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}$.

1.6.2 R ના ઉપગણો તરીકે અંતરાલ

ધારો કે $a, b \in \mathbf{R}$ અને $a < b$. વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ $\{y : a < y < b\}$ ને ***વિવૃત્ત અંતરાલ (open interval)*** કહે છે અને તેને (a, b) વડે દર્શાવાય છે. a અને b વચ્ચેનાં તમામ બિંદુઓ વિવૃત્ત અંતરાલ (a, b) માં આવેલાં છે. પરંતુ a અને b પોતે આ અંતરાલમાં નથી.

જે અંતરાલમાં તેનાં અંત્યબિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે તેને ***સંવૃત્ત અંતરાલ (closed interval)*** કહે છે અને તેને $[a, b]$ વડે દર્શાવાય છે. આમ, $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$.

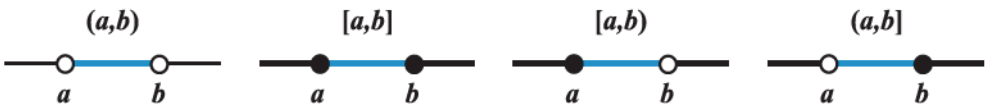
એક અંત્યબિંદુએ સંવૃત્ત અને બીજા અંત્યબિંદુએ વિવૃત્ત હોય એવા અંતરાલો પણ આપણી પાસે છે. એટલે કે,

$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$ એ a નો સમાવેશ કરતો હોય અને b નો સમાવેશ કરતો ના હોય તેવો a થી b સુધીનો વિવૃત્ત અંતરાલ $[a, b)$ છે.

$(a, b] = \{ x : a < x \le b \}$ એ b ને સમાવતો અને a ને ન સમાવતો a થી b સુધીનો વિવૃત્ત અંતરાલ છે.

વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણના ઉપગણને નિર્દેશિત કરવા માટે આ સંજ્ઞાઓ બીજું ભિન્ન સ્વરૂપ પૂરું પાડે છે. ઉદાહરણ તરીકે જો $A = (-3, 5)$ અને $B = [-7, 9]$, તો $A \subset B$. ગણ $[0, \infty)$ એ અનૃણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ વ્યાખ્યાયિત કરે છે. ગણ $(-\infty, 0)$ એ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને વ્યાખ્યાયિત કરે છે. ગણ $(-\infty, \infty)$ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ દર્શાવે છે. તે $-\infty$ થી ∞ સુધી લંબાવેલ રેખા પરનાં બિંદુઓનો ગણ દર્શાવે છે.

ઉપર વર્ણવેલા **R** ના જુદાં-જુદાં અંતરાલોને સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 1.1 પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.



આકૃતિ 1.1

અહીં, આપણે નોંધીશું કે, અંતરાલ એ અનંત સંખ્યામાં બિંદુઓનો સમાવેશ કરે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, ગુણધર્મની રીતે દર્શાવેલ ગણ $\{x : x \in \mathbf{R}, -5 < x \le 7\}$, ને અંતરાલ સ્વરૂપમાં $(-5, 7]$ અને અંતરાલ $[-3, 5)$ ને ગુણધર્મની રીતે $\{x : x \in \mathbf{R}, -3 \le x < 5\}$ પ્રમાણે લખી શકાય.

સંખ્યા $(b - a)$ ને કોઈ પણ અંતરાલ (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ અથવા $(a, b]$ ની લંબાઈ કહે છે.

1.7 ઘાતગણ

ગણ $\{1, 2\}$ લો. ગણ $\{1, 2\}$ ના બધા જ ઉપગણ લખીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે ϕ એ દરેક ગણનો ઉપગણ છે. આથી ϕ એ $\{1, 2\}$ નો ઉપગણ છે. આપણે જોઈ શકીએ કે $\{1\}$ અને $\{ 2 \}$ પણ ગણ $\{1, 2\}$ ના ઉપગણ છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, દરેક ગણ પોતે એ પોતાનો ઉપગણ છે. આથી $\{ 1, 2 \}$ એ $\{1, 2\}$ નો ઉપગણ છે. આમ, એકંદરે ગણ $\{ 1, 2 \}$ ને ચાર ઉપગણો, ϕ , $\{ 1 \}$, $\{ 2 \}$ અને $\{ 1, 2 \}$ છે. આ તમામ ઉપગણોના ગણને $\{ 1, 2 \}$ નો ઘાતગણ કહીશું.

વ્યાખ્યા 5 : *ગણ A ના તમામ ઉપગણોથી બનતા ગણને A નો* ***ઘાતગણ (power set)*** *કહે છે. તેને $P(A)$ વડે દર્શાવાય છે. $P(A)$ નો દરેક ઘટક એ ગણ છે.*

આમ, ઉપર જણાવ્યા પ્રમાણે, જો $A = \{ 1, 2 \}$, તો

$$P(A) = \{ \phi, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{1,2 \}\}$$

એ પણ નોંધીશું કે $n [P (A)] = 4 = 2^2$

વ્યાપક સ્વરૂપે, જો ગણ A માટે $n(A) = m$, તો $n [P(A)] = 2^m$ બતાવી શકાય.

1.8 સાર્વત્રિક ગણ

સામાન્યતઃ કોઈ વિશિષ્ટ સંદર્ભમાં આપણે એક નિશ્ચિત મૂળભૂત ગણના ઉપગણો અને ઘટકો સાથે કામ કરતા હોઈએ છીએ અને તે વિશિષ્ટ સંદર્ભમાં સુસંગત હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યારે સંખ્યા સંહતિનો અભ્યાસ કરતાં

હોઈએ ત્યારે આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણ અને તેના ઉપગણો જેમકે, અવિભાજય સંખ્યાઓના ગણ, યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગણ અને આવા બધામાં આપણે રસ લેતાં હોઈએ છીએ. આવા મૂળભૂત ગણને *"સાર્વત્રિક ગણ" (Universal Set)* કહે છે. સાર્વત્રિક ગણને સામાન્ય રીતે U દ્વારા અને તેના બધા ઉપગણોને A, B, C વગેરે મૂળાક્ષરો દ્વારા દર્શાવીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગણ માટે સાર્વત્રિક ગણ તરીકે સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ અથવા વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ R હોઈ શકે. બીજા ઉદાહરણ તરીકે વસતી-ગણતરીના અભ્યાસમાં દુનિયાની બધી જ વ્યક્તિઓના ગણને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈ શકાય.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. નીચેનાં વિધાનો સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યામાં સંજ્ઞા $\subset$ અથવા $\not\subset$ પૂરો :

(i) $\{ 2, 3, 4 \} \ldots \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

(ii) $\{ a, b, c \} \ldots \{ b, c, d \}$

(iii) $\{x : x$ એ તમારી શાળાનો ધોરણ XI નો વિદ્યાર્થી છે.$\} \ldots \{x : x$ એ તમારી શાળાનો વિદ્યાર્થી છે.$\}$

(iv) $\{x : x$ સમતલમાં વર્તુળ છે.$\} \ldots \{x : x$ એ આ જ સમતલનું 1 એકમ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ છે.$\}$

(v) $\{x : x$ એ સમતલમાં ત્રિકોણ છે.$\} \ldots \{x : x$ એ સમતલમાં લંબચોરસ છે.$\}$

(vi) $\{x : x$ એ સમતલમાં સમબાજુ ત્રિકોણ છે.$\} \ldots \{x : x$ એ આ જ સમતલનો ત્રિકોણ છે.$\}$

(vii) $\{x : x$ એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\} \ldots \{x : x$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.$\}$

2. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તેની ચકાસણી કરો :

(i) $\{ a, b \} \not\subset \{ b, c, a \}$

(ii) $\{ a, e \} \subset \{ x : x$ એ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો પૈકીનો એક સ્વર છે.$\}$

(iii) $\{ 1, 2, 3 \} \subset \{ 1, 3, 5 \}$

(iv) $\{ a \} \subset \{ a, b, c \}$

(v) $\{ a \} \in \{ a, b, c \}$

(vi) $\{ x : x$ એ 6 કરતાં નાની યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\} \subset \{ x : x$ એ 36 નો અવયવ હોય તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$

3. $A = \{ 1, 2, \{ 3, 4 \}, 5 \}$ છે. નીચેનાં વિધાનો પૈકી કયાં વિધાનો અસત્ય છે અને શા માટે ?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$ (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$

(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$ (ix) $\phi \in A$

(x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

4. નીચે આપેલા ગણોના તમામ ઉપગણો લખો :

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

5. જો $A = \phi$ હોય, તો $P(A)$ ને કેટલા ઘટકો હશે ?

6. નીચેનાને અંતરાલ સ્વરૂપે લખો :

(i) $\{x : x \in R, -4 < x \leq 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 \leq x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 \leq x \leq 4\}$

7. નીચે આપેલા અંતરાલોને ગુણધર્મની રીતે લખો :

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6, 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

8. નીચેનાં વિધાનો માટે તમે કયા ગણને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે પસંદ કરશો :

(i) કાટકોણ ત્રિકોણોનો ગણ (ii) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણોનો ગણ

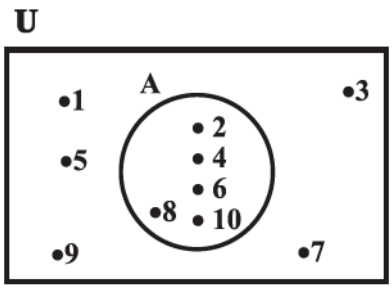
9. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ અને $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, આપેલ ગણ છે. આ ત્રણ ગણ A, B અને C માટે નીચેનામાંથી કયા ગણને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈ શકાય.

(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) ϕ

(iii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (iv) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

1.9 વેન-આકૃતિ

ગણો વચ્ચેના ઘણાખરા સંબંધોને આકૃતિઓ દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. તેમને આપણે ***વેન આકૃતિઓ*** *(Venn diagrams)* થી જાણીએ છીએ. અંગ્રેજી તર્કશાસ્ત્રી ***John Venn*** (1834-1883) ના નામ પરથી તેમને વેન આકૃતિ નામ આપ્યું છે. આ આકૃતિઓ લંબચોરસ અને બંધ વક્રો, મહદંશે વર્તુળોની બનેલી છે. સામાન્ય રીતે સાર્વત્રિક ગણને લંબચોરસ અને તેના ઉપગણોને વર્તુળ દ્વારા દર્શાવાય છે.



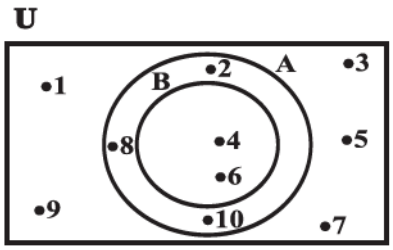
આકૃતિ 1.2

વેન-આકૃતિઓમાં ગણના ઘટકોને તેમને અનુરૂપ વર્તુળમાં દર્શાવાય છે. (આકૃતિ 1.2 અને 1.3.)

દ્રષ્ટાંત 1 : આકૃતિ 1.2 માં, $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ એ સાર્વત્રિક ગણ છે અને

$A = \{2,4,6,8,10\}$ એ તેનો ઉપગણ છે.

દ્રષ્ટાંત 2 : આકૃતિ 1.3 માં, $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ એ સાર્વત્રિક ગણ છે અને $A = \{2,4,6,8,10\}$ અને $B = \{4, 6\}$ તેના ઉપગણો છે તથા $B \subset A$ પણ છે.



આકૃતિ 1.3

જ્યારે આપણે યોગગણ, છેદગણ અને તફાવત ગણની ચર્ચા કરીશું, ત્યારે વેન-આકૃતિનો વ્યાપક ઉપયોગ જોઈ શકીશું.

1.10 ગણક્રિયાઓ

આગળના વર્ગોમાં આપણે સંખ્યાઓ પર સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારની ક્રિયાઓ કેવી રીતે કરવી તેનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે દરેક ક્રિયા કરવા માટે બે સંખ્યાઓની જોડ લઈ તે પરથી અન્ય સંખ્યા મેળવતા હતા. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યારે આપણે સંખ્યાઓ 5 અને 13 ની જોડ પર સરવાળાની ક્રિયા કરીએ તો આપણને સંખ્યા 18 મળે. ફરીથી જોતાં આપણે સંખ્યાઓ 5 અને 13 ની જોડ પર ગુણાકારની ક્રિયા કરીએ તો આપણને 65 મળે. તે જ પ્રમાણે બે ગણ પર કેટલીક ક્રિયાઓ કરવાથી એક ગણ મળે. હવે આપણે ગણ પર ચોક્કસ ક્રિયાઓ કરીએ અને તેમના ગુણધર્મ ચકાસીએ. હવેથી આપણે બધા જ ગણોનો સંદર્ભ કોઈક સાર્વત્રિક ગણના ઉપગણ તરીકે લઈશું.

1.10.1 યોગગણ : ધારો કે A અને B કોઈક ગણ છે. A અને B નો *યોગગણ (union set)* એટલે કે A ના તમામ ઘટકો તથા B ના તમામ ઘટકો તથા તેમના સામાન્ય ઘટકોને ફક્ત એક વખત લેવાથી બનતો ગણ. યોગગણ દર્શાવવા માટે સંકેત '$\cup$' નો ઉપયોગ થાય છે. સાંકેતિક રીતે, આપણે A તથા B ના યોગગણ માટે $A \cup B$ લખીશું. $A \cup B$ ને આપણે *A યોગ B (A union B)* વાંચીશું.

ઉદાહરણ 12 : $A = \{2, 4, 6, 8\}$ અને $B = \{6, 8, 10, 12\}$ છે. $A \cup B$ મેળવો.

ઉકેલ : આપણને $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ મળશે. આપણે નોંધીએ કે $A \cup B$ લખતી વખતે સામાન્ય ઘટકો 6 અને 8 ને એક જ વખત લીધા છે.

ઉદાહરણ 13 : $A = \{a, e, i, o, u\}$ અને $B = \{a, i, u\}$ છે. બતાવો કે $A \cup B = A$.

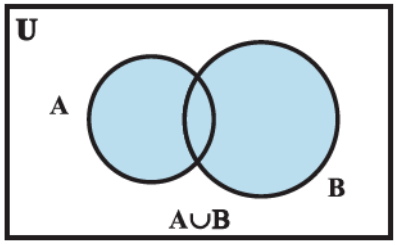
ઉકેલ : આપણને $A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$ મળશે. આ ઉદાહરણ દર્શાવે છે કે, ગણ A અને તેના ઉપગણનો યોગ A પોતે જ છે, એટલે કે $B \subset A$, તો $A \cup B = A$ થાય.

ઉદાહરણ 14 : શાળાની હૉકી ટીમમાં રમતા ધોરણ XI ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ X = { રામ, ગીતા, અકબર} છે. શાળાની ફૂટબૉલની ટીમમાં રમતા ધોરણ XI ના વિદ્યાર્થીઓનો ગણ Y = { ગીતા, ડેવિડ, અશોક} છે. $X \cup Y$ શોધો, અને તેનું અર્થઘટન કરો.

ઉકેલ : $X \cup Y$ = {રામ, ગીતા, અકબર, ડેવિડ, અશોક} થશે. ધોરણ XI ના જે વિદ્યાર્થીઓ હૉકી ટીમમાં અથવા ફૂટબૉલ ટીમમાં અથવા બંનેમાં છે તેવા વિદ્યાર્થીઓનો આ ગણ છે.

આમ, આપણે બે ગણના યોગગણને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીશું :

વ્યાખ્યા 6 *ગણ A અથવા ગણ B માં આવેલા (બંને ગણમાં હોય તે સહિત) તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A અને B નો યોગગણ કહે છે. સંકેતમાં આપણે* $A \cup B = \{x : x \in A$ *અથવા* $x \in B\}$ *લખીશું.*



આકૃતિ 1.4

બંને ગણના યોગગણને આકૃતિ 1.4. માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની વેન-આકૃતિ દ્વારા રજૂ કરીશું.

આકૃતિ 1.4 નો રંગીન કરેલ ભાગ $A \cup B$ દર્શાવે છે.

યોગક્રિયાના કેટલાક ગુણધર્મો

(i) $A \cup B = B \cup A$ (*ક્રમનો નિયમ*) (*Commutative law*)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (*જૂથનો નિયમ*) (*Associative law*)

(iii) $A \cup \phi = A$ (*એકમ ઘટકનો નિયમ, ϕ એ $\cup$ નો એકમ ઘટક છે.*) (*identity element*)

(iv) $A \cup A = A$ (*સ્વયંઘાતી નિયમ - Idempotent law*)

(v) $U \cup A = U$ (*U નો નિયમ*)

1.10.2 છેદગણ : ગણ A અને B નો *છેદગણ* (*Intersection set*) એ બંને ગણ A અને B ના તમામ સામાન્ય ઘટકોથી બનતો ગણ છે. છેદગણ દર્શાવવા સંકેત '$\cap$' નો ઉપયોગ થાય છે. A અને B નો છેદગણ એ A અને B બંનેમાં આવેલા હોય એવા ઘટકોથી બનતો ગણ છે. સાંકેતિક રીતે $A \cap B = \{x : x \in A$ અને $x \in B\}$ લખાય.

ઉદાહરણ 15 : ઉદાહરણ 12 માં આપેલા ગણ A અને B માટે $A \cap B$ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જોઈ શકીએ છે કે ફક્ત 6, 8 એ બંને ગણ A અને B ના સામાન્ય ઘટકો છે. આથી $A \cap B = \{6, 8\}$.

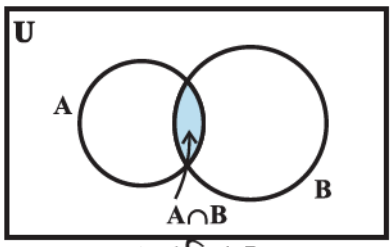
ઉદાહરણ 16 : ઉદાહરણ 14 ના ગણો X અને Y માટે $X \cap Y$ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જોઈશું ''ગીતા'' એ બંને ગણોનો એક માત્ર સામાન્ય ઘટક છે. આથી $X \cap Y = \{$ગીતા$\}$.

ઉદાહરણ 17 : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ અને $B = \{2, 3, 5, 7\}$ માટે $A \cap B$ શોધો અને તે પરથી બતાવો કે $A \cap B = B$.

ઉકેલ : $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\} = B$ મળશે. આપણે નોંધીએ કે $B \subset A$ છે અને તેથી $A \cap B = B$.

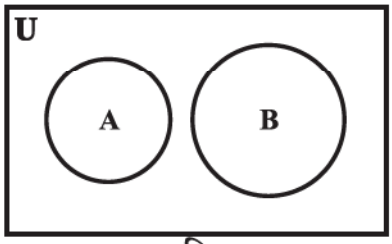
વ્યાખ્યા 7 *બે ગણ A અને B નો છેદગણ એટલે કે A અને B બંને ગણમાં આવેલા તમામ ઘટકોથી બનતો ગણ. સંકેતમાં આપણે $A \cap B = \{x : x \in A$ અને $x \in B\}$ લખીશું.* આકૃતિ 1.5 માં રંગીન ભાગ A અને B નો છેદગણ બતાવે છે.



આકૃતિ 1.5

જો ગણો A અને B માટે $A \cap B = \phi$, તો A અને B ને પરસ્પર ***અલગગણ*** (*disjoint sets*) કહેવાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ અને $B = \{1, 3, 5, 7\}$ તો A અને B પરસ્પર અલગગણ છે. કારણ કે, A અને B માં સામાન્ય હોય તેવો એક પણ ઘટક નથી. પરસ્પર અલગગણની વેન-આકૃતિ, આકૃતિ 1.6 પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ 1.6

છેદક્રિયાના કેટલાક ગુણધર્મો

(i) $A \cap B = B \cap A$ (ક્રમનો નિયમ)

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (જૂથનો નિયમ)

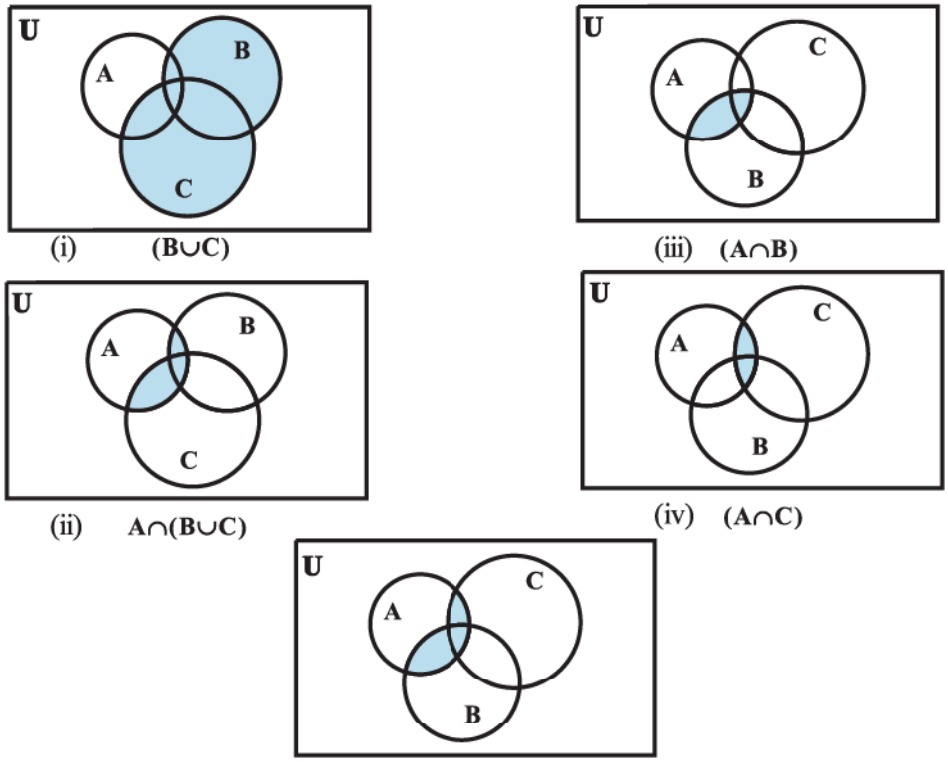
(iii) $\phi \cap A = \phi$, $U \cap A = A$ (ϕ અને U નો નિયમ)

(iv) $A \cap A = A$ (સ્વયંઘાતી નિયમ)

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ એટલે કે છેદક્રિયા એ યોગક્રિયા પર વિભાજન કરે છે.

(*વિભાજનનો નિયમ, Distributive law*)

નીચે દર્શાવેલ વેન-આકૃતિઓ પરથી ઉપરના નિયમો વધુ સ્પષ્ટ થશે.



(i) to (v)

આકૃતિ 1.7

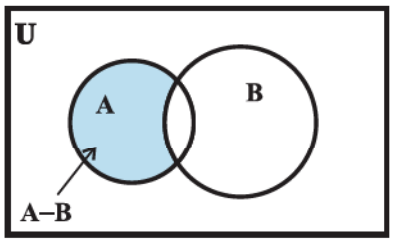
1.10.3 તફાવત ગણ : *ગણ A અને ગણ B નો આ ક્રમમાં* ***તફાવત ગણ*** *(Difference set) એટલે ગણ B માં ન હોય તેવા ગણ A ના ઘટકોથી બનતો ગણ. સાંકેતિક રીતે આપણે તેને A – B દ્વારા દર્શાવીશું અને "A minus B" વાંચીશું.*

ઉદાહરણ 18 : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ લો. $A - B$ અને $B - A$ શોધો.

ઉકેલ : ઘટકો 1, 3, 5 ગણ A માં છે, પરંતુ B માં નથી. આથી આપણને $A - B = \{1, 3, 5\}$ મળશે અને $B - A = \{8\}$ થશે, કારણ કે 8 એ B માં છે પરંતુ A માં નથી. આપણે નોંધીશું કે $A - B \neq B - A$.

ઉદાહરણ 19 : $V = \{a, e, i, o, u\}$ અને $B = \{a, i, k, u\}$ છે. $V - B$ અને $B - V$ શોધો.

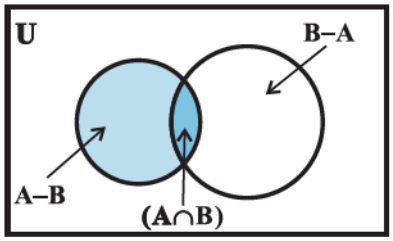
ઉકેલ : ઘટકો e, o, V માં છે, પરંતુ B માં નથી. આથી $V - B = \{e, o\}$ મળશે અને ઘટક k ગણ B માં છે, પરંતુ V માં નથી. આથી $B - V = \{k\}$.



આકૃતિ 1.8

આપણે નોંધીશું કે $V - B \neq B - V$. ગુણધર્મની રીતે આપણે તફાવત ગણની વ્યાખ્યાને ફરીથી $A - B = \{x : x \in A$ અને $x \notin B\}$ લખીશું.

બે ગણ A અને B ના તફાવત ગણની વેન-આકૃતિને આકૃતિ 1.8 પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.



આકૃતિ 1.9

આકૃતિ 1.8 માં રંગીન ભાગ એ ગણો A અને B નો તફાવત ગણ દર્શાવે છે.

ટિપ્પણી : ગણો $A - B$, $A \cap B$ અને $B - A$ પરસ્પર અલગગણ છે. એટલે કે, આકૃતિ 1.9 માં બતાવ્યા પ્રમાણે આ ગણોમાંથી કોઈ પણ બે ગણનો છેદગણ ખાલીગણ છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. નીચે આપેલી જોડીઓના ગણોનો યોગગણ લખો :

(i) $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$

(ii) $A = [\ a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c\}$

(iii) $A = \{x : x$ એ 3 ની ગુણિત પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$, $B = \{x : x$ એ 6 થી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.$\}$

(iv) $A = \{x : x$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $1 < x \leq 6\}$, $B = \{x : x$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $6 < x < 10\}$

(v) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \phi$

2. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ લો. $A \subset B$ છે ? $A \cup B$ શું થશે ?

3. જો $A \subset B$ હોય તેવા બે ગણ આપ્યા હોય, તો $A \cup B$ શું થશે ?

4. જો $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ અને $D = \{7, 8, 9, 10\}$ હોય, તો નીચેના ગણ શોધો :

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cup C$ (iv) $B \cup D$

(v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cup B \cup D$ (vii) $B \cup C \cup D$

5. પ્રશ્ન 1 માં આપેલી જોડીઓના ગણોનો છેદગણ શોધો.

6. જો $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{7, 9, 11, 13\}$, $C = \{11, 13, 15\}$ અને $D = \{15, 17\}$; હોય, તો નીચેના ગણ શોધો :

(i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap C \cap D$

(iv) $A \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $A \cap (B \cup C)$

(vii) $A \cap D$ (viii) $A \cap (B \cup D)$ (ix) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$

(x) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

7. જો $A = \{x : x$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે$\}$, $B = \{x : x$ એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે$\}$, $C = \{x : x$ એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે$\}$ અને $D = \{x : x$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે$\}$, તો નીચેના ગણ મેળવો :

(i) $A \cap B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $A \cap D$

(iv) $B \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $C \cap D$

8. નીચેના ગણોની જોડીઓમાંથી કઈ જોડના ગણ પરસ્પર અલગગણ છે ?

(i) $\{1, 2, 3, 4\}$ અને $\{x : x$ એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, $4 \leq x \leq 6\}$

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ અને $\{c, d, e, f\}$

(iii) $\{x : x$ એ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે$\}$ અને $\{x : x$ એ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે$\}$

9. જો A = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21}, B = { 4, 8, 12, 16, 20 },

C = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }, D = {5, 10, 15, 20 }; તો નીચેના ગણ મેળવો :

(i) A – B (ii) A – C (iii) A – D (iv) B – A

(v) C – A (vi) D – A (vii) B – C (viii) B – D

(ix) C – B (x) D – B (xi) C – D (xii) D – C

10. જો X= { *a, b, c, d* } અને Y = { *f, b, d, g*}, તો નીચેના ગણ મેળવો :

(i) X – Y (ii) Y – X (iii) $X \cap Y$

11. જો **R** એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને **Q** સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ હોય, તો **R – Q** શું થશે ?

12. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) { 2, 3, 4, 5 } અને { 3, 6} પરસ્પર અલગગણ છે.

(ii) { *a, e, i, o, u* } અને { *a, b, c, d* }પરસ્પર અલગગણ છે.

(iii) { 2, 6, 10, 14 } અને { 3, 7, 11, 15} પરસ્પર અલગગણ છે.

(iv) { 2, 6, 10 } અને { 3, 7, 11} પરસ્પર અલગગણ છે.

1.11 પૂરકગણ

તમામ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગણને સાર્વત્રિક ગણ U તરીકે લો અને 42 નો ધન અવયવ ન હોય તેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ A એ ગણ U નો ઉપગણ છે. આમ, A = {x : $x \in$ U અને x એ 42 નો ધન અવયવ નથી}. આપણે જોઈશું કે $2 \in$ U, પરંતુ $2 \notin$ A, કારણ કે 2 એ 42 નો ધન અવયવ છે. તે જ પ્રમાણે $3 \in$ U પરંતુ $3 \notin$ A, અને $7 \in$ U પરંતુ $7 \notin$ A. હવે માત્ર 2, 3 અને 7 એ U ના A માં ન હોય તેવા ઘટકો છે. આ ત્રણ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગણ એટલે કે {2, 3, 7} ને U ના સંદર્ભમાં A નો ***પૂરક ગણ*** (*Complement of A*) કહે છે. અને તેને A′ વડે દર્શાવાય છે. આથી આપણને A′ = {2, 3, 7} મળશે. આમ, આપણે જોઈશું કે A′ = {x : $x \in$ U અને $x \notin$ A}. આ ચર્ચા પરથી નીચેની વ્યાખ્યા મળશે :

વ્યાખ્યા 8 : ધારો કે U એ સાર્વત્રિક ગણ છે અને A એ U નો ઉપગણ છે. ગણ A માં ન હોય તેવા U ના તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A નો પૂરક ગણ કહે છે. સંકેતમાં આપણે U ના સંદર્ભમાં A ના પૂરક ગણને A′ દ્વારા દર્શાવીશું.

આમ, A′ = {x : $x \in$ U અને $x \notin$ A }. સ્વયં સ્પષ્ટ છે કે A′ = U – A

આપણે નોંધીએ કે A ના પૂરક ગણ વિશે બીજી રીતે વિચારીએ, તો A નો પૂરક ગણ એ U અને A નો તફાવત ગણ છે.

ઉદાહરણ 20 : U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} અને A = {1, 3, 5, 7, 9}. તો A' શોધો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે A માં ન હોય તેવા Uના ઘટકો માત્ર 2, 4, 6, 8, 10 છે અને તે U માં તો છે જ. આથી A' = { 2, 4, 6, 8, 10}.

ઉદાહરણ 21 : એક સહશિક્ષણ આપતી શાળાના ધોરણ XI ના વિદ્યાર્થીઓના ગણને સાર્વત્રિક ગણ U તરીકે લો અને ધોરણ XI ની છાત્રાઓનો ગણ A લો. A' શોધો.

ઉકેલ : વર્ગની છાત્રાઓનો ગણ A હોવાથી સ્વયં સ્પષ્ટ છે કે વર્ગના છાત્રોનો ગણ A' છે.

નોંધ જો ગણ A એ સાર્વત્રિક ગણ U નો ઉપગણ હોય તો તેનો પૂરક ગણ A' પણ U નો ઉપગણ છે. ઉદાહરણ 20 માં A' = { 2, 4, 6, 8, 10 } મળે છે. આથી (A')' = $\{x : x \in U$ અને $x \notin A'\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$

પૂરક ગણની વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે, સાર્વત્રિક ગણ U ના કોઈ પણ ઉપગણ A માટે (A')' = A થાય.

હવે આપણે $(A \cup B)'$ અને $A' \cap B'$ વિષયક પરિણામો નીચેનાં ઉદાહરણો પરથી મેળવીએ :

ઉદાહરણ 22 : U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {2, 3} અને B = {3, 4, 5}.

A', B' , $A' \cap B'$, $A \cup B$ શોધો અને તે પરથી બતાવો કે $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

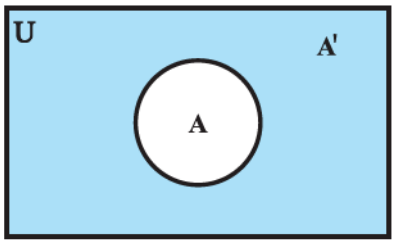
ઉકેલ : A' = {1, 4, 5, 6} અને B' = { 1, 2, 6 } છે તે સ્પષ્ટ છે. આથી $A' \cap B'$ = { 1, 6 }

વળી, $A \cup B$ = { 2, 3, 4, 5 }. આથી $(A \cup B)'$ = { 1, 6 }

$(A \cup B)'$ = { 1, 6 } = $A' \cap B'$

ઉપરનાં પરિણામો વ્યાપક રીતે સત્ય છે તેમ બતાવી શકાય. જો A અને B એ સાર્વત્રિક ગણ U ના ઉપગણ હોય તો $(A \cup B)' = A' \cap B'$. તે જ રીતે $(A \cap B)' = A' \cup B'$. આ બે પરિણામોને ભાષામાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય:

બે ગણના યોગગણનો પૂરક ગણ એ તેમના પૂરકગણનો છેદગણ છે અને બે ગણના છેદગણનો પૂરક ગણ એ તેમના પૂરક ગણનો યોગગણ છે. આ નિયમોને ***De Morgan's laws*** *કહે છે.* ગણિતશાસ્ત્રી ***De Morgan*** ના નામ પરથી આ નામ આપવામાં આવ્યું છે. ગણ A ના પૂરક ગણ A′ ને વેન- આકૃતિ 1.10 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 1.10

રંગીન ભાગ A નો પૂરકગણ દર્શાવે છે.

પૂરક ગણના કેટલાક ગુણધર્મો

1. પૂરક ગણનો નિયમ : (i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \phi$

2. દ'મોર્ગનના નિયમ : (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

3. દ્વિપૂરક ગણનો નિયમ : $(A')' = A$

4. ખાલીગણ અને સાર્વત્રિક ગણના નિયમો : $\phi' = U$ અને $U' = \phi$

આ નિયમોને વેન-આકૃતિ દ્વારા ચકાસી શકાય.

સ્વાધ્યાય 1.5

1. U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, A = { 1, 2, 3, 4}, B = { 2, 4, 6, 8 } અને C = { 3, 4, 5, 6 }છે. નીચેના ગણ શોધો :

(i) A′ (ii) B′ (iii) (A ∪ C)′ (iv) (A ∪ B)′ (v) (A′)′ (vi) (B – C)′

2. જો U = { *a, b, c, d, e, f, g, h*} હોય, તો નીચેના ગણના પૂરક ગણ શોધો :

(i) A = {*a, b, c*} (ii) B = {*d, e, f, g*}

(iii) C = {*a, c, e, g*} (iv) D = { *f, g, h, a*}

3. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણને સાર્વત્રિક ગણ તરીકે લઈ, નીચે આપેલા ગણના પૂરક ગણ શોધો :

(i) {x : x એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.} (ii) { x : x એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(iii) {x : x એ 3 નો ધન ગુણિત છે.} (iv) { x : x એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.}

(v) {x : x એ 3 અને 5 વડે વિભાજ્ય પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.}

(vi) { x : x એ પૂર્ણવર્ગ છે.} (vii) { x : x એ પૂર્ણ ઘન છે.}

(viii) { $x : x + 5 = 8$ } (ix) { $x : 2x + 5 = 9$}

(x) { $x : x \geq 7$ } (xi) { $x : x \in$ N અને $2x + 1 > 10$ }

4. જો U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, A = {2, 4, 6, 8} અને B = { 2, 3, 5, 7} હોય, તો

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ચકાસો.

5. નીચેના દરેક માટે યોગ્ય વેન-આકૃતિ દોરો :

(i) $(A \cup B)'$ (ii) $A' \cap B'$ (iii) $(A \cap B)'$ (iv) $A' \cup B'$

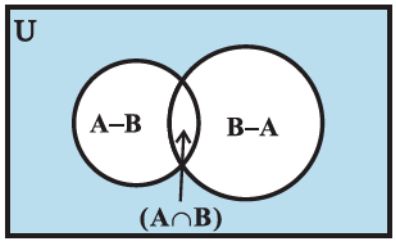
6. સમતલના તમામ ત્રિકોણના ગણને U તરીકે લો. જો ઓછામાં ઓછો એક ખૂણો 60° થી ભિન્ન હોય તેવા ત્રિકોણોનો ગણ A હોય, તો A′ શું થશે ?

7. નીચેના વિધાનો સત્ય થાય તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) $A \cup A' = \ldots$ (ii) $\phi' \cap A = \ldots$ (iii) $A \cap A' = \ldots$ (iv) $U' \cap A = \ldots$

1.12 બે ગણના યોગગણ અને છેદગણ પરના વ્યાવહારિક કૂટપ્રશ્નો

આગળના વિભાગમાં આપણે બે ગણના યોગગણ, છેદગણ અને તફાવત ગણ વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ વિભાગમાં આપણે દૈનિક જીવનને સ્પર્શતા કેટલાક વ્યાવહારિક પ્રશ્નો જોઈશું. આ વિભાગમાં ફલિત થતાં કેટલાંક સૂત્રોનો પાછળના પ્રકરણ સંભાવના(પ્રકરણ 16) માં પણ ઉપયોગ કરીશું.



આકૃતિ 1.11

ધારો કે, A અને B સાન્ત ગણો છે. જો $A \cap B = \phi$ હોય, તો

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ... (1)

$A \cup B$ ના ઘટકો A અથવા B ના ઘટકો છે, પરંતુ $A \cap B = \phi$ હોવાથી કોઈ ઘટક બંને ગણમાં નથી. આથી, (1) તરત જ ફલિત થાય છે.

વ્યાપક સ્વરૂપે, જો A અને B સાન્ત ગણ હોય, તો

(ii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ... (2)

$A - B$, $A \cap B$ અને $B - A$ પરસ્પર અલગ ગણો છે તેમ નોંધીશું અને તેમનો યોગ $A \cup B$ છે (આકૃતિ 1.11). માટે

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) + n(A \cap B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

આમ સૂત્ર(2) ની ચકાસણી થઈ.

(iii) જો A, B અને C સાન્ત ગણો હોય તો,

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ ... (3)

ખરેખર તો આપણને,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)] \quad [(2) \text{ પરથી}]$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[A \cap (B \cup C)] \quad [(2) \text{ પરથી}]$$

વળી, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ હોવાથી, આપણને

$$n[A \cap (B \cup C)] = n(A \cap B) + n(A \cap C) - n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$

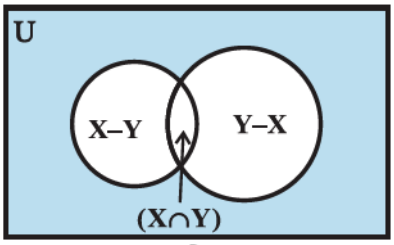
$$= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

આમ (3) સાબિત થયું.

ઉદાહરણ 23 : $X \cup Y$ માં 50 ઘટકો, X માં 28 ઘટકો અને Y માં 32 ઘટકો હોય તેવા બે ગણો X અને Y આપેલા છે, તો $X \cap Y$ માં કેટલા ઘટક હશે ?

ઉકેલ : $n(X \cup Y) = 50$, $n(X) = 28$, $n(Y) = 32$ આપ્યા છે, $n(X \cap Y) = ?$



આકૃતિ 1.12

સૂત્ર $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$$

$$= 28 + 32 - 50 = 10$$

બીજી રીતે વિચારતાં ધારો કે $n(X \cap Y) = k$ છે, તો

$n(X - Y) = 28 - k$, $n(Y - X) = 32 - k$ (આકૃતિ 1.12 ની વેન-આકૃતિ દ્વારા)

આથી, $50 = n(X \cup Y) = n(X - Y) + n(X \cap Y) + n(Y - X)$

$= (28 - k) + k + (32 - k)$

આથી, $k = 10$

ઉદાહરણ 24 : એક શાળામાં 20 શિક્ષકો ગણિત અથવા ભૌતિકવિજ્ઞાન શીખવે છે. આ શિક્ષકો પૈકી 12 ગણિત શીખવે છે અને 4 ભૌતિકવિજ્ઞાન અને ગણિત બંને વિષય શીખવે છે. કેટલા શિક્ષકો ભૌતિકવિજ્ઞાન શીખવતા હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ગણિત શીખવતા શિક્ષકોનો ગણ M અને ભૌતિકવિજ્ઞાન શીખવતા શિક્ષકોનો ગણ P છે. કૂટપ્રશ્નનાં વિધાનોમાં ''અથવા'' શબ્દ આપણને યોગગણ તથા ''અને'' શબ્દ છેદગણનો ઉપયોગ કરવાનું સૂચન આપે છે. હવે, $n(M \cup P) = 20$, $n(M) = 12$ અને $n(M \cap P) = 4$ છે.

આપણે, $n(P)$ મેળવવા ઇચ્છિએ છીએ.

પરિણામ $n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$20 = 12 + n(P) - 4$ મળશે.

આમ, $n(P) = 12$

આથી 12 શિક્ષકો ભૌતિકવિજ્ઞાન શીખવે છે.

ઉદાહરણ 25 : 35 વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં 24 ને ક્રિકેટ રમવું ગમે છે અને 16 ને ફૂટબૉલ રમવું ગમે છે. દરેક વિદ્યાર્થી બે રમતોમાંથી ઓછામાં ઓછી એક રમત રમવાનું પસંદ કરે છે. ક્રિકેટ અને ફૂટબૉલ બંને રમત રમવાનું કેટલા વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરતાં હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ક્રિકેટ રમવાનું પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓનો ગણ X અને ફૂટબૉલ રમવાનું પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓનો ગણ Y છે. $X \cup Y$ એ ઓછામાં ઓછી એક રમત રમવાનું પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓનો ગણ થશે અને $X \cap Y$ એ બંને રમત રમવાનું પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓનો ગણ થશે.

$n(X) = 24$, $n(Y) = 16$, $n(X \cup Y) = 35$ આપ્યું છે, $n(X \cap Y) = ?$

સૂત્ર $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$35 = 24 + 16 - n(X \cap Y)$ મળે.

આમ, $n(X \cap Y) = 5$

એટલે કે 5 વિદ્યાર્થીઓ બંને રમત રમવાનું પસંદ કરે છે.

ઉદાહરણ 26 : એક શાળાના 400 વિદ્યાર્થીઓની મોજણી કરી. 100 વિદ્યાર્થી સફરજનનો રસ પીએ છે, 150 નારંગીનો રસ પીએ છે અને 75 વિદ્યાર્થીઓ સફરજન તેમજ નારંગી બંનેનો રસ પીએ છે. કેટલા વિદ્યાર્થીઓ સફરજન અને નારંગી પૈકી એકપણનો રસ પીતા નથી?

ઉકેલ : ધારો કે જે વિદ્યાર્થીઓની મોજણી કરવામાં આવી તેમનો ગણ U છે અને સફરજનનો રસ પીનાર વિદ્યાર્થીઓનો ગણ A તથા નારંગીનો રસ પીનાર વિદ્યાર્થીઓનો ગણ B છે.

$n(U) = 400$, $n(A) = 100$, $n(B) = 150$ અને $n(A \cap B) = 75$ થશે.

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)')$$
$$= n(U) - n(A \cup B)$$
$$= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$
$$= 400 - 100 - 150 + 75 = 225$$

આથી, 225 વિદ્યાર્થીઓ સફરજન અને નારંગી પૈકી કોઈનો પણ રસ પીતા નથી.

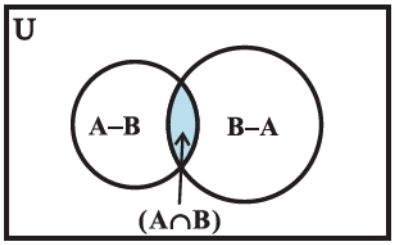
ઉદાહરણ 27 : ચામડીની વ્યાધિવાળી 200 વ્યક્તિઓ છે. 120 વ્યક્તિઓને રસાયણ C_1 અને 50 વ્યક્તિઓને રસાયણ C_2ની અસર માલૂમ પડી અને 30 ને બંને રસાયણો C_1 અને C_2ની અસર માલૂમ પડી.

(i) રસાયણ C_1 ની અસર હોય, પરંતુ રસાયણ C_2ની અસર ન હોય.

(ii) રસાયણ C_2 ની અસર હોય, પરંતુ રસાયણ C_1ની અસર ન હોય.

(iii) રસાયણ C_1 અથવા રસાયણ C_2ની અસર માલૂમ પડી હોય તેવી વ્યક્તિઓની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ચામડીના દર્દની બીમારીવાળી વ્યક્તિઓનો ગણ સાર્વત્રિક ગણ U છે. રસાયણ C_1 ની અસરવાળી વ્યક્તિઓનો ગણ A તથા રસાયણ C_2 ની અસરવાળી વ્યક્તિઓનો ગણ B છે.



આકૃતિ 1.13

$n(U) = 200$, $n(A) = 120$, $n(B) = 50$ અને $n(A \cap B) = 30$

(i) આકૃતિ 1.13 ની વેન-આકૃતિ પરથી,

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$ ($A - B$ અને $A \cap B$ અલગ ગણ હોવાથી)

આથી $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 120 - 30 = 90$

આથી રસાયણ C_1 ની અસર હોય, પરંતુ રસાયણ C_2ની અસર ન હોય તેવી વ્યક્તિઓની સંખ્યા 90 છે.

(ii) આકૃતિ 1.13 પરથી

$B = (B - A) \cup (A \cap B)$.

અને આથી, $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$ ($B - A$ અને $A \cap B$ અલગ ગણ હોવાથી)

આથી $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 50 - 30 = 20$

આમ, રસાયણ C_2 ની અસર હોય, પરંતુ રસાયણ C_1ની અસર ન હોય તેવી વ્યક્તિઓની સંખ્યા 20 છે.

(iii) રસાયણ C_1 અથવા રસાયણ C_2ની અસર માલૂમ પડી હોય તેવી વ્યક્તિઓની સંખ્યા એટલે કે,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 120 + 50 - 30 = 140.$$

સ્વાધ્યાય 1.6

1. જો બે ગણ X અને Y માટે $n(X) = 17$, $n(Y) = 23$ અને $n(X \cup Y) = 38$ હોય, તો $n(X \cap Y)$ શોધો.

2. જો બે ગણ X અને Y માટે $X \cup Y$ માં 18 ઘટકો, X માં 8 ઘટકો અને Y માં 15 ઘટકો હોય, તો $X \cap Y$ માં કેટલા ઘટકો હશે ?

3. 400 વ્યક્તિઓના સમૂહમાં, 250 હિન્દી બોલી શકે છે અને 200 અંગ્રેજી બોલી શકે છે, તો કેટલી વ્યક્તિઓ હિન્દી અને અંગ્રેજી બંને બોલી શકે ? 400 પૈકી દરેક વ્યક્તિ આ બે પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ભાષા બોલી શકે છે.

4. જો બે ગણો S અને T માટે S માં 21 ઘટકો, T માં 32 ઘટકો અને $S \cap T$ માં 11 ઘટકો હોય, તો $S \cup T$ માં કેટલા ઘટકો હશે ?

5. બે ગણ X અને Y એવા છે કે ગણ X માં 40 ઘટકો, $X \cup Y$ માં 60 ઘટકો અને $X \cap Y$ માં 10 ઘટકો હોય, તો Y માં કેટલા ઘટકો હશે?

6. 70 વ્યક્તિઓના જૂથમાં, 37 કૉફી પસંદ કરે છે અને 52 વ્યક્તિને ચા પસંદ છે. તથા દરેક વ્યક્તિ આ બે પીણાંમાંથી ઓછામાં ઓછું એક પીણું પસંદ કરે છે. કેટલી વ્યક્તિઓ કૉફી અને ચા બંને પસંદ કરે છે ?

7. 65 વ્યક્તિઓના જૂથમાં, 40 ક્રિકેટ પસંદ કરે છે, 10 ક્રિકેટ અને ટેનિસ બંને પસંદ કરે છે. કેટલી વ્યક્તિઓ માત્ર ટેનિસ પસંદ કરે છે પરંતુ ક્રિકેટ પસંદ કરતા નથી ? કેટલા ટેનિસ પસંદ કરે છે ? 65 પૈકી દરેક વ્યક્તિ આ બે પૈકી ઓછામાં ઓછી એક રમત પસંદ કરે છે.

8. એક સમિતિમાં 50 વ્યક્તિઓ ફ્રેંચ બોલે છે, 20 સ્પેનિશ બોલે છે અને 10 વ્યક્તિઓ બંને સ્પેનિશ અને ફ્રેંચ બંને બોલે છે. કેટલી વ્યક્તિઓ આ બે ભાષાઓમાંથી ઓછામાં ઓછી એક ભાષા બોલી શકે છે ?

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 28 : ચકાસો કે " CATARACT " શબ્દ લખવા માટેના જરૂરી મૂળાક્ષરો અને " TRACT" શબ્દ લખવા માટેના જરૂરી મૂળાક્ષરોનો ગણ સમાન છે.

ઉકેલ : "CATARACT" શબ્દના અક્ષરોનો ગણ X = { C, A, T, R } થશે.

જો " TRACT" ના અક્ષરોનો ગણ Y લઈએ તો,

Y = { T, R, A, C }

X નો દરેક ઘટક Y માં અને Y નો દરેક ઘટક X માં હોવાથી X = Y.

ઉદાહરણ 29 : { –1, 0, 1 } ગણના બધા જ ઉપગણોની યાદી બનાવો.

ઉકેલ : ધારો કે ગણ A = { –1, 0, 1 } છે. એક પણ સભ્ય ન હોય તેવો ગણ ખાલીગણ ϕ એ A નો ઉપગણ છે. જેમાં એક સભ્ય

હોય તેવા A ના ઉપગણો $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$ છે. જેમાં બે ઘટકો હોય તેવા A ના ઉપગણો $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$ છે. ત્રણ ઘટકોવાળો A નો ઉપગણ A પોતે જ છે. આથી ગણ A ના તમામ ઉપગણો ϕ, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$ અને $\{-1, 0, 1\}$ છે.

ઉદાહરણ 30 : સાબિત કરો કે જો $A \cup B = A \cap B$ હોય, તો $A = B$.

ઉકેલ : ધારો કે $a \in A$. આથી $a \in A \cup B$. હવે $A \cup B = A \cap B$ હોવાથી, $a \in A \cap B$. આથી $a \in B$.

માટે, $A \subset B$. એ જ રીતે જો $b \in B$, તો $b \in A \cup B$.

$A \cup B = A \cap B$ હોવાથી, $b \in A \cap B$. આથી $b \in A$. માટે, $B \subset A$. આમ $A = B$

ઉદાહરણ 31 : કોઈપણ ગણ A અને B માટે સાબિત કરો કે, $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

ઉકેલ : જો $X \in P(A \cap B)$, તો $X \subset (A \cap B)$. આથી, $X \subset A$ અને $X \subset B$.

માટે $X \in P(A)$ અને $X \in P(B)$. તેથી $X \in P(A) \cap P(B)$. આથી $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$.

ધારો કે $Y \in P(A) \cap P(B)$. તો $Y \in P(A)$ અને $Y \in P(B)$. આથી, $Y \subset A$ અને $Y \subset B$.

માટે, $Y \subset (A \cap B)$. તે પરથી $Y \in P(A \cap B)$ થાય.

આથી, $(P(A) \cap P(B)) \subset P(A \cap B)$

આમ, $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

ઉદાહરણ 32 : એક બજાર-સંશોધન જૂથે 1000 ઉપભોક્તાઓની મોજણી કરી અને શોધ્યું કે 720 ગ્રાહકો ઉત્પાદન A પસંદ કરે છે અને 450 ઉત્પાદન B પસંદ કરે છે. બંને ઉત્પાદન પસંદ કરનાર ઉપભોક્તાની ન્યૂનતમ સંખ્યા કેટલી હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે જેમને ઉત્પાદન સંબંધી પ્રશ્ન પૂછ્યા હોય તેવા ઉપભોક્તાઓનો ગણ U છે. ઉત્પાદન A પસંદ કરનારા ઉપભોક્તાઓનો ગણ S છે અને ઉત્પાદન B પસંદ કરનારા ઉપભોક્તાઓનો ગણ T છે.

$n(U) = 1000$, $n(S) = 720$, $n(T) = 450$

આથી $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$

$= 720 + 450 - n(S \cap T) = 1170 - n(S \cap T)$

માટે, જો $n(S \cap T)$ ન્યૂનતમ હોય તો અને તો જ $n(S \cup T)$ મહત્તમ થશે. પરંતુ $(S \cup T) \subset U$ હોવાથી $n(S \cup T) \leq n(U) = 1000$. આથી $n(S \cup T)$ નું મહત્તમ મૂલ્ય 1000 છે. આમ, $n(S \cap T)$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 170 છે. આથી બંને ઉત્પાદન પસંદ કરનારા ઉપભોક્તાની ન્યૂનતમ સંખ્યા 170 છે.

ઉદાહરણ 33 : 500 મોટરમાલિક વિષયક સંશોધનમાં માલૂમ પડ્યું કે A પ્રકારની મોટરના માલિકોની સંખ્યા 400 અને B પ્રકારની મોટરના માલિકોની સંખ્યા 200 છે. જ્યારે 50 મોટર માલિકો A અને B બંને પ્રકારની મોટર ધરાવે છે. શું આ માહિતી સાચી છે ?

ઉકેલ : ધારો કે મોટરમાલિકોના સર્વેક્ષણનો ગણ U છે, A પ્રકારની મોટરના માલિકોનો ગણ M અને B પ્રકારની મોટર ધરાવતા માલિકોનો ગણ S છે.

$n(U) = 500, n(M) = 400, n(S) = 200$ અને $n(S \cap M) = 50$ આપ્યું છે.

હવે $n(S \cup M) = n(S) + n(M) - n(S \cap M) = 200 + 400 - 50 = 550$

પરંતુ $(S \cup M) \subset U$. તેથી $n(S \cup M) \leq n(U)$ થવું જોઈએ.

આ વિરોધાભાસ છે. આથી આપેલ માહિતી સાચી નથી.

ઉદાહરણ 34 : એક કોલેજ દ્વારા પુરુષોની રમતમાં 38 ચંદ્રકો ફૂટબૉલમાં, 15 બાસ્કેટબૉલમાં અને 20 ક્રિકેટમાં એનાયત કરવામાં આવ્યાં. જો આ ચંદ્રકો કુલ 58 પુરુષોને મળ્યા હોય અને માત્ર 3 પુરુષોને ત્રણેય રમતના ચંદ્રકો મળ્યાં હોય. તો કેટલી વ્યક્તિને ત્રણમાંથી બરાબર બે ચંદ્રક મળ્યાં હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે F, B અને C અનુક્રમે ફૂટબૉલ, બાસ્કેટબૉલ અને ક્રિકેટમાં પુરુષોને મળેલા ચંદ્રકોના ગણ છે.

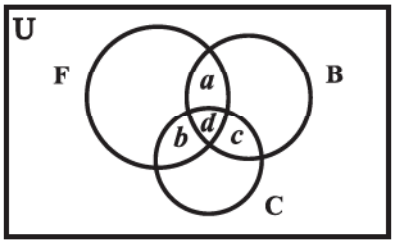
તો, $n(F) = 38, n(B) = 15, n(C) = 20$

$n(F \cup B \cup C) = 58$ અને $n(F \cap B \cap C) = 3$ છે.

માટે, $n(F \cup B \cup C) = n(F) + n(B) + n(C)$

$- n(F \cap B) - n(F \cap C) - n(B \cap C) + n(F \cap B \cap C)$,

પરથી $n(F \cap B) + n(F \cap C) + n(B \cap C) = 18$ મળે.



આકૃતિ 1.14

આકૃતિ 1.14 માં બતાવેલી વેન-આકૃતિ જોઈએ.

અહીં, માત્ર ફૂટબૉલ અને બાસ્કેટબૉલમાં ચંદ્રકો મેળવતા પુરુષોની સંખ્યાને a વડે દર્શાવીએ, માત્ર ફૂટબૉલ અને ક્રિકેટમાં ચંદ્રકો મેળવતા પુરૂષોની સંખ્યાને b થી દર્શાવીએ. માત્ર બાસ્કેટબૉલ અને ક્રિકેટમાં ચંદ્રકો મેળવતા પુરુષોની સંખ્યાને c વડે દર્શાવીએ અને ત્રણેય રમતમાં ચંદ્રકો મેળવતા પુરુષોની સંખ્યાને d વડે દર્શાવીએ.

આમ, $d = n(F \cap B \cap C) = 3$ અને $a + d + b + d + c + d = 18$

માટે, $a + b + c = 9$

આમ, આપેલ ત્રણ રમતોમાંથી બરાબર બે જ રમતમાં ચંદ્રકો મેળવનાર પુરુષોની સંખ્યા 9 છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 1

1. નીચે આપેલ ગણો પૈકી ક્યા ગણ આપેલ ગણો પૈકી કયા ગણના ઉપગણ છે તે નક્કી કરો :

$A = \{ x : x \in \mathbf{R}$ અને x એ સમીકરણ $x^2 - 8x + 12 = 0$ નું સમાધાન કરે છે$\}$,

$B = \{ 2, 4, 6 \}, C = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}, D = \{ 6 \}$.

2. નીચેના પૈકી દરેક વિધાનમાંથી કયું સત્ય અને કયું અસત્ય છે તે નક્કી કરો :

(i) જો $x \in A$ અને $A \in B$, તો $x \in B$

(ii) જો $A \subset B$ અને $B \in C$, તો $A \in C$

(iii) જો $A \subset B$ અને $B \subset C$, તો $A \subset C$

(iv) જો $A \not\subset B$ અને $B \not\subset C$, તો $A \not\subset C$

(v) જો $x \in A$ અને $A \not\subset B$, તો $x \in B$

(vi) જો $A \subset B$ અને $x \notin B$, તો $x \notin A$

3. ગણ A, B અને C માટે $A \cup B = A \cup C$ અને $A \cap B = A \cap C$ છે. સાબિત કરો કે, $B = C$.

4. સાબિત કરો કે નીચે આપેલી ચારેય શરતો સમકક્ષ છે :

(i) $A \subset B$ (ii) $A - B = \phi$ (iii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B = A$

નોંધ : આનો અર્થ એ કે (i) $\Rightarrow$ (ii) અને (ii) $\Rightarrow$ (i) વગેરે. તે માટે (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) સાબિત કરો.

5. સાબિત કરો કે $A \subset B$, તો $(C - B) \subset (C - A)$

6. જો $P(A) = P(B)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $A = B$.

7. કોઈપણ ગણ A અને B માટે $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ સત્ય છે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

8. કોઈપણ ગણ A અને B માટે સાબિત કરો કે,

$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ અને $A \cup (B - A) = (A \cup B)$.

9. ગણના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.

10. સાબિત કરો કે $A \cap B = A \cap C$ પરથી $B = C$ કહી શકાય નહિ.

11. A અને B ગણો છે. કોઈ ગણ X માટે જો $A \cap X = B \cap X \neq \phi$ અને $A \cup X = B \cup X$ તો સાબિત કરો કે $A = B$.

(**સૂચન:** $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$ અને વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરો.)

12. ગણ A, B અને C એવા શોધો કે જેથી $A \cap B$, $B \cap C$ અને $A \cap C$ અરિક્ત ગણો થાય અને $A \cap B \cap C = \phi$ બને.

13. એક શાળાના 600 વિદ્યાર્થીઓના સર્વેક્ષણમાં 150 વિદ્યાર્થીઓ ચા પીતા હતા અને 225 કૉફી પીતા હતા. 100 વિદ્યાર્થીઓ ચા અને કૉફી બંને પીતા હતા. કૉફી અને ચા બંને પૈકી કંઈપણ નહિ પીનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

14. વિદ્યાર્થીઓના એક જૂથમાં, 100 વિદ્યાર્થીઓ હિન્દી જાણે છે, 50 અંગ્રેજી જાણે છે અને 25 બંને ભાષા જાણે છે. આ જૂથમાં કેટલા વિદ્યાર્થીઓ હશે ?

15. 60 વ્યક્તિઓના સર્વેક્ષણમાં, 25 વ્યક્તિઓ સમાચારપત્ર H વાંચતા, 26 સમાચારપત્ર T વાંચતા, 26 સમાચારપત્ર I વાંચતા, 9 H અને I વાંચતા, 11 H અને T બંને વાંચતા, 8 T અને I વાંચતા તથા 3 તમામ સમાચારપત્ર વાંચતા માલૂમ પડ્યા.

(i) ઓછામાં ઓછું એક સમાચારપત્ર વાંચનાર

(ii) માત્ર એક જ સમાચારપત્ર વાંચનાર વ્યક્તિઓની સંખ્યા શોધો.

16. એક સર્વેક્ષણમાં 21 વ્યક્તિ ઉત્પાદન A પસંદ કરે છે, 26 ઉત્પાદન B પસંદ કરે છે અને 29 ઉત્પાદન C પસંદ કરે છે. જો 14 વ્યક્તિઓ ઉત્પાદન A અને B બંને પસંદ કરતી હોય, 12 વ્યક્તિઓ ઉત્પાદન C અને A પસંદ કરતી હોય, 14 વ્યક્તિઓ ઉત્પાદન B અને C પસંદ કરતી હોય તથા 8 વ્યક્તિઓ ત્રણેય ઉત્પાદન પસંદ કરતી હોય, તો માત્ર ઉત્પાદન C પસંદ કરતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા શોધો.

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં ગણને આવરી લેતી કેટલીક પાયાની વ્યાખ્યાઓ અને પ્રક્રિયાઓ આપવામાં આવી છે. તેમનો સારાંશ નીચે પ્રમાણે છે :

- ગણ એ સુનિશ્ચિત વસ્તુઓનો સમૂહ છે.
- જે ગણ એક પણ સભ્ય ધરાવતો નથી, તેને ખાલીગણ કહે છે.
- જે ગણમાં નિશ્ચિત સંખ્યાના ઘટકો આવેલા હોય, તેને સાન્તગણ કહે છે. અન્યથા ગણને અનંત ગણ કહે છે.
- જો ગણ A અને B માં બરાબર એકના એક જ ઘટકો હોય, તો તેમને સમાન ગણ કહે છે.
- જો ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક ગણ B નો ઘટક હોય, તો ગણ A ને B નો ઉપગણ કહે છે. અંતરાલ એ R ના ઉપગણો છે.
- A ના તમામ ઉપગણોના ગણને A નો ઘાતગણ કહે છે. તેને P(A)થી દર્શાવાય છે.
- ગણ A માં હોય અથવા ગણ B માં હોય તેવા તમામ ઘટકોના ગણને A અને B નો યોગગણ કહે છે.
- ગણ A અને ગણ B ના બધા જ સામાન્ય ઘટકોથી બનતા ગણને A અને B નો છેદગણ કહે છે. ગણ A અને B નો આ જ ક્રમમાં તફાવત ગણ એટલે ગણ A માં હોય પરંતુ B માં ન હોય તેવા ઘટકોનો ગણ.
- સાર્વત્રિક ગણ U ના સંદર્ભમાં A નો પૂરક ગણ U માં હોય પરંતુ A માં ન હોય તેવા તમામ ઘટકોનો ગણ.
- કોઈપણ બે ગણ A અને B માટે $(A \cup B)' = A' \cap B'$ અને $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $A \cap B = \phi$ હોય તેવા સાન્તગણો A અને B હોય, તો $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. જો $A \cap B \neq \phi$, તો $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Historical Note

The modern theory of sets is considered to have been originated largely by the German mathematician Georg Cantor (1845-1918). His papers on set theory appeared sometimes during 1874 to 1897. His study of set theory came when he was studying trigonometric series of the form $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$ He published in a paper in 1874 that the set of real numbers could not be put into one-to-one correspondence wih the integers. From 1879 onwards, he publishd several papers showing various properties of abstract sets.

Cantor's work was well received by another famous mathematician Richard Dedekind (1831-1916). But Kronecker (1810-1893) castigated him for regarding infinite set the same way as finite sets.

Another German mathematician Gottlob Frege, at the turn of the century, presented the set theory as principles of logic. Till then the entire set theory was based on the assumption of the existence of the set of all sets. It was the famous Englih Philosopher Bertand Russell (1872-1970) who showed in 1902 that the assumption of existence of a set of all sets leads to a contradiction. This led to the famous Russell's Paradox. Paul R.Halmos writes about it in his book 'Naïve Set Theory' that "nothing contains everything".

The Russell's Paradox was not the only one which arose in set theory. Many paradoxes were produced later by several mathematicians and logicians. As a consequence of all these paradoxes, the first axiomatisation of set theory was published in 1908 by Ernst Zermelo. Another one was proposed by Abraham Fraenkel in 1922. John Von Neumann in 1925 introduced explicitly the axiom of regularity. Later in 1937 Paul Bernays gave a set of more satisfactory axiomatisation. A modification of these axioms was done by Kurt Gödel in his monograph in 1940. This was known as Von Neumann-Bernays (VNB) or Gödel-Bernays (GB) set theory.

Despite all these difficulties, Cantor's set theory is used in present day mathematics. In fact, these days most of the concepts and results in mathematics are expressed in the set theoretic language.