

સંબંધ અને વિધેયો

❖ Mathematics is the indispensable instrument of all physical research. – BERTHELOT ❖

2.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણિતશાસ્ત્રમાં મોટેભાગે બદલાતી રાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ એટલે કે ભાત શોધવામાં આવે છે. આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણે પિતા-પુત્ર, ભાઈ-બહેન, શિક્ષક-વિદ્યાર્થી જેવા સંબંધોનું અવલોકન કરીએ છીએ. ગણિતશાસ્ત્રમાં પણ આપણે સંખ્યાબંધ સંબંધો જેવા કે, ‘સંખ્યા m , સંખ્યા n કરતા નાની છે’, ‘રેખા l એ રેખા m ને સમાંતર છે’, ‘ગણા A એ ગણા B નો ઉપગણ છે’ જોવા મળે છે. આ બધામાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે સંબંધ ચોક્કસ કર્મમાં વસ્તુઓની કર્મયુક્ત જોડનો સમાવેશ કરે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે બે ગણાના ઘટકોને કેવી રીતે સાંકળવા એ જોઈશું અને કર્મયુક્ત જોડના બે ઘટકો વચ્ચે સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરીશું. અંતમાં આપણે વિધેય તરીકે ઓળખાતા અમુક સંબંધોનો અભ્યાસ કરીશું. વિધેયનો ઘ્યાલ એ ગણિતમાં બહુ મહત્વનો ઘ્યાલ છે, કારણ કે તે એક ચલ રાશિની બીજી ચલ રાશિ સાથે ગાણિતિક દર્શાવે ચોક્કસ સંગતતા આપે છે.



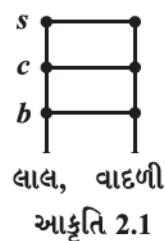
G. W. Leibnitz
(1646–1716)

2.2 ગણોનો કાર્ટેઝિય ગુણાકાર (Cartesian Product of Sets)

ધારો કે A બે રંગોનો ગણ છે અને B ગણ વસ્તુઓનો ગણ છે. ધારો કે $A = \{\text{લાલ}, \text{વાદળી}\}$ અને

$B = \{b, c, s\}$ અહીં b, c અને s અનુક્રમે બેગ, કોટ અને શર્ટ દર્શાવે છે. આ બંને ગણોમાંથી રૂંગ અને વસ્તુની કેટલી કમયુક્ત જોડ બનાવી શકાય? એક ચોક્કસ ભાતમાં આગળ વધીએ તો જોઈ શકાય છે કે 6 અલગ અલગ કમયુક્ત જોડ નીચે પ્રમાણે બનશે :

(લાલ, b), (લાલ, c), (લાલ, s), (વાદળી, b), (વાદળી, c), (વાદળી, s).



આમ, આપણાને 6 લિન્ન કમયુક્ત જોડ મળશે. (આકૃતિ 2.1).

આગળના ધોરણમાં આપણે કમયુક્ત જોડ વિશેનો અભ્યાસ કર્યો તે યાદ કરીએ. કોઈ ગણ P અને ગણ Q ના ઘટકોની કોઈપણ કમયુક્ત જોડને નાના કૌંસમાં દર્શાવાય છે અને તે કમયુક્ત જોડમાં ચોક્કસ કમ અગત્યનો છે. ઉદાહરણ તરીકે (p, q) માટે $p \in P$ અને $q \in Q$. આ અવલોકન આપણાને નીચેની વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

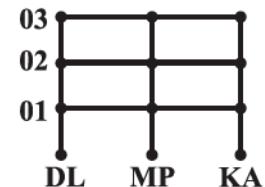
વ્યાખ્યા 1 આપેલ અરિકિત ગણો P અને Q નો કાર્ટેજિય ગુણાકાર $P \times Q$ એ P અને Q ની તમામ કમયુક્ત જોડનો ગણ છે. આમ,

$$P \times Q = \{(p, q) : p \in P, q \in Q\}$$

જો P અને Q પૈકી કોઈપણ ગણ ખાલીગણ હોય, તો $P \times Q$ પણ ખાલીગણ થાય, $P \times Q = \emptyset$

ઉપર દર્શાવેલ ઉદાહરણ માટે,

$$A \times B = \{(લાલ, b), (લાલ, c), (લાલ, s), (વાદળી, b), (વાદળી, c), (વાદળી, s)\}.$$



આકૃતિ 2.2

હવે નીચે દર્શાવેલ ગણો વિશે વિચારતાં,

$A = \{DL, MP, KA\}$, જ્યાં DL, MP, KA અનુક્રમે દિલ્લી, મધ્યપ્રદેશ અને કશ્મારીટક દર્શાવે છે અને $B = \{01, 02, 03\}$ અનુક્રમે દિલ્લી, મધ્યપ્રદેશ અને કશ્મારીટક દ્વારા ગાડીઓ માટે આપેલ લાઈસન્સ નંબર પ્લેટના સંકેતિક અંકો દર્શાવે છે. હવે, ગણો રાજ્યો દિલ્લી, મધ્યપ્રદેશ અને કશ્મારીટક લાઈસન્સ નંબર-પ્લેટના સંકેતો માટે એવું નક્કી થાય કે પ્રથમ ઘટક ગણ A માંથી આવે અને દ્વિતીય ઘટક B માંથી લેવાય તો આપેલ ગણમાંથી આવી કેટલી કમયુક્ત જોડ બનશે? (આકૃતિ 2.2)

પ્રાપ્ત કમયુક્ત જોડો : $(DL, 01), (DL, 02), (DL, 03), (MP, 01), (MP, 02), (MP, 03), (KA, 01), (KA, 02), (KA, 03)$ છે.

હવે ગણ A અને ગણ B નો કાર્ટેજિય ગુણાકાર આ પ્રમાણે થશે.

$$A \times B = \{(DL, 01), (DL, 02), (DL, 03), (MP, 01), (MP, 02), (MP, 03), (KA, 01), (KA, 02), (KA, 03)\}.$$

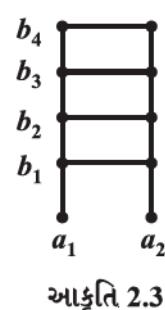
અહીં, સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે, આ કાર્ટેજિય ગુણાકારમાં 9 કમયુક્ત જોડ છે, કેમ કે ગણ A અને ગણ B બંનેમાં ગણ-ગણ ઘટકો છે. તેથી આપણાને 9 શક્ય જોડ મળે છે. અહીં આપણે નોંધીશું કે જે કમમાં કમયુક્ત જોડ બને છે તે અગત્યનો છે.

ઉદાહરણ તરીકે કમયુક્ત જોડ $(DL, 01)$ અને કમયુક્ત જોડ $(01, DL)$ સમાન નથી.

અંતમાં સમજૂતી માટે ગણ $A = \{a_1, a_2\}$ અને ગણ $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ લઈએ. (આકૃતિ 2.3)

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}.$$

જો ગણ A અને ગણ B એ વાસ્તવિક સંખ્યાગણના ઉપગણો હોય, તો આ 8 કમયુક્ત જોડો સમતલમાં બિંદુઓનાં બિન્ન સ્થાન દર્શાવશે અને તે પરથી સ્પષ્ટ થશે કે (a_1, b_2) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ a_2 એ (b_2, a_1) દ્વારા દર્શાવાતા બિંદુથી બિન્ન છે.



- નોંધ :** (i) કોઈ બે કમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક સમાન હોય અને બીજા ઘટક પણ સમાન હોય, તો અને તો જ તે બે કમયુક્ત જોડ સમાન થાય.
- (ii) જો ગણા A ના ઘટકોની સંખ્યા p અને ગણા B ના ઘટકોની સંખ્યા q હોય, તો $A \times B$ ના ઘટકોની સંખ્યા pq થાય. જો $n(A) = p$ અને $n(B) = q$ હોય તો $n(A \times B) = pq$.
- (iii) જો A અને B અરિક્ત ગણો હોય અને A અને B પૈકી કોઈ ગણા અનંત ગણા હોય, તો $A \times B$ પણ અનંત ગણા થાય.
- (iv) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$. અહીં, (a, b, c) ને કમયુક્ત ત્રય અથવા ટ્રિપુટી (triplet) અથવા રેલું કહે છે.

ઉદાહરણ 1: જો $(x + 1, y - 2) = (3, 1)$, તો x અને y ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં કમયુક્ત જોડ સમાન છે, તેથી કમવાર ઘટકો સમાન થાય.

$$\therefore x + 1 = 3 \text{ અને } y - 2 = 1.$$

$$\text{ઉકેલતાં, } x = 2 \text{ અને } y = 3.$$

ઉદાહરણ 2 : જો $P = \{a, b, c\}$ અને $Q = \{r\}$, તો $P \times Q$ અને $Q \times P$ શોધો.

શું આ બે કાર્ત્તિક્ય ગુણાકાર સમાન છે ?

ઉકેલ : કાર્ત્તિક્ય ગુણાકારની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$P \times Q = \{(a, r), (b, r), (c, r)\} \text{ અને } Q \times P = \{(r, a), (r, b), (r, c)\}$$

હવે, કમિક જોડની સમાનતાની વ્યાખ્યા પ્રમાણે કમયુક્ત જોડ (a, r) અને કમયુક્ત જોડ (r, a) સમાન નથી. આથી આ પરથી કહી શકાય કે, $P \times Q \neq Q \times P$.

તેમ છતાં બંને ગણમાં ઘટકોની સંખ્યા સમાન થશે.

ઉદાહરણ 3 : જો $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ અને $C = \{4, 5, 6\}$, તો નીચેના ગણ શોધો.

$$(i) A \times (B \cap C) \quad (ii) (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(iii) A \times (B \cup C) \quad (iv) (A \times B) \cup (A \times C)$$

ઉકેલ : (i) બે ગણોના છેદગણની વ્યાખ્યા પ્રમાણે $(B \cap C) = \{4\}$.

$$\text{તેથી, } A \times (B \cap C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}.$$

$$(ii) \text{ હવે } (A \times B) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$\text{અને } (A \times C) = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

$$\text{આથી, } (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}.$$

$$(iii) \text{ અહીં, } (B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}. \text{ આથી, }$$

$$\therefore A \times (B \cup C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}.$$

(iv) ગણો $A \times B$ અને $A \times C$ માટે ઉપરના ભાગ (ii) માંથી પરિણામોનો ઉપયોગ કરતાં,

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}.$$

ઉદાહરણ 4 : જો $P = \{1, 2\}$, તો $P \times P \times P$ શોધો.

ઉક્તાનું : અહીં, $P \times P \times P = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}.$

ઉદાહરણ 5 : જો R વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ હોય, તો $R \times R$ અને $R \times R \times R$ શું દર્શાવશે ?

ઉક્તાનું : કાર્ટોઝિય ગુણાકાર $R \times R$ એ ગણ $R \times R = \{(x, y) : x, y \in R\}$ દર્શાવે છે. તે દ્વિપરિમાણીય યામ-સમતલના પ્રત્યેક બિંદુનું નિરૂપણ દર્શાવે છે અને કાર્ટોઝિય ગુણાકાર $R \times R \times R = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ દર્શાવે છે. તે ત્રિપરિમાણીય અવકાશના પ્રત્યેક બિંદુનું નિરૂપણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 6 : જો $A \times B = \{(p, q), (p, r), (m, q), (m, r)\}$, તો A અને B શોધો.

ઉક્તાનું : $A =$ પ્રથમ ઘટકોનો ગણ = $\{p, m\}$

$B =$ બીજા ઘટકોનો ગણ = $\{q, r\}.$

સ્વાધ્યાય 2.1

1. જો $\left(\frac{x}{3} + 1, y - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, તો x અને y શોધો.
2. જો ગણ A માં 3 ઘટકો હોય અને ગણ $B = \{3, 4, 5\}$, તો $(A \times B)$ ના ઘટકોની સંખ્યા શોધો.
3. જો $G = \{7, 8\}$ અને $H = \{5, 4, 2\}$, તો $G \times H$ અને $H \times G$ શોધો.
4. નીચે આપેલાં વિધાનોમાંથી કયું વિધાન સત્ય છે અને કયું વિધાન અસત્ય છે તે જણાવો તથા અસત્ય વિધાન સત્ય નાને તે રીતે ફરી લખો :
 - (i) જો $P = \{m, n\}$ અને $Q = \{n, m\}$, તો $P \times Q = \{(m, n), (n, m)\}.$
 - (ii) જો A અને B અરિક્તા ગણો હોય, તો જ્યાં $x \in A$ તથા $y \in B$ હોય તેવી તમામ કમયુક્ત જોડો (x, y) થી બનતો અરિક્તા ગણ $A \times B$ છે.
 - (iii) જો $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, તો $A \times (B \cap \phi) = \phi.$
5. જો $A = \{-1, 1\}$, તો $A \times A \times A$ મેળવો.
6. જો $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$, તો A અને B શોધો.

7. ધારો કે $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$ અને $D = \{5, 6, 7, 8\}$, તો નીચેનાં પરિણામો ચકાસો :
- (i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (ii) $A \times C$ એ $B \times D$ નો ઉપગણ છે.
8. જો $A = \{1, 2\}$ અને $B = \{3, 4\}$ તો $A \times B$ લખો. $A \times B$ ને કેટલા ઉપગણો હશે ? તે તમામ ઉપગણોની યાદી બનાવો.
9. જો $n(A) = 3$ અને $n(B) = 2$ હોય તેવા બે ગણો A અને B હોય અને બિન્ન ઘટકો x, y અને z માટે $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$ એ $A \times B$ ના ઘટકો હોય તો A અને B શોધો.
10. જો કર્ત્તિય ગુણાકાર $A \times A$ ના ઘટકોની સંખ્યા 9 હોય અને તેમાંના બે ઘટકો $(-1, 0)$ અને $(0, 1)$ હોય, તો A શોધો તથા $A \times A$ ના બાકીના ઘટકો લખો.

2.3 સંબંધ (Relation)

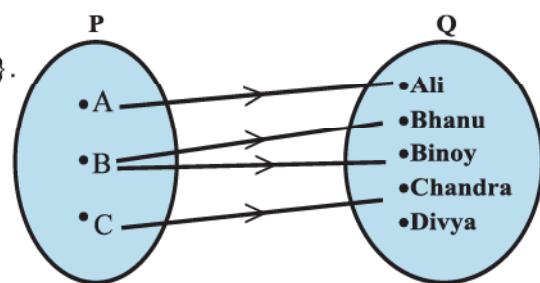
બે ગણો $P = \{A, B, C\}$ અને $Q = \{\text{Ali}, \text{Bhanu}, \text{Binoy}, \text{Chandra}, \text{Divya}\}$ નો વિચાર કરીએ. $P \times Q$ ના કર્ત્તિય ગુણાકારમાં 15 કમ્યુક્ત જોડ હશે. તેની યાદી આ પ્રમાણે થશે. $P \times Q = \{(A, \text{Ali}), (A, \text{Bhanu}), (A, \text{Binoy}), \dots, (C, \text{Divya})\}$.

હવે આપણે $P \times Q$ ના એક ઉપગણ R ને P થી Q ના એક સંબંધ તરીકે દર્શાવીએ. કોઈપણ કમ્યુક્ત જોડ (x, y) નો પ્રથમ ઘટક x એ R દ્વારા બીજા ઘટક y સાથે સંબંધ ધરાવે છે.

ધારો કે $R = \{(x, y) : x$ એ નામ y નો પ્રથમ અક્ષર છે, $x \in P, y \in Q\}$.

આમ, $R = \{(A, \text{Ali}), (B, \text{Bhanu}), (B, \text{Binoy}), (C, \text{Chandra})\}$

આ સંબંધને વેન-આકૃતિ દ્વારા દર્શાવીએ.



(કિરણ આકૃતિ - arrow diagram) આકૃતિ 2.4.

વ્યાખ્યા 2 અરિકા ગણો A અને B માટે $A \times B$ ના કોઈપણ ઉપગણને A થી B નો સંબંધ કહે છે. $A \times B$ નો ઉપગણ કમ્યુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક x અને બીજા ઘટક y વચ્ચે કોઈ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરવાથી મળે છે. બીજા ઘટકને પ્રથમ ઘટકનું પ્રતિબિંબ કહે છે.

વ્યાખ્યા 3 જો R એ A થી B નો સંબંધ હોય, તો R ની પ્રત્યેક કમ્યુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટકથી બનતા ગણને R નો પ્રદેશ (Domain) કહે છે.

વ્યાખ્યા 4 જો R એ A થી B નો સંબંધ હોય તો, R ની પ્રત્યેક કમ્યુક્ત જોડના બીજા ઘટકથી બનતા ગણને R નો વિસ્તાર (Range) કહે છે. ગણ B ને R નો સહપ્રદેશ (Codomain) કહે છે. અહીં, જોઈ શકાય છે કે વિસ્તાર \subseteq સહપ્રદેશ.

નોંધ :

(i) સંબંધને યાદીના સ્વરૂપમાં કે ગુણધર્મના સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

(ii) કિરણ આકૃતિ એ સંબંધનું દર્શય નિરૂપણ છે.

ઉદાહરણ 7 : જો $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(x, y) : y = x + 1\}$ થાય તે રીતે સંબંધ R , A થી A પર વ્યાખ્યાપિત છે, તો

- (i) આ સંબંધને કિરણ આકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.
(ii) R નો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.

ઉકેલ : (i) સંબંધની વ્યાખ્યા અનુસાર,

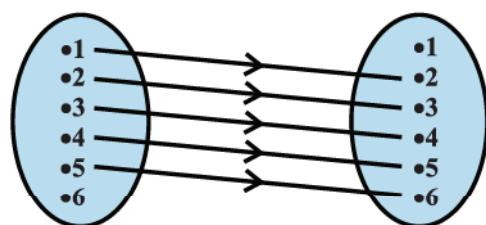
$$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}.$$

આ સંબંધને કિરણ આકૃતિ દ્વારા આકૃતિ 2.5 માં દર્શાવેલ છે.

- (ii) આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

$$\text{પ્રદેશ} = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$$

$$\text{વિસ્તાર} = \{2, 3, 4, 5, 6\}, \text{ સહપ્રદેશ} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$



આકૃતિ 2.5

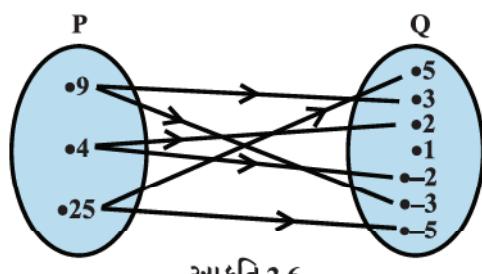
ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 2.6 માં P થી Q નો સંબંધ દર્શાવેલ છે. આ સંબંધને (i) ગુણધર્મની રીતે (ii) યાદીની રીતે લખો. તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ?

ઉકેલ : અહીં સ્પષ્ટપણે જોઈ શકાય છે કે, સંબંધ R “x એ y નો વર્ગ છે”.

- (i) ગુણધર્મની રીતે, $R = \{(x, y) : x \text{ એ } y \text{ નો વર્ગ છે}, x \in P, y \in Q\}$

- (ii) યાદીની રીતે, $R = \{(9, 3), (9, -3), (4, 2), (4, -2), (25, 5), (25, -5)\}$

આ સંબંધનો પ્રદેશ $\{4, 9, 25\}$ છે.



આકૃતિ 2.6

આ સંબંધનો વિસ્તાર $\{-2, 2, -3, 3, -5, 5\}$ છે.

અહીં, જોઈ શકાય છે Q નો ઘટક 1 ગણ P ના કોઈપણ ઘટક સાથે સંકળાયો નથી.

ગણ Q એ સંબંધનો સહપ્રદેશ છે.

નોંધ ગણ A થી ગણ B પરના કુલ સંબંધોની સંખ્યા એ $A \times B$ ના ઉપગણોની સંખ્યા બરાબર થાય. જો $n(A) = p$ અને $n(B) = q$ હોય, તો $n(A \times B) = pq$ અને તેના સંબંધોની સંખ્યા 2^{pq} થાય.

ઉદાહરણ 9 : જો $A = \{1, 2\}$ અને $B = \{3, 4\}$ તો A થી B ના સંબંધની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

$$n(A \times B) = 4, A \times B \text{ ના ઉપગણોની સંખ્યા } 2^4 \text{ થાય.}$$

આમ, A થી B ના સંબંધોની સંખ્યા 2^4 થાય.

નોંધ : જો R એ A થી A નો સંબંધ હોય, તો સંબંધ R ને A પરનો સંબંધ પણ કહેવાય છે.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. $A = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$. $R = \{(x, y) : 3x - y = 0, જ્યાં x, y \in A\}$. જો R એ A થી A નો સંબંધ હોય, તો R નો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

2. $R = \{(x, y) : y = x + 5, x \text{ એ } 4 \text{ થી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે}, x, y \in \mathbb{N}\}$ થાય તે રીતે એક સંબંધ \mathbb{N} પર વ્યાખ્યાપિત છે. R ને યાદીની રીતે લખો. R નો પ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.
3. $A = \{1, 2, 3, 5\}$ અને $B = \{4, 6, 9\}$. $R = \{(x, y) : x \text{ અને } y \text{ નો તફાવત અધુગમ સંખ્યા છે}; x \in A, y \in B\}$ થાય તે રીતે સંબંધ A થી B પર વ્યાખ્યાપિત છે. R ને યાદીની રીતે લખો.
4. આકૃતિ 2.7 માં P થી Q નો સંબંધ દર્શાવેલ છે. આ સંબંધને
(i) ગુણધર્મની રીતે (ii) યાદીની રીતે લખો. તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ?
5. જો $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
 $R = \{(a, b) : a, b \in A, b \text{ એ } a \text{ વડે વિભાજ્ય છે}\}$ થાય તે રીતે સંબંધ R એ A પર વ્યાખ્યાપિત છે,
(i) R ને યાદીની રીતે લખો.
(ii) R નો પ્રદેશ મેળવો.
(iii) R નો વિસ્તાર મેળવો.
6. $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ થાય તે રીતે વ્યાખ્યાપિત સંબંધનો પ્રદેશ તેમજ વિસ્તાર મેળવો.
7. સંબંધ $R = \{(x, x^3) : x \text{ એ } 10 \text{ કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યા છે}\}$ ને યાદીના સ્વરૂપમાં લખો.
8. જો $A = \{x, y, z\}$ અને $B = \{1, 2\}$ તો A થી B ના સંબંધોની સંખ્યા શોધો.
9. R એ \mathbb{Z} પર $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, a - b \text{ એ પૂર્ણાંક છે}\}$ દ્વારા વ્યાખ્યાપિત છે. R નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

2.4 વિધેયો (Functions)

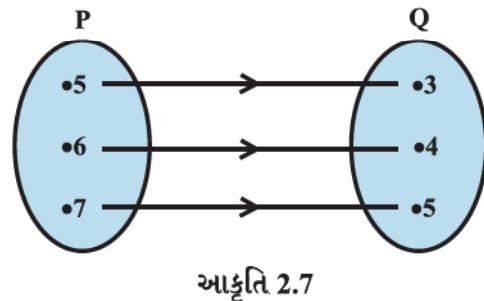
હવે આ પરિચ્છેદમાં આપણો વિધેય (function) તરીકે પ્રચાલિત એક વિશિષ્ટ સંબંધનો અભ્યાસ કરીશું. વિધેયની સંકલ્પના ગણિતશાસ્ત્રના પાયાની વિખયવસ્તુમાંની એક સંકલ્પના છે. આપણો વિધેયને નિયમ તરીકે વિચારી શકીએ. આ નિયમની મદદથી આપણો આપેલા ઘટકોમાંથી નવા ઘટકો શોધી શકીએ. વિધેયને દર્શાવવા માટે સંગતતા જેવો શરૂ પણ વપરાય છે.

વ્યાખ્યા 5 અરિક્ત ગણ A અને ગણ B માટે, સંબંધ f દ્વારા ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટકને સંગત ગણ B માં અનન્ય પ્રતિબિંબ મળે તો આ સંબંધ f ને A થી B નું વિધેય કહે છે.

બીજા શરૂદોમાં કહીએ તો જેનો પ્રદેશ અરિક્ત ગણ A હોય અને જે સંબંધની કોઈ પણ બે તિના કમયુક્ત જોડના પ્રથમ ઘટક સમાન ન હોય તેવા અરિક્ત ગણ A થી અરિક્ત ગણ B ના સંબંધનો વિધેય કહે છે.

જો f એ A થી B નું વિધેય હોય અને, $(a, b) \in f$, તો $f(a) = b$. અહીં b એ f દ્વારા મળતું a નું પ્રતિબિંબ કહેવાય છે અને a ને f દ્વારા b નું પૂર્વ પ્રતિબિંબ કહેવાય છે.

A થી B પરના વિધેયને $f: A \rightarrow B$ લખાય છે. અગાઉ જોયેલાં ઉદાહરણો પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ તો, સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે ઉદાહરણ 7 માં આપેલ સંબંધ એ વિધેય નથી. કારણ કે, ઘટક 6 ને કોઈ પ્રતિબિંબ નથી.



ફરી, ઉદાહરણ 8 માં દર્શાવેલ સંબંધ પણ વિધેય નથી. કારણ કે, પ્રદેશના અમુક ઘટકોને એક કરતાં વધુ પ્રતિબિંબ છે. તે જ પ્રમાણે ઉદાહરણ 9 નો સંબંધ પણ વિધેય નથી (કેમ ?). નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આપણે ભીજા ઘણા સંબંધ જોઈશું. તે પૈકી કેટલાક વિધેય છે અને કેટલાક વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 10 : N એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે અને તેની પર વ્યાખ્યાયિત કોઈ સંબંધ R એવો છે કે $R = \{(x, y) : y = 2x, x, y \in N\}$ તો R નો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો. શું આ સંબંધ વિધેય છે?

ઉકેલ : અહીં, સંબંધ R નો પ્રદેશ ગણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણ N છે, સહપ્રદેશ પણ N છે અને વિસ્તાર એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

અહીં, પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n ને એક અને માત્ર એક પ્રતિબિંબ છે. આમ, આ સંબંધ વિધેય છે.

ઉદાહરણ 11 : નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આપેલ સંબંધ ચકાસો અને પ્રત્યેક સંબંધ વિધેય છે કે નહિ તે કારણ આપી જણાવો.

- $R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 2)\},$
- $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
- $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$

ઉકેલ : (i) અહીં 2, 3 અને 4 એ R ના પ્રદેશના ઘટકો છે અને તે દરેક ઘટકને અનુરૂપ અનન્ય પ્રતિબિંબ મળે છે. તેથી આ સંબંધ R એ વિધેય છે.
(ii) અહીં, R ના પ્રદેશના એક ઘટક 2 ને બે પ્રતિબિંબ 2 અને 4 મળે છે. તેથી આ સંબંધ વિધેય નથી.
(iii) અહીં, પ્રદેશના પ્રત્યેક ઘટકને અનુરૂપ એક અને માત્ર એક પ્રતિબિંબ છે તેથી આ સંબંધ વિધેય છે.

વ્યાખ્યા 6 : જો કોઈ વિધેયનો વિસ્તાર R કે R નો કોઈ ઉપગણ હોય તો તે વિધેયને વાસ્તવિક કિંમતોનું વિધેય કહે છે અને જો તેનો પ્રદેશ પણ R અથવા R નો કોઈ ઉપગણ હોય, તો તેને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે.

ઉદાહરણ 12 : N એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. $f: N \rightarrow N$. $f(x) = 2x + 1$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય છે. આ વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = \dots$	$f(2) = \dots$	$f(3) = \dots$	$f(4) = \dots$	$f(5) = \dots$	$f(6) = \dots$	$f(7) = \dots$

ઉકેલ : પૂર્ણ કરેલ કોષ્ટક નીચે મુજબ છે :

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = 3$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$	$f(4) = 9$	$f(5) = 11$	$f(6) = 13$	$f(7) = 15$

2.4.1 કેટલાંક વિધેયો અને તેમના આલોખો :

(i) તદેવ વિધેય (*Identity Function*) : જો R એ વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણા હોય, તો પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f: R \rightarrow R, y = f(x) = x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેયનો તદેવ વિધેય કહેવાય. આ વિધેય f નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર R છે. આ વિધેયનો આલોખ આકૃતિ 2.8 માં દર્શાવેલ ઉગમણિકુમાંથી પસાર થતી રેખા થશે.

નોંધ : $f: A \rightarrow A, f(x) = x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય પણ તદેવ વિધેય છે.

(ii) અચળ વિધેય (*Constant Function*) : c કોઈ અચળ હોય તથા પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $y = f(x) = c$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f: R \rightarrow R$ ને અચળ વિધેય કહે છે. અહીં, f નો પ્રદેશ R અને વિસ્તાર $\{c\}$ છે.

અચળ વિધેયનો આલોખ X -અક્ષને સમાંતર રેખા થાય. ઉદાહરણ તરીકે જો પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f(x)=3$ તો આ આલોખ આકૃતિ 2.9 માં દર્શાવેલ રેખા થશે.

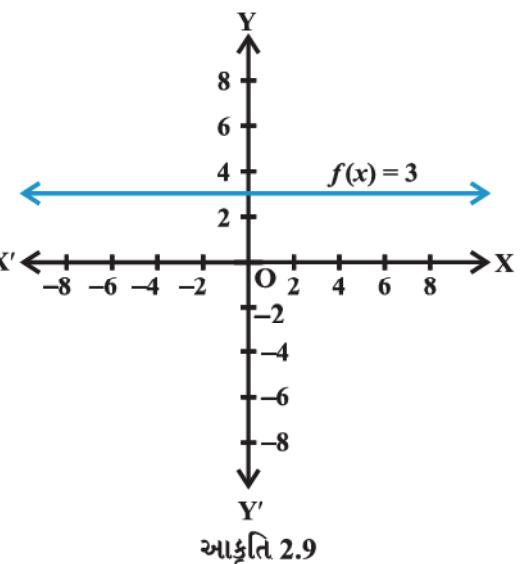
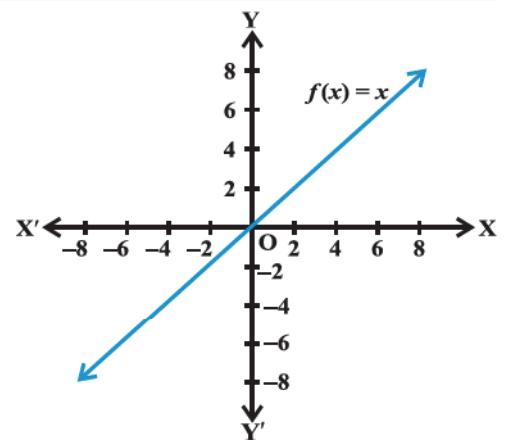
(iii) બહુપદી વિધેય (*Polynomial Function*) : જો પ્રત્યેક $x \in R$ માટે વિધેય $f: R \rightarrow R, y=f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, ને n ધાતનું બહુપદી વિધેય કહે છે. અહીં, n એ અનુષ્ઠાનિક છે અને $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ તથા $a_n \neq 0$. $f(x)=x^3-x^2+2$, અને $g(x)=x^4+\sqrt{2}x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો બહુપદી વિધેયનાં ઉદાહરણો છે, જ્યારે $h(x)=x^{\frac{2}{3}}+2x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય બહુપદી વિધેય નથી. (કેમ ?)

ઉદાહરણ 13 : $f: R \rightarrow R, y = f(x) = x^2, x \in R$ થી વ્યાખ્યાયિત એક વિધેય છે. આ વ્યાખ્યાના આધારે નીચેનું કોણક પૂર્ણ કરો. આ વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ? f નો આલોખ દોરો.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

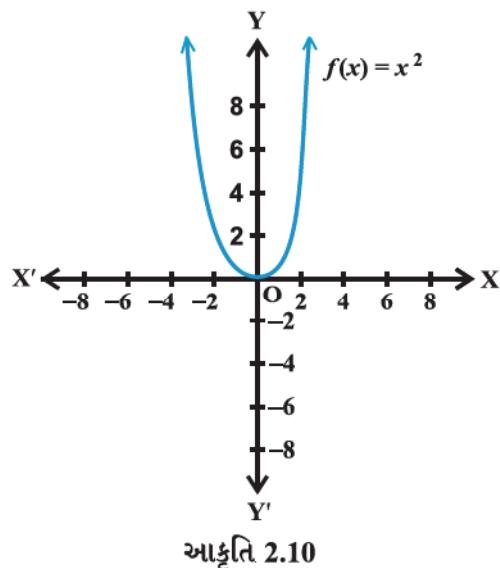
ઉકેલ : પૂર્ણ કરેલ કોણક નીચે આપેલ છે :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16



f નો પ્રદેશ = $\{x : x \in \mathbf{R}\}$, f નો વિસ્તાર = $\{x^2 : x \in \mathbf{R}\}$. આ વિધેય

f નો આલેખ આકૃતિ 2.10 પ્રમાણેનો મળે.

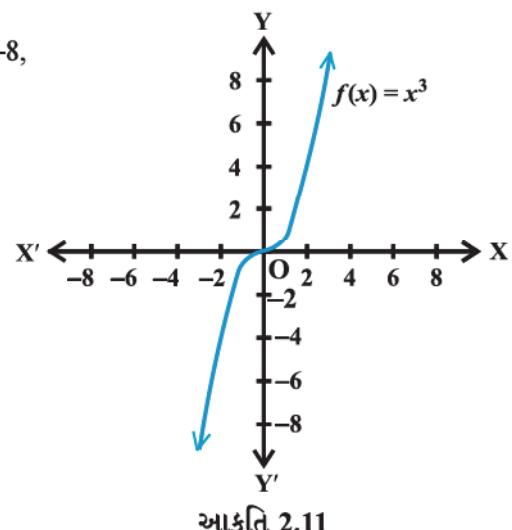


ઉદાહરણ 14 : $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3, x \in \mathbf{R}$ થી વ્યાખ્યાપિત વિધેયનો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : અહીં, $f(0) = 0, f(1) = 1, f(-1) = -1, f(2) = 8, f(-2) = -8,$
 $f(3) = 27; f(-3) = -27$, વગેરે.

અહીં, $f = \{(x, x^3) : x \in \mathbf{R}\}$.

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.11 માં દર્શાવેલ છે.



(iv) સંમેય વિધેય (Rational Function) : $g(x) \neq 0$ હોય

તેવા પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાપિત બહુપદી વિધેય $f(x)$ અને $g(x)$

માટે $\frac{f(x)}{g(x)}$ ને સંમેય વિધેય કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 15 : $f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ થી વ્યાખ્યાપિત એક વિધેય આપેલ છે. આ વ્યાખ્યાના આધારે

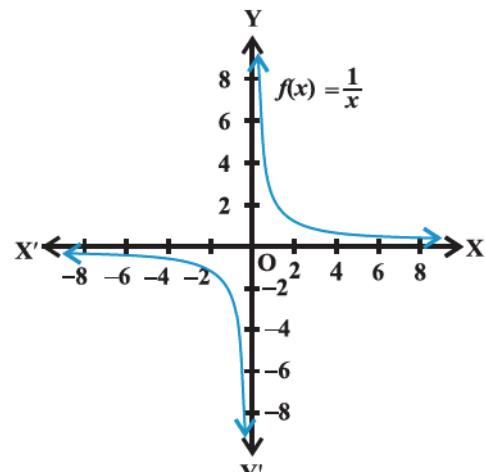
નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો. આ વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શું થશે ?

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$

ઉકેલ : પૂર્ણ કરેલ કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે છે :

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	-0.5	-0.67	-1	-2	4	2	1	0.67	0.5

વિધેયનો પ્રદેશ પ્રત્યેક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ થશે અને તેનો વિસ્તાર પણ પ્રત્યેક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ થશે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.12 માં દર્શાવેલ છે.

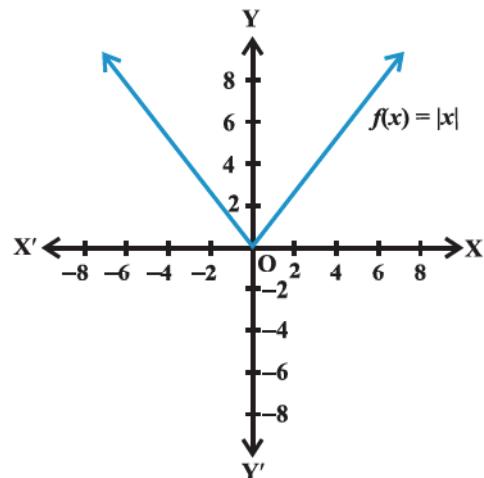


આકૃતિ 2.12

(v) માનાંક વિધેય (*Modulus Function*): પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે વિધેય $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ થી વ્યાખ્યાયિત થતું વિધેય માનાંક વિધેય કહેવાય છે. પ્રત્યેક અનૂષ્ઠાન માટે $f(x)$ નું મૂલ્ય x બરાબર હોય અને પ્રત્યેક ઋષ્ઠ માટે $f(x)$ નું મૂલ્ય $-x$ બરાબર હોય છે.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

માનાંક વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.13 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે થાય.

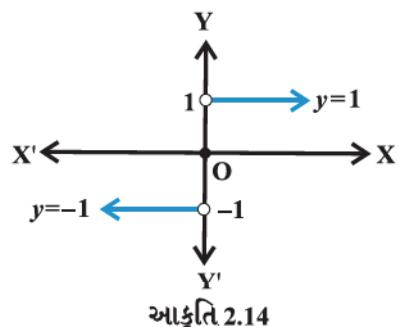


આકૃતિ 2.13

(vi) ચિહ્ન વિધેય (*Signum Function*): વિધેય $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

થી વ્યાખ્યાયિત થતા વિધેયને ચિહ્ન વિધેય કહેવાય છે. આ વિધેયનો પ્રદેશ \mathbf{R} છે અને વિસ્તાર $\{-1, 0, 1\}$ છે. આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.14 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણોનો થાય.



આકૃતિ 2.14

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(vii) મહત્તમ પૂર્ણક વિધેય (*Greatest integer Function*): વિધેય $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$ એ x થી નાના હોય અથવા x ને સમાન હોય તેવા તમામ પૂર્ણકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણક દર્શાવે, તો આ વિધેયને મહત્તમ પૂર્ણક વિધેય કહે છે.

$[x]$ ની વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે,

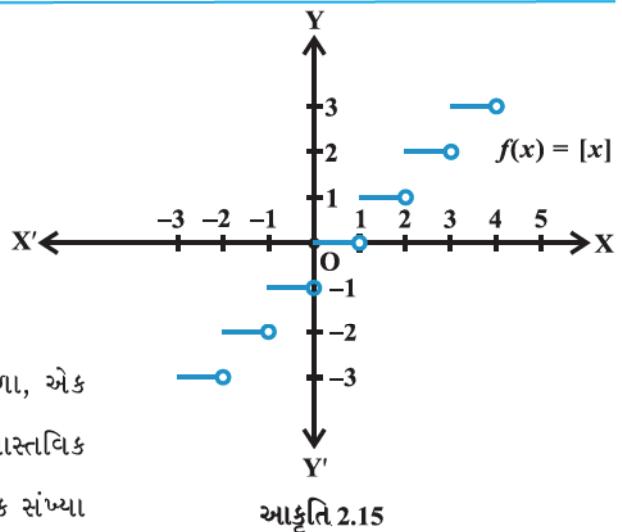
$$[x] = -1, \quad -1 \leq x < 0$$

$$[x] = 0, \quad 0 \leq x < 1$$

$$[x] = 1, \quad 1 \leq x < 2$$

$$[x] = 2, \quad 2 \leq x < 3 \text{ વગેરે}.$$

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.15 માં દર્શાવ્યા મુજબ થશે.



2.4.2 વાસ્તવિક વિધેયો પરની બૈજિક કિયાઓ :

આ વિભાગમાં આપણો બે વાસ્તવિક વિધેયના સરવાળા, એક વાસ્તવિક વિધેયની બીજા વાસ્તવિક વિધેયમાંથી બાદબાકી, વાસ્તવિક વિધેયનો અદિશ સાથે ગુણાકાર(અહીં અદિશ એટલે વાસ્તવિક સંખ્યા અને સમજશુણું), બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ગુણાકાર અને એક વાસ્તવિક વિધેયનો બીજા વાસ્તવિક વિધેય સાથે ભાગાકાર વિશે અભ્યાસ કરીશું :

- (i) બે વિધેયોનો સરવાળો : $X \subset \mathbb{R}$ માટે $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ અને $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો તેમનો સરવાળો $f+g: X \rightarrow \mathbb{R}$, પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.
- (ii) બે વિધેયોની બાદબાકી : $X \subset \mathbb{R}$ માટે $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ અને $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો તેમની બાદબાકી પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(f-g): X \rightarrow \mathbb{R}$ $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.
- (iii) અદિશ વડે વિધેયનો ગુણાકાર : ધારો કે, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ એ વાસ્તવિક વિધેય છે અને α એ કોઈ અદિશ છે. અહીં, અદિશ એટલે કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા. તેમનો ગુણાકાર αf એ X થી \mathbb{R} નું વિધેય છે અને તે પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.
- (iv) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ગુણાકાર : $X \subset \mathbb{R}$ માટે બે વાસ્તવિક વિધેયો $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ અને $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ નો ગુણાકાર $fg: X \rightarrow \mathbb{R}$, પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $(fg)(x) = f(x)g(x)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.
- (v) બે વાસ્તવિક વિધેયોનો ભાગાકાર : ધારો કે $X \subset \mathbb{R}$ માટે બે વાસ્તવિક વિધેયો f અને g , X થી \mathbb{R} પર વ્યાખ્યાયિત છે, બે વિધેયો f અને g નો ભાગાકાર $\frac{f}{g}$ દ્વારા દર્શાવાય છે અને $g(x) \neq 0$ હોય તેવા પ્રત્યેક $x \in X$ માટે $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 16 : $f(x) = x^2$ અને $g(x) = 2x + 1$ બે વાસ્તવિક વિધેયો હોય, તો

$$(f+g)(x), (f-g)(x), (fg)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ શોધો.}$$

ઉકેલ : અહીં,

$$(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1, \quad (f-g)(x) = x^2 - 2x - 1,$$

$$(fg)(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1}, \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 17 : $f(x) = \sqrt{x}$ અને $g(x) = x$ એ બે અનુષ્ઠાનિક વાસ્તવિક સંખ્યાના ગણ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય, તો

$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ અને $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $(f+g)(x) = \sqrt{x} + x$, $(f-g)(x) = \sqrt{x} - x$,

$$(fg)x = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ sucht } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0$$

स्वाध्याय 2.3

1. નીચેના પૈકી ક્યો સંબંધ વિધેય છે ? કારણ આપો. જો તે વિધેય હોય, તો તેનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

- (i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$
 (ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$
 (iii) $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$

2. નીચેના વાસ્તવિક વિધેયના પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો :

$$(i) \quad f(x) = -|x| \qquad \qquad (ii) \quad f(x) = \sqrt{9-x^2}$$

3. $f(x) = 2x - 5$ થી વાખ્યાયિત વિધેય માટે નીચેની કિંમતો શોધો :

4. વિધેય 't' એ સેલ્સિયસમાં ઉષાતામાન અને ફેરનહીટમાં ઉષાતામાન વચ્ચે રૂપાંતર કરતું સૂત્ર $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો નીચેનાં મૂલ્યો શોધો :

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) જે $t(C) = 212$ હોય, તો C શેધો.

5. નીચેનાં વિધેયોના વિસ્તાર શોધો :

$$(i) \quad f(x) = 2 - 3x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad x > 0$$

(ii) $f(x) = x^2 + 2$, x વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

(iii) $f(x) = x$, x વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

પ્રક્રીષ્ટ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 18 : વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ \mathbf{R} પર વ્યાખ્યાપિત વાસ્તવિક વિધેય $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 10$ હોય, તો વિધેય f નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : અહીં, $f(0) = 10, f(1) = 11, f(2) = 12, \dots, f(10) = 20$ વગેરે અને $f(-1) = 9, f(-2) = 8, \dots, f(-10) = 0$ વગેરે.

માટે આ વિધેયનો આલેખનો આકૃતિ 2.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળશે.

નોંધ : $f(x) = mx + c, x \in \mathbb{R}$ દ્વારા વાખ્યાયિત વિધેયને સુરેખ વિધેય કહે છે.

અહીં, m અને c અચળ છે. ઉપરનું વિધેય એ સુરેખ વિધેયનું ઉદાહરણ છે.

ઉદાહરણ 19 : જો R એ \mathbb{Q} થી \mathbb{Q} પરનો

$R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \text{ અને } a - b \in \mathbb{Z}\}$ થાય તે રીતે વાખ્યાયિત સંબંધ છે.

તો બતાવો કે,

- પ્રત્યેક $a \in \mathbb{Q}$ માટે, $(a, a) \in R$
- જો $(a, b) \in R$ તો $(b, a) \in R$
- જો $(a, b) \in R$ અને $(b, c) \in R$ તો $(a, c) \in R$

ઉક્તાનું : (i) અહીં, $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$. તેથી $(a, a) \in R$.

(ii) જો $(a, b) \in R$ તો $a - b \in \mathbb{Z}$. તેથી, $b - a \in \mathbb{Z}$. તેથી, $(b, a) \in R$

(iii) જો $(a, b) \in R$ અને $(b, c) \in R$ તો $a - b \in \mathbb{Z}$. $b - c \in \mathbb{Z}$. તેથી,

$$a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}. \text{ તેથી, } (a, c) \in R$$

ઉદાહરણ 20 : $f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$ થાય તે રીતે \mathbb{Z} પર વાખ્યાયિત સુરેખ વિધેય હોય, તો $f(x)$ શોધો.

ઉક્તાનું : અહીં, f સુરેખ વિધેય હોવાથી $f(x) = mx + c$ લો. વળી, $(1, 1), (0, -1) \in f$,

$$f(1) = m + c = 1 \text{ અને } f(0) = c = -1. \text{ આ પરથી } m = 2 \text{ અને } f(x) = 2x - 1.$$

ઉદાહરણ 21 : $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ હોય, તો વિધેયનો પ્રદેશ શોધો.

ઉક્તાનું : અહીં, $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, અહીં વિધેય f એ $x = 4$ અને $x = 1$ સિવાયની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યા પર વાખ્યાયિત છે. આથી વિધેય f નો પ્રદેશ $\mathbb{R} - \{1, 4\}$.

ઉદાહરણ 22 : $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \\ 1, & x=0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ થી વાખ્યાયિત વિધેયનો આલેખ દોરો.

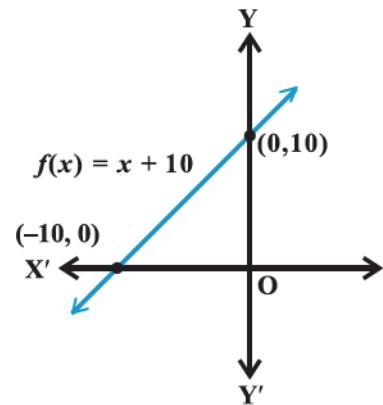
ઉક્તાનું : અહીં, $f(x) = 1 - x, x < 0$,

$$\text{આથી, } f(-4) = 1 - (-4) = 5;$$

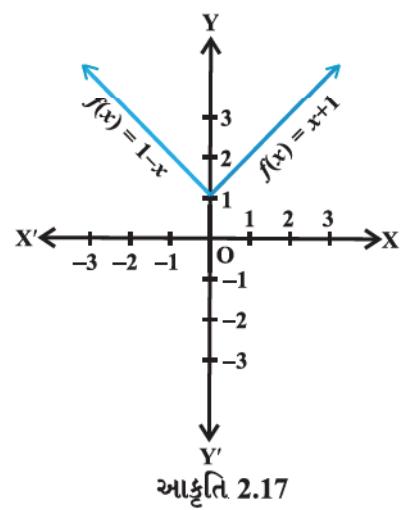
$$f(-3) = 1 - (-3) = 4,$$

$$f(-2) = 1 - (-2) = 3$$

$$f(-1) = 1 - (-1) = 2; \text{ વગેરે}$$



આકૃતિ 2.16



આકૃતિ 2.17

વળી, $f(x) = x + 1, x > 0.$

આથી, $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$

$f(4) = 5;$ વળે.

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 2.17 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળે.

પ્રક્રીણ સ્વાધ્યાય 2

1. સંબંધ f એટા $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ 3x, & 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$ થી વ્યાખ્યાયિત છે અને

સંબંધ g એટા $g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 3x, & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$ થી વ્યાખ્યાયિત છે, તો સાબિત કરો કે f એ વિધેય છે અને g વિધેય નથી.

2. જેણે $f(x) = x^2$, તો $\frac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ શોધો.

3. વિધેય $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ નો પ્રદેશ શોધો.

4. $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ થી વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય f નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

5. $f(x) = |x - 1|$ થી વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય f નો પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

6. જેણે $f = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{1+x^2} \right) : x \in \mathbf{R} \right\}$ એ \mathbf{R} થી \mathbf{R} નું વિધેય હોય, તો તે વિધેય f નો વિસ્તાર શોધો.

7. $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 1, g(x) = 2x - 3$ થી વ્યાખ્યાયિત વિધેય છે, તો $f + g, f - g$ અને $\frac{f}{g}$ શોધો.

8. જેણે $f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$ એટા $f(x) = ax + b$, થી વ્યાખ્યાયિત સંબંધ હોય, તો a અને b શોધો.

9. \mathbf{R} એ \mathbf{N} થી \mathbf{N} નો સંબંધ છે. $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{N} \text{ અને } a = b^2\}$ થાય તે રીતે વ્યાખ્યાયિત છે, તો શું નીચેનાં વિધાનનો સત્ય છે ?

(i) પ્રત્યેક $a \in \mathbf{N}$ માટે $(a, a) \in R$

(ii) જો $(a, b) \in R$, તો $(b, a) \in R$

(iii) જો $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ તો $(a, c) \in R$

પ્રત્યેક વિધાનમાં તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

10. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$ અને $f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 1), (4, 5), (2, 11)\}$, તો શું નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે ?
- f એ A થી B નો સંબંધ છે.
 - f એ A થી B પરનું વિધેય છે. પ્રત્યેક વિકલ્પમાં તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.
11. f એ $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ નો ઉપગણ છે. જો $f = \{(ab, a+b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ થી વ્યાખ્યાપિત છે, તો શું f એ \mathbf{Z} થી \mathbf{Z} નું વિધેય છે ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.
12. $A = \{9, 10, 11, 12, 13\}$ અને $f: A \rightarrow \mathbf{N}$, $f(n) = n$ નો મહત્તમ અવિભાજ્ય અવયવ છે. f નો વિસ્તાર મેળવો.

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણો સંબંધ અને વિધેયનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણની મુખ્ય વિશેષતાઓ નીચે મુજબ છે :

◆ ક્રમયુકૃત જોડઃ કોઈ ચોક્કસ ક્રમમાં બનાવેલ જોડને ક્રમયુકૃત જોડ કહે છે.

◆ કાર્ટેન્ઝિય ગુણાકારઃ બે ગણ A અને B નો કાર્ટેન્ઝિય ગુણાકાર, $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

વિશિષ્ટ ડિસ્સામાં $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$

અને $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$

◆ જો $(a, b) = (x, y)$, તો $a = x$ અને $b = y$.

◆ જો $n(A) = p$ અને $n(B) = q$, તો $n(A \times B) = pq$.

◆ $A \times \phi = \phi$

◆ સામાન્ય રીતે, $A \times B \neq B \times A$.

◆ સંબંધઃ ગણ A અને B માટે $A \times B$ ના કોઈ ઉપગણને A થી B નો સંબંધ R કહે છે. આ $A \times B$ નો ઉપગણ ક્રમયુકૃત જોડના પ્રથમ ઘટક x અને બીજા ઘટક y વચ્ચે કોઈ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરવાથી મળે છે.

◆ જો $(x, y) \in R$, તો ઘટક x નું સંબંધ R ને અંતર્ગતનું પ્રતિબિંબ બિંદુ y હોય છે.

◆ સંબંધ R ની પ્રત્યેક ક્રમયુકૃત જોડના પ્રથમ ઘટકથી બનતા ગણને સંબંધ R નો પ્રદેશ કહે છે.

◆ સંબંધ R ની પ્રત્યેક ક્રમયુકૃત જોડના બીજા ઘટકથી બનતા ગણને સંબંધ R નો વિસ્તાર કહે છે.

◆ વિધેયએ ગણ A થી ગણ B પરનો એક વિશિષ્ટ પ્રકારનો સંબંધ છે. તેમાં ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટક x ને સંગત ગણ B માં અનન્ય પ્રતિબિંબ y મળે છે. આને આપણો $y = f(x)$ માટે $f: A \rightarrow B$ દ્વારા દર્શાવીશું.

◆ ગણ A ને વિધેય f નો પ્રદેશ અને ગણ B ને વિધેય f નો સહપ્રદેશ કહેવાય.

◆ વિધેય f ના પ્રતિબિંબના ગણને વિધેયનો વિસ્તાર કહે છે.

◆ કોઈ પણ વાસ્તવિક વિધેયનો પ્રદેશ અને વિસ્તાર બંને વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ કે તેનો ઉપગણ હોય છે.

- ◆ વિધેય પરની બૈજિક ટ્રિયાઓ :

$f: X \rightarrow \mathbf{R}$ અને $g: X \rightarrow \mathbf{R}$, વિધેય હોય, તો

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in X$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in X$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in X$$

$$(kf)(x) = k(f(x)), x \in X, જ્યાં k કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in X, g(x) \neq 0$$

Historical Note

The word FUNCTION first appears in a Latin manuscript “Methodus tangentium inversa, seu de functionibus” written by Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) in 1673; Leibnitz used the word in the non-analytical sense. He considered a function in terms of “mathematical job”—the “employee” being just a curve.

On July 5, 1698, Johan Bernoulli, in a letter to Leibnitz, for the first time deliberately assigned a specialised use of the term *function* in the analytical sense. At the end of that month, Leibnitz replied showing his approval.

Function is found in English in 1779 in Chambers' Cyclopaedia: “The term function is used in algebra, for an analytical expression any way compounded of a variable quantity, and of numbers, or constant quantities”.

