પ્રકરણ 3

ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

❖*A mathematician knows how to solve a problem, he can not solve it. – MILNE* ❖

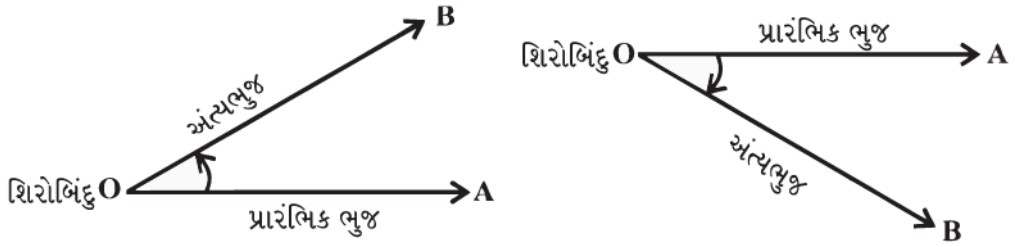
3.1 પ્રાસ્તાવિક

ત્રિકોણમિતિ(*Trigonometry*) શબ્દ બે ગ્રીક શબ્દો '*trigon*' અને '*metron*'ના સમન્વયથી બનેલ છે અને તેનો અર્થ 'ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ' એવો થાય છે. મૂળભૂત રીતે આ વિષય ત્રિકોણને સાંકળતા ભૌમિતિક પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા માટે વિકસ્યો હતો. તેનો અભ્યાસ સમુદ્રી કપ્તાનો દિશા જાણવા માટે, નવી જમીનના માપન માટે મોજણીદાર, ઇજનેરો અને અન્ય લોકો કરતાં હતા. હાલમાં, ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ ભૂકંપ વિજ્ઞાનમાં, ઇલેક્ટ્રિક સર્કિટની ડિઝાઇનમાં, અણુની સ્થિતિ જાણવા માટે, દરિયામાં આવતાં મોજાંની ઊંચાઇનું અનુમાન કરવા માટે, સંગીતના સૂરનું વિશ્લેષણ કરવા માટે જેવાં ઘણાં ક્ષેત્રોમાં અને અન્ય પ્રદેશોમાં થાય છે.

Arya Bhatt
(476-550)

આપણે અગાઉનાં ધોરણોમાં લઘુકોણ માટે કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓના ગુણોત્તર સ્વરૂપે ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો અભ્યાસ કર્યો. વળી, આપણે ત્રિકોણમિતિય એકરૂપતા અને ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરનો ઉપયોગ ઊંચાઈ અને અંતરને લગતા પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા માટે કરેલ છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ વ્યાપક સ્વરૂપે ત્રિકોણમિતિય વિધેયો તરીકે કરીશું અને તેના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું.

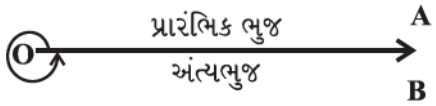
3.2 ખૂણા



(i) ધન ખૂણો આકૃતિ 3.1 **(ii)** ઋણ ખૂણો

આરંભબિંદુથી શરૂ થતા કિરણના પરિભ્રમણના માપને ખૂણાનું માપ કહેવાય. મૂળ કિરણને ખૂણાની *પ્રારંભિક બાજુ* કહેવાય અને પરિભ્રમણ થયા પછીની કિરણની અંતિમ સ્થિતિને ખૂણાની *અંત્યબાજુ* કહેવાય. જે બિંદુથી પરિભ્રમણ કરાય છે તેને ખૂણાનું *શિરોબિંદુ* કહેવાય. જો પરિભ્રમણની દિશા ઘડિયાળના કાંટાની વિરુધ્ધ દિશા હોય, તો ખૂણાનું માપ ધન કહેવાય અને જો પરિભ્રમણની દિશા એ ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં હોય તો ખૂણાનું માપ ઋણ કહેવાય. (આકૃતિ **3.1**)

ખૂણાનું માપ એટલે પ્રારંભિક બાજુથી અંત્યબાજુ સુધી થયેલા પરિભ્રમણનું માપ. ખૂણાનું માપ મેળવવા માટે અલગ અલગ એકમો છે. ખૂણાની વ્યાખ્યા પરથી એકમનું સૂચન મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રારંભિક બાજુથી *એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ.*



આકૃતિ 3.2

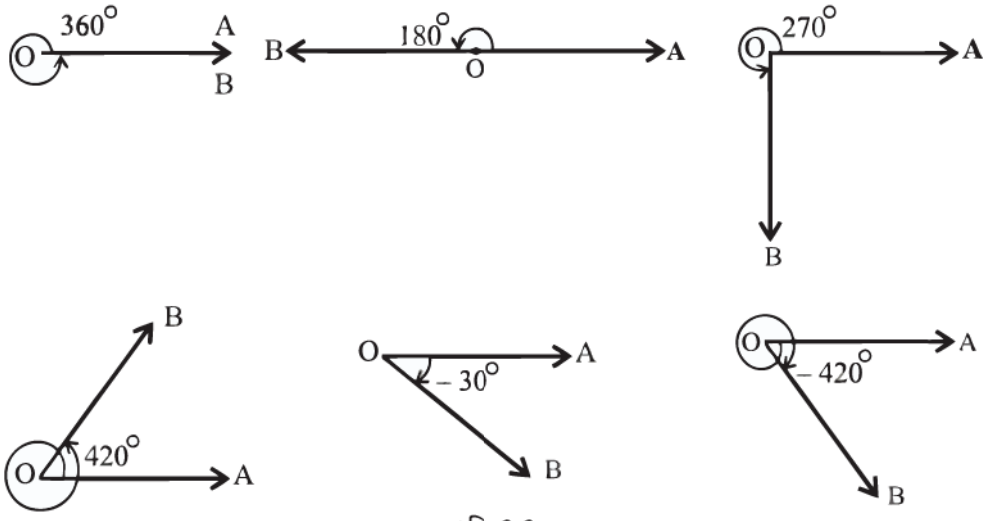
આ માપ મોટા ખૂણા માટે વધુ અનુકૂળ રહે. ઉદાહરણ તરીકે, ઝડપથી ફરતું પૈડું એક સેકન્ડમાં 15 પરિભ્રમણ કરે છે. ખૂણા માપવા માટે આપણે બીજા બે વ્યાપક રીતે વપરાતા એકમો વિચારીશું, જેમકે અંશ માપ અને રેડિયન માપ.

3.2.1 અંશ માપ

જો પ્રારંભિક બાજુથી અંત્યબાજુ સુધીનું પરિભ્રમણ એક પૂર્ણ પરિભ્રમણના $\left(\frac{1}{360}\right)$ મા ભાગનું હોય, તો બનતા ખૂણાનું માપ 1 અંશ માપ કહેવાય તથા $1°$ એમ લખાય. એક અંશના 60 મા ભાગને એક મિનિટ કહેવાય અને તેને $1'$ લખાય અને એક મિનિટના 60 મા ભાગને એક સેકંડ કહેવાય અને તેને $1''$ લખાય.

તેથી, $1° = 60'$, $1' = 60''$

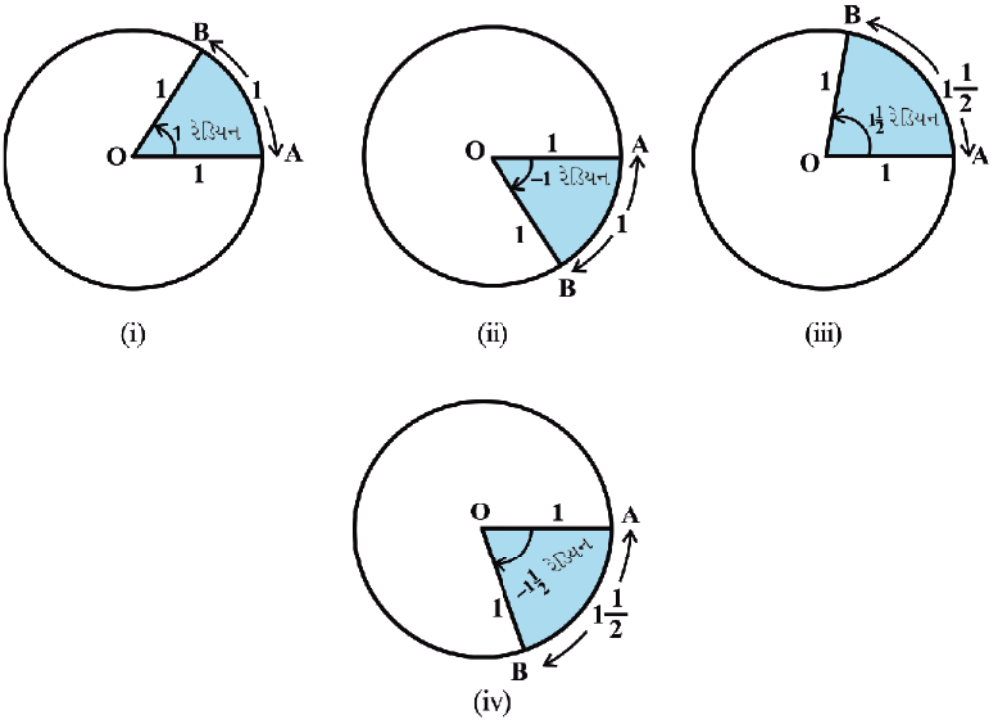
જેમનાં માપ 360°, 180°, 270°, 420°, – 30°, – 420° છે તેવા કેટલાક ખૂણા આકૃતિ 3.3 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.3

3.2.2 રેડિયન માપ

ખૂણાના માપ માટે જેને ***રેડિયન માપ*** (*radian measure*) કહેવાય છે તેવો બીજો એકમ પણ છે. આપણે એકમ વર્તુળ (1 એકમ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ)ના કેન્દ્ર આગળ 1 એકમ વૃત્તિય લંબાઈવાળા ચાપથી બનતા ખૂણાને 1 રેડિયન કહીશું. આકૃતિઓ 3.4 (i) થી (iv) માં OA એ પ્રારંભિક બાજુ છે અને OB અંત્યબાજુ છે. આ આકૃતિઓ 1 રેડિયન, -1 રેડિયન, $1\frac{1}{2}$ રેડિયન અને $-1\frac{1}{2}$ રેડિયન માપવાળા ખૂણા દર્શાવે છે.



આકૃતિ **3.4 (i) થી(iv)**

આપણે જાણીએ છીએ કે એક એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો પરિઘ 2π હોય છે. આમ, પ્રારંભિક બાજુથી એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ 2π રેડિયન માપનો ખૂણો બનાવે.

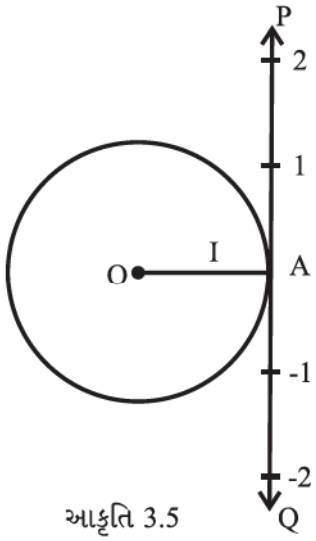
વ્યાપક રીતે, r એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં r લંબાઈના ચાપ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતા ખૂણાનું માપ 1 રેડિયન છે. એ તો આપણે જાણીએ જ છીએ કે, સમાન લંબાઈના ચાપ દ્વારા બનતા ખૂણાનું માપ સમાન હોય. હવે, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં r લંબાઈના ચાપ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતા ખૂણાનું માપ 1 રેડિયન છે. આથી આ વર્તુળમાં l લંબાઈના ચાપ દ્વારા બનતા ખૂણાનું માપ $\frac{l}{r}$ રેડિયન થાય. તેથી, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં l લંબાઈનો ચાપ કેન્દ્ર આગળ θ રેડિયનનો ખૂણો બનાવે તો,

$$\theta = \frac{l}{r} \qquad \text{અથવા} \qquad l = r\theta.$$

3.2.3 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને રેડિયન માપ વચ્ચેનો સંબંધ

O કેન્દ્ર ધરાવતું એકમ વર્તુળ લો. વર્તુળ પરનું કોઈ બિંદુ A લો. ખૂણા માટે OA ને પ્રારંભિક બાજુ લો. વર્તુળના કોઈપણ ચાપની લંબાઈ ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું રેડિયન માપ આપશે. ધારો કે રેખા PAQ એ વર્તુળનો Aઆગળનો

સ્પર્શક છે. ધારો કે, બિંદુ A એ વાસ્તવિક સંખ્યા શૂન્ય બતાવે છે. AP ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને AQ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ દર્શાવે છે. (આકૃતિ 3.5) જો એક દોરડાથી રેખા AP ને ઘડિયાળના કાંટાની વિરુધ્ધ દિશામાં અને AQને ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં વર્તુળ પર વીંટાળવામાં આવે, તો પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાને અનુરૂપ રેડિયન માપ મળે અને તેનાથી ઊલ્ટું પણ બને. આમ, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને રેડિયન માપ એ બંનેને એકના એક જ લઈ શકાય.



આકૃતિ 3.5

3.2.4 અંશ માપ અને રેડિયન માપ વચ્ચેનો સંબંધ

વર્તુળ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતા ખૂણાનું રેડિયન માપ 2π અને અંશ માપ $360°$ છે. આથી, કહી શકાય કે, 2π રેડિયન= $360°$ અથવા π રેડિયન = $180°$.

ઉપરના સંબંધનો ઉપયોગ કરી રેડિયન માપના ખૂણાને અંશ માપમાં અને અંશ માપને રેડિયન માપમાં દર્શાવી શકાય. π ની લગભગ કિંમત $\frac{22}{7}$ લેતાં,

$$1 \text{ રેડિયન} = \frac{180°}{\pi} = 57° \ 16' \text{ (લગભગ)}$$

$$\text{તથા } 1° = \frac{\pi}{180} \text{ રેડિયન} = 0.01746 \text{ રેડિયન (લગભગ)}$$

સામાન્ય રીતે વપરાતા કેટલાક ખૂણાના અંશ માપ અને રેડિયન માપ વચ્ચે સંબંધ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

અંશ	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
રેડિયન	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

રૂઢિગત સાંકેતો

આપણે રૂઢિગત રીતે સ્વીકારીશું કે ખૂણાઓને અંશ કે રેડિયનમાં મપાતા હોવાથી, જો $\theta°$ લખીએ, તો θ ખૂણાનું અંશ માપ અને જો ખૂણો β લખીએ, તો β ખૂણાનું રેડિયન માપ દર્શાવે છે. આપણે નોંધીએ કે જ્યારે ખૂણાને રેડિયન માપમાં લખાય, ત્યારે રેડિયન શબ્દ દર વખતે લખીશું નહિ.

આમ, $\pi = 180°$ અને $\frac{\pi}{4} = 45°$ લખીએ ત્યારે સમજીશું કે π અને $\frac{\pi}{4}$ રેડિયન માપ છે. આમ કહી શકાય કે,

$$\text{રેડિયન માપ} = \frac{\pi}{180} \times \text{અંશ માપ}$$

$$\text{અંશ માપ} = \frac{180°}{\pi} \times \text{રેડિયન માપ}$$

ઉદાહરણ 1 : $40° \ 20'$ નું રેડિયન માપમાં રૂપાંતર કરો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $180° = \pi$ રેડિયન

આથી, $40^\circ\ 20' = 40\frac{1^\circ}{3}$

$= \frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3}$ રેડિયન

$= \frac{121\pi}{540}$ રેડિયન

આમ, $40^\circ\ 20' = \frac{121\pi}{540}$ રેડિયન

ઉદાહરણ 2 : 6 રેડિયનને અંશ માપમાં ફેરવો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે π રેડિયન $= 180^\circ$

આથી, 6 રેડિયન $= \frac{180}{\pi} \times 6$ અંશ

$= \frac{1080 \times 7}{22}$ અંશ

$= 343\frac{7}{11}$ અંશ

$= 343^\circ + \frac{7 \times 60}{11}$ મિનિટ $\qquad (1^\circ = 60')$

$= 343^\circ + 38' + \frac{2}{11}$ મિનિટ

$= 343^\circ + 38' + 10.9''$ $\qquad (1' = 60'')$

$= 343^\circ\ 38'\ 11''$ (લગભગ)

આમ, 6 રેડિયન $= 343^\circ\ 38'\ 11''$ (લગભગ)

ઉદાહરણ 3 : 37.4 સેમી ચાપની લંબાઈ ધરાવતા તથા કેન્દ્ર આગળ 60° માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો).

ઉકેલ: અહીં, $l = 37.4$ સેમી અને

$\theta = 60^\circ = \frac{60\pi}{180}$ રેડિયન $= \frac{\pi}{3}$

હવે, $r = \frac{l}{\theta}$ પરથી,

$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22}$

$= 35.7$ સેમી

ઉદાહરણ 4 : ઘડિયાળનો મિનિટકાંટો 1.5 સેમી લાંબો છે, તો 40 મિનિટમાં કાંટાએ કાપેલ અંતર શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ: ઘડિયાળનો મિનિટકાંટો, 60 મિનિટમાં એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરે છે.

આથી, 40 મિનિટમાં, મિનિટકાંટો $\frac{2}{3}$ પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરશે.

$\therefore \theta = \frac{2}{3} \times 360^\circ$ અથવા $\frac{4\pi}{3}$ રેડિયન

આથી, કપાયેલ અંતર

$l = r\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3}$ સેમી

$= 2\pi$ સેમી

$= 2 \times 3.14$ સેમી

$= 6.28$ સેમી

ઉદાહરણ 5 : બે વર્તુળમાં સમાન લંબાઈનાં ચાપ તેમનાં કેન્દ્રો આગળ અનુક્રમે 65° અને 110°ના ખૂણા બનાવે, તો તેમની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે r_1 અને r_2 છે.

આપેલ છે કે,

$\theta_1 = 65^\circ = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36}$ રેડિયન

$\theta_2 = 110^\circ = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36}$ રેડિયન

ધારો કે ચાપની લંબાઈ l છે.

આથી, $l = r_1\,\theta_1 = r_2\,\theta_2$ પરથી,

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

આથી, $r_1 : r_2 = 22 : 13$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. નીચેના અંશ માપને સંગત રેડિયન માપ શોધો :

(i) 25° (ii) $-47^\circ\,30'$ (iii) 240° (iv) 520°

2. નીચેના રેડિયન માપને સંગત અંશ માપ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

(i) $\frac{11}{16}$ (ii) -4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

3. એક ચક્ર એક મિનિટમાં 360 પરિભ્રમણ કરે છે, તો તે એક સેકન્ડમાં કેટલા રેડિયન માપ જેટલું ફરશે ?

4. 100 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ચાપની લંબાઈ 22 સેમી હોય, તો તેણે કેન્દ્ર આગળ બનાવેલ ખૂણાનું અંશ માપ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

5. 40 સેમી વ્યાસવાળા વર્તુળમાં જીવાની લંબાઈ 20 સેમી છે. જીવાને સંગત લઘુચાપનું માપ શોધો.

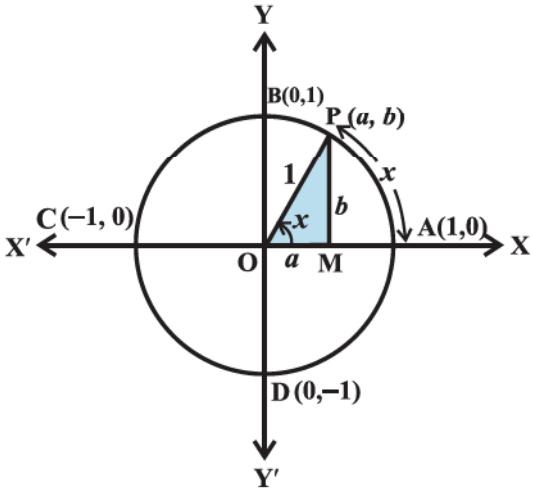
6. જો બે વર્તુળોમાં સમાન લંબાઈનાં ચાપ કેન્દ્ર આગળ 60° અને 75° ના ખૂણા આંતરે, તો તેમની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર શોધો.

7. જો 75 સેમી લંબાઈવાળા લોલકનું અંત્યબિંદુ (i) 10 સેમી (ii) 15 સેમી (iii) 21 સેમીનાં ચાપ બનાવે, તો તેણે કેન્દ્ર આગળ બનાવેલ ખૂણાનાં રેડિયન માપ શોધો.

3.3 ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

આગળના ધોરણમાં, આપણે કાટકોણ ત્રિકોણના લઘુકોણોના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો અભ્યાસ કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓના ગુણોત્તરો તરીકે કર્યો. હવે આપણે રેડિયન માપના કોઈપણ ખૂણા માટે આ વ્યાખ્યાને વિસ્તૃત કરીશું અને ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનો અભ્યાસ કરીશું.

યામ-સમતલમાં ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળું એકમ વર્તુળ લો. જેથી ખૂણો AOP = x રેડિયન અર્થાત્ ચાપ AP ની લંબાઈ = x થાય તે રીતે વર્તુળ પરનું કોઈ બિંદુ P(a, b) લો. (આકૃતિ 3.6.)



આકૃતિ 3.6

આપણે $cos\ x = a$ અને $sin\ x = b$ વ્યાખ્યાયિત કરીશું. Δ OMP કાટકોણ ત્રિકોણ હોવાથી, $OM^2 + MP^2 = OP^2$ અથવા $a^2 + b^2 = 1$.

આમ, એકમ વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુ માટે $a^2 + b^2 = 1$ અથવા $cos^2\ x + sin^2\ x = 1$.

નોંધ : $cos^2 x = (cos\ x)^2, sin^2 x = (sinx)^2$

એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ દ્વારા વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ બનતો ખૂણો 2π રેડિયન હોવાથી, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, અને $\angle AOC = \pi$ અને $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$. આ $\frac{\pi}{2}$ ના પૂર્ણાંક ગુણિત માપવાળા ખૂણાઓને *પાદકોણ* કહેવાય.

A, B, C, D ના યામ અનુક્રમે (1, 0), (0, 1), (-1, 0) અને (0, -1) છે. આથી પાદકોણ માટે,

$$cos\ 0 = 1 \qquad sin\ 0 = 0$$

$$cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad sin\ \frac{\pi}{2} = 1$$

$$cos\ \pi = -1 \qquad sin\ \pi = 0$$

$$cos\ \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad sin\ \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$cos\ 2\pi = 1 \qquad sin\ 2\pi = 0$$

હવે, જો P બિંદુથી એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરીએ, તો આપણે પાછા એ જ બિંદુ P પર પહોંચીએ. આમ, આપણે જોઈ શકીએ કે, જો x, 2π ના પૂર્ણાંક ગુણાંકમાં વધે કે ઘટે તો, *sine* કે *cosine* વિધેયોનાં મૂલ્યો બદલાતાં નથી. આથી,

$$\sin(2n\pi + x) = \sin x, \qquad n \in \mathbf{Z},$$

$$\cos(2n\pi + x) = \cos x, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

વળી, જો $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ વગેરે તો $\sin x = 0$, એટલે કે x એ π નો ગુણિત હોય.

અને જ્યારે x એ $\frac{\pi}{2}$ નો અયુગ્મ ગુણિત હોય એટલે કે $x, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ હોય ત્યારે $\cos x$ શૂન્ય બને. આમ,

જ્યારે $\sin x = 0$ ત્યારે $x = n\pi$ અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે, $n \in \mathbf{Z}$

જ્યારે $\cos x = 0$ ત્યારે $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે, $n \in \mathbf{Z}$

હવે, આપણે બાકીનાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયો *sine* અને *cosine* વિધેયોના સંદર્ભમાં વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad x \neq n\pi, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq n\pi, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

આપણે સાબિત કર્યું છે કે, પ્રત્યેક વાસ્તવિક x માટે

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

આથી, $$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad \text{(કેમ ?)}$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \qquad \text{(કેમ ?)}$$

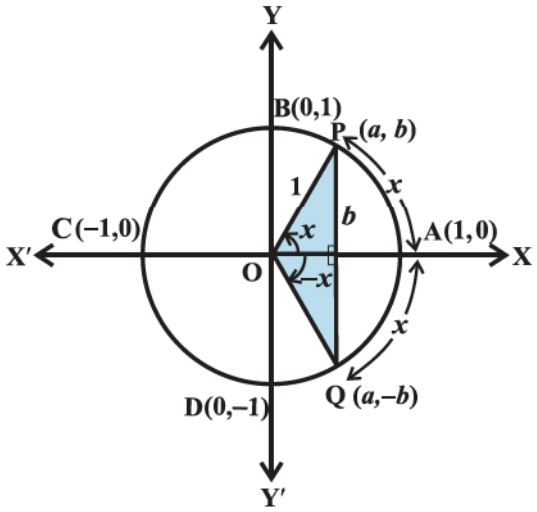
અગાઉના ધોરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરનાં મૂલ્યોની 0°, 30°, 45°, 60° અને 90° માટે ચર્ચા કરેલ છે. ત્રિકોણમિતિય વિધેયોની કિંમત પણ અગાઉ શીખેલ ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તર જેટલી થાય. આથી, આપણને નીચે આપેલ કોષ્ટક મળે:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત	0	અવ્યાખ્યાયિત	0

cosec x, sec x અને *cot x* નાં મૂલ્યો અનુક્રમે *sin x, cos x* અને *tan x* નાં મૂલ્યોના વ્યસ્ત છે.

3.3.1 ત્રિકોણમિતિય વિધેયનાં ચિહ્નો :

ધારો કે $\angle AOP = x$ થાય તે રીતે P (a, b) એ ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળા એકમ વર્તુળ પરનું કોઈ એક બિંદુ છે. જો $\angle AOQ = -x$, તો બિંદુ Q ના યામ $(a, -b)$ થાય. (આકૃતિ 3.7.)



આકૃતિ 3.7

આથી, $\cos(-x) = \cos x$

અને $\sin(-x) = -\sin x$

એકમ વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુ P (a, b) માટે, $-1 \le a \le 1$ અને $-1 \le b \le 1$. આથી, આપણને પ્રત્યેક x માટે $-1 \le \cos x \le 1$ અને $-1 \le \sin x \le 1$ મળે. અગાઉના ધોરણમાં આપણે શીખ્યાં હતાં કે પ્રથમ ચરણમાં $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ a અને b બંને ધન હોય, બીજા ચરણમાં $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ a ઋણ અને b ધન હોય, ત્રીજા ચરણમાં $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ a અને b બંને ઋણ હોય અને ચોથા ચરણમાં $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ a ધન અને b ઋણ હોય. આથી, $(0 < x < \pi)$ માટે $\sin x$ ધન અને $\pi < x < 2\pi$ માટે તે ઋણ હોય. આ જ રીતે, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ માટે $\cos x$ ધન, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ માટે ઋણ અને $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ માટે ધન હોય. આ જ રીતે, બાકીનાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં ચિહ્નો ભિન્ન ચરણ માટે શોધી શકાય. તે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

	I	II	III	IV
sin x	+	+	–	–
cos x	+	–	–	+
tan x	+	–	+	–
cosec x	+	+	–	–
sec x	+	–	–	+
cot x	+	–	+	–

3.3.2 ત્રિકોણમિતિય વિધેયોના પ્રદેશ અને વિસ્તાર

sine અને *cosine* વિધેયોની વ્યાખ્યા પરથી કહી શકાય કે તે પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે વ્યાખ્યાયિત છે. વળી, પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે જોઈ શકાય કે, $-1 \le \sin x \le 1$ અને $-1 \le \cos x \le 1$.

આથી, $y = \sin x$ અને $y = \cos x$ નો પ્રદેશ પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અને વિસ્તાર $[-1, 1]$ અર્થાત્ $-1 \le y \le 1$ છે.

વળી, $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, હોવાથી $y = \operatorname{cosec} x$ નો પ્રદેશ $\{ x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \ne n\pi, n \in \mathbf{Z} \}$ અને વિસ્તાર $\{ y : y \in \mathbf{R}, y \ge 1$ અથવા $y \le -1 \}$. આ જ રીતે, $y = \sec x$ નો પ્રદેશ $\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \ne (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તાર $\{ y : y \in \mathbf{R}, y \ge 1$ અથવા $y \le -1 \}$ છે. $y = \tan x$ નો પ્રદેશ $\{x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \ne (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ અને વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. $y = \cot x$ નો પ્રદેશ $\{ x : x \in \mathbf{R}$ અને $x \ne n\pi, n \in \mathbf{Z} \}$ અને વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. (ખરેખર આ તમામ 'વિસ્તાર' એ વિસ્તાર સાબિત નથી થયા પરતુ તે આપેલ 'વિસ્તાર'ના ઉપગણ સાબિત થયા છે.)

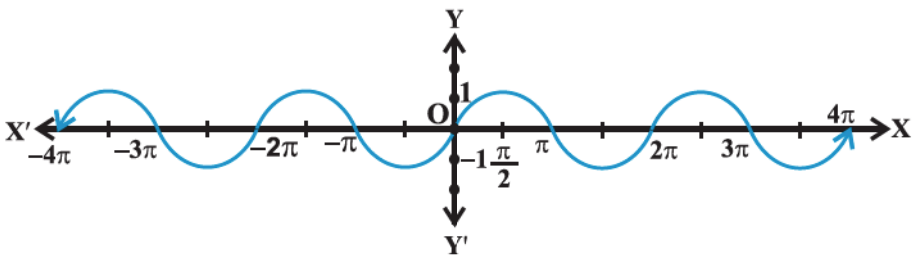
વળી, આપણે જોઈ શકીએ કે, પ્રથમ ચરણમાં જેમ x, 0 થી $\dfrac{\pi}{2}$ માં વધે તેમ $\sin x$, 0 થી 1 માં વધે, બીજા ચરણમાં જેમ x, $\dfrac{\pi}{2}$ થી π માં વધે તેમ $\sin x$, 1 થી 0 માં ઘટે. ત્રીજા ચરણમાં જેમ x, π થી $\dfrac{3\pi}{2}$ માં વધે, તેમ $\sin x$, 0 થી -1 માં ઘટે અને છેલ્લે, ચોથા ચરણમાં જેમ x, $\dfrac{3\pi}{2}$ થી 2π માં વધે તેમ $\sin x$, -1 થી 0 માં વધે છે. આ જ રીતે, આપણે બાકીનાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયો માટે પણ ચર્ચા કરી શકીએ. અલબત્ત, આપણે પાસે નીચેનું કોષ્ટક છે :

	પ્રથમ ચરણ	**દ્વિતીય ચરણ**	**તૃતીય ચરણ**	**ચતુર્થ ચરણ**
sin	0 થી 1 વધે છે.	1 થી 0 ઘટે છે.	0 થી -1 ઘટે છે.	-1 થી 0 વધે છે.
cos	1 થી 0 ઘટે છે.	0 થી -1 ઘટે છે.	-1 થી 0 વધે છે.	0 થી 1 વધે છે.
tan	0 થી ∞ વધે છે.	$-\infty$ થી 0 વધે છે.	0 થી ∞ વધે છે.	$-\infty$ થી 0 વધે છે.
cot	∞ થી 0 ઘટે છે.	0 થી $-\infty$ ઘટે છે.	∞ થી 0 ઘટે છે.	0 થી $-\infty$ ઘટે છે.
sec	1 થી ∞ વધે છે.	$-\infty$ થી -1 વધે છે.	-1 થી $-\infty$ ઘટે છે.	∞ થી 1 ઘટે છે.
cosec	∞ થી 1 ઘટે છે.	1 થી ∞ વધે છે.	$-\infty$ થી -1 વધે છે.	-1 થી $-\infty$ ઘટે છે.

નોંધ : ઉપરના કોષ્ટકમાં $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ માટે $\tan x$, 0 થી ∞ (અનંત) સુધી વધે છે. અર્થાત્ જેમ $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ માટે

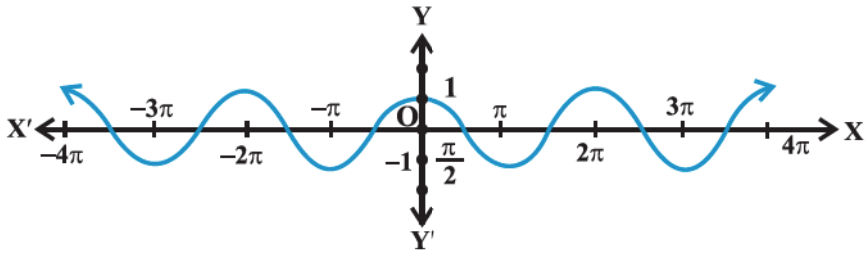
x વધે છે તેમ $\tan x$ નું મૂલ્ય વધે છે અને જેમ x, $\frac{\pi}{2}$ ને અનુલક્ષે તેમ $\tan x$ નું મૂલ્ય કોઈક મોટી સ્વૈર સંખ્યા બને. આ જ રીતે, કહી શકાય કે $\operatorname{cosec} x$ નું મૂલ્ય ચોથા ચરણમાં -1 થી $-\infty$ (ઋણ અનંત) સુધી ઘટે છે. અર્થાત્ $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ માટે $\operatorname{cosec} x$ નું મૂલ્ય ઘટે છે અને જેમ x, 2π ને અનુલક્ષે તેમ $\operatorname{cosec} x$ નું મૂલ્ય મોટી સ્વૈર ઋણ સંખ્યા બને. સંકેત ∞ અને $-\infty$ એ માત્ર વિધેય અને ચલની ચોક્કસ પ્રકારની વર્તણુંક દર્શાવે છે.

આપણે જોઈ ગયાં કે $\sin x$ અને $\cos x$ ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન 2π લંબાઈના અંતરાલમાં થાય છે. આથી, $\operatorname{cosec} x$ અને $\sec x$ વિધેયોની કિંમતોનું પણ પુનરાવર્તન 2π લંબાઈના અંતરાલમાં થાય.



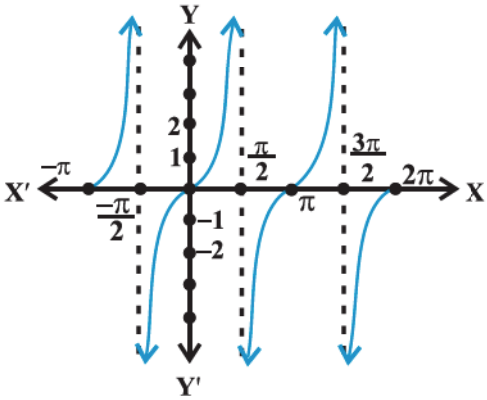
$y = \sin x$

આકૃતિ 3.8



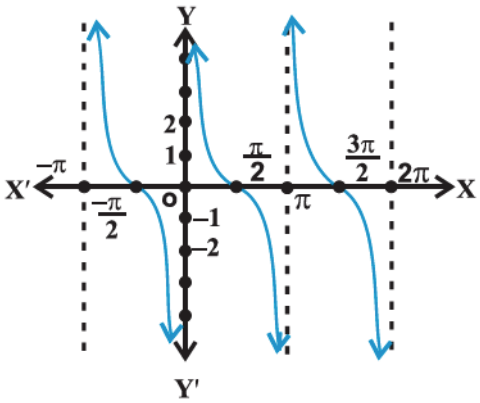
$y = \cos x$

આકૃતિ 3.9



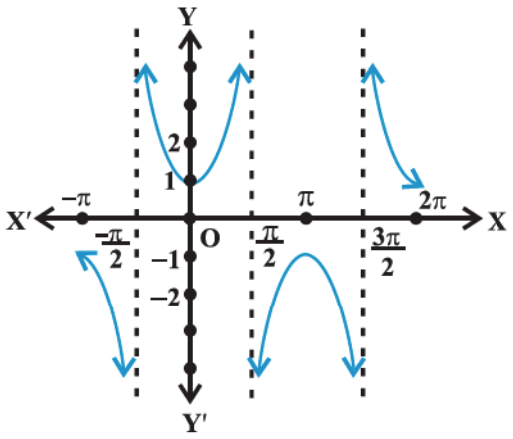
$y = \tan x$

આકૃતિ 3.10



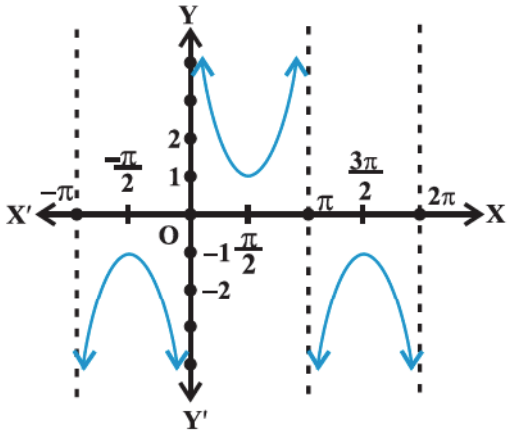
$y = \cot x$

આકૃતિ 3.11



$y = \sec x$

આકૃતિ 3.12



$y = \text{cosec}\, x$

આકૃતિ 3.13

હવે, પછીના વિભાગમાં આપણે જોઈશું કે $\tan(\pi + x) = \tan x$. આથી, $\tan x$ માટે કિંમતોનું પુનરાવર્તન π લંબાઈના અંતરાલમાં થશે અને $\cot x$ એ $\tan x$ નું વ્યસ્ત હોવાથી તેની કિંમતોનું પુનરાર્વતન પણ π લંબાઈના અંતરાલમાં થશે. આટલા જ્ઞાન અને ત્રિકોણમિતિય વિધેયોની વર્તણૂક પરથી આપણે આ વિધેયોના આલેખ દોરી શકીએ. આ વિધેયોના આલેખ ઉપર આપેલ છે.

ઉદાહરણ 6 : જો x ત્રીજા ચરણમાં હોય અને $\cos x = \frac{-3}{5}$, તો બાકીનાં પાંચ ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\cos x = \frac{-3}{5}$. આથી $\sec x = \frac{-5}{3}$

હવે, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

અર્થાત્, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\therefore \quad \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

આથી, $\sin x = \pm \frac{4}{5}$

પરંતુ x ત્રીજા ચરણમાં છે. ત્યાં $\sin x$ નું મૂલ્ય ઋણ હોય.

$\therefore \quad \sin x = -\frac{4}{5}$ અને તે પરથી, $\text{cosec}\, x = -\frac{5}{4}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$ અને $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$.

ઉદાહરણ 7 : જો $\cot x = \frac{-5}{12}$, x બીજા ચરણમાં હોય, તો બાકીનાં પાંચ ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : $\cot x = \frac{-5}{12}$ હોવાથી, $\tan x = -\frac{12}{5}$

હવે, $sec^2 x = 1 + tan^2 x$

$$= 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$$

આથી, $sec\ x = \pm \frac{13}{5}$

પરંતુ x બીજા ચરણમાં છે. ત્યાં $sec\ x$ નું મૂલ્ય ઋણ હોય.

$\therefore$ $sec\ x = -\frac{13}{5}$ અને તે પરથી, $cos\ x = -\frac{5}{13}$

વળી, $sin\ x = tan\ x \cdot cos\ x = \left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$

અને $cosec\ x = \frac{1}{sin\ x} = \frac{13}{12}$

ઉદાહરણ 8 : $sin\ \frac{31\pi}{3}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ: આપણે જાણીએ છીએ કે $sin\ x$ ની કિંમતનું પુનરાવર્તન 2π લંબાઈના અંતરાલ પછી થાય છે. આથી,

$$sin\ \frac{31\pi}{3} = sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= sin\ \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ઉદાહરણ 9 : $cos\ (-1710°)$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $cos\ x$ ની કિંમતનું પુનરાવર્તન 2π અથવા 360° લંબાઈના અંતરાલ પછી થાય છે. આથી,

$$\cos(-1710°) = \cos(-1710° + 5 \times 360°)$$

$$= \cos(-1710° + 1800°) = \cos(90°) = 0$$

સ્વાધ્યાય 3.2

પ્રશ્ન 1 થી 5 માં અન્ય પાંચ ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો શોધો.

1. $cos\ x = -\frac{1}{2}$, x ત્રીજા ચરણમાં છે.

2. $sin\ x = \frac{3}{5}$, x બીજા ચરણમાં છે.

3. $cot\ x = \frac{3}{4}$, x ત્રીજા ચરણમાં છે.

4. $sec\ x = \frac{13}{5}$, x ચોથા ચરણમાં છે.

5. $tan\ x = -\frac{5}{12}$, x બીજા ચરણમાં છે.

પ્રશ્ન 6 થી 10 માં ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો શોધો.

6. $\sin 765°$

7. $\operatorname{cosec}(-1410°)$

8. $\tan \frac{19\pi}{3}$

9. $\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

10. $\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

3.4 બે ખૂણાના સરવાળા અને બાદબાકી સ્વરૂપે ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

આ વિભાગમાં આપણે બે અંક(ખૂણા)ના સરવાળા કે બાદબાકી સ્વરૂપે ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં સ્વરૂપો અને તેમના સંબંધી અભિવ્યક્તિઓ મેળવીશું. આ પ્રકારના પાયાનાં પરિણામોને ત્રિકોણમિતિય નિત્યસમ કહેવાય. આપણે જોયું કે,

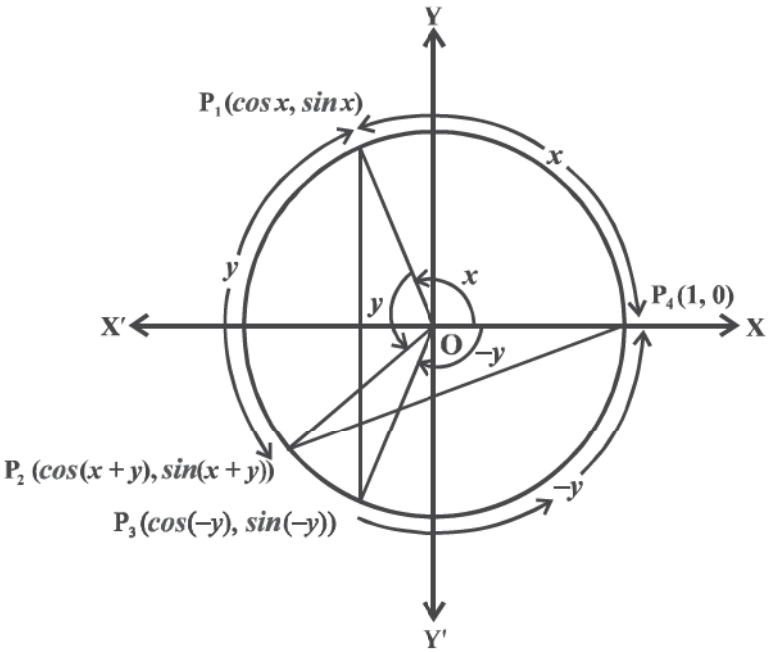
1. $\sin(-x) = -\sin x$

2. $\cos(-x) = \cos x$

આપણે હવે કેટલાંક વધુ પરિણામો સાબિત કરીએ.

3. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર હોય તેવું એકમ વર્તુળ લો. ધારો કે ખૂણો $P_4OP_1 = x$ અને ખૂણો $P_1OP_2 = y$ છે. આથી, ખૂણો $P_4OP_2 = x + y$ છે. અને ખૂણો $P_4OP_3 = -y$ છે. આથી, P_1, P_2, P_3 અને P_4 ના યામ P_1 $(\cos x, \sin x)$, P_2 $(\cos(x + y), \sin(x + y))$, P_3 $(\cos(-y), \sin(-y))$ અને P_4 $(1, 0)$ થાય. (આકૃતિ 3.14)



આકૃતિ 3.14

ત્રિકોણ P_1OP_3 અને P_2OP_4 નો વિચાર કરો, તે એકરૂપ છે. (કેમ ?)

આથી, P_1P_3 અને P_2P_4 સમાન બને.

અંતર સૂત્ર પરથી, $P_1P_3^2 = [\cos x - \cos(-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2$

$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$

$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y$

$= 2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$ (કેમ ?)

વળી, $P_2P_4^2 = [1 - \cos(x+y)]^2 + [0 - \sin(x+y)]^2$

$= 1 - 2\cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y)$

$= 2 - 2\cos(x+y)$

હવે, $P_1P_3 = P_2P_4$ હોવાથી,

$P_1P_3^2 = P_2P_4^2$

આથી, $2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2\cos(x+y)$

$\therefore \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4. $\boldsymbol{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$

નિત્યસમ 3 માં y ને બદલે $-y$ લેતાં,

$\cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$

$\therefore \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$

5. $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x}$

નિત્યસમ 4 માં, x ને બદલે $\frac{\pi}{2}$ અને y ને બદલે x લેતાં,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$$

$$= \sin x$$

6. $\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}$

નિત્યસમ 5 પરથી,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \quad x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{\pi}{2} \quad x\right)\right) = \cos x$$

7. $\boldsymbol{\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

8. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

નિત્યસમ 7 માં y ને બદલે $-y$ મૂકતાં, આપણને આ પરિણામ મળે.

9. નિત્યસમ 3, 4, 7 અને 8 માં x અને y ની અનુકૂળ કિંમતો મૂકતાં, આપણને નીચેનાં પરિણામો મળે :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x \qquad \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

$\sin x$ અને $\cos x$ નાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીને $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ અને $\operatorname{cosec} x$ માટે પણ આ જ પ્રકારનાં પરિણામો મેળવી શકાય.

10. જો x, y અને $(x+y)$ માંથી કોઈપણ $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ ગુણિત ના હોય, તો

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

x, y અને $(x+y)$ માંથી કોઈપણ $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ ગુણિત ન હોવાથી $\cos x$, $\cos y$ અને $\cos(x+y)$ શૂન્યેતર હશે.

હવે, $$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

અંશ તથા છેદને $\cos x \cos y$ વડે ભાગતાં,

$$\tan(x+y) = \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

11. $$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

નિત્યસમ 10 માં y ના બદલે $-y$ લેતાં,

$$\tan(x-y) = \tan[x + (-y)]$$

$$= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$ મળે.

12. જો x, y અને $(x + y)$ માંથી કોઈપણ π ના ગુણિત ના હોય, તો

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

x, y અને $(x + y)$ માંથી કોઈપણ π ના ગુણિત ના હોવાથી, $\sin x$ $\sin y$ અને $\sin(x + y)$ શૂન્યેતર છે.

હવે, $\cot(x+y) = \dfrac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \dfrac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$

અંશ તથા છેદને $\sin x \sin y$ વડે ભાગતાં,

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

13. x, y અને $(x - y)$ માંથી કોઈપણ π ના ગુણિત ના હોય, તો

$$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

નિત્યસમ 12 માં y બદલે $-y$ લેતાં, આપણને આ પરિણામ મળે.

14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

y ને બદલે x મૂકતાં,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

અને, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x.$$

તથા, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x \quad \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ મળે.

અંશ તથા છેદને $\cos^2 x$ વડે ભાગતાં,

આપણને, $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ મળે, $x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, જ્યાં n પૂર્ણાંક છે.

15. $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ મળે, $x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, જ્યાં n પૂર્ણાંક છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

y ને બદલે x લેતાં આપણને, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ મળે.

વળી, $$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

અંશ તથા છેદને $\cos^2 x$ વડે ભાગતાં,

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

16. $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

y ને બદલે x મૂકતાં, $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1-\tan^2 x}$ મળે.

17. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

અહીં, $$\sin 3x = \sin (2x + x)$$

$$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$$

$$= 2 \sin x \cos x \cos x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x$$

$$= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x$$

$$= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x$$

$$= 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

18. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

અહીં, $\cos 3x = \cos (2x + x)$

$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

19. $$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}.$$

અહીં, $$\tan 3x = \tan (2x + x)$$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x \cdot \tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}$$

$$= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

20. **(i)** $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{... (1)}$$

અને $$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \text{... (2)}$$

(1) અને (2) નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y \quad \text{... (3)}$$

અને $$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y \quad \text{... (4) મળે.}$$

વળી, $$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \text{... (5)}$$

અને $$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad \text{... (6)}$$

(5) અને (6) નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y \quad \text{... (7)}$$

અને $$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y \quad \text{... (8) મળે.}$$

ધારો કે, $x + y = \theta$ અને $x - y = \phi$. આથી,

$$x = \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) \text{ અને } y = \left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

x અને y નાં મૂલ્યો (3), (4), (7) અને (8) માં મૂકતાં,

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

વળી, θ અને ϕ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોવાથી, આપણે θ ના બદલે x અને ϕ ના બદલે y મૂકી શકીએ. આથી,

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x\ \ y}{2};\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x\ \ y}{2},$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

નોંધ : 20 માં આપેલ નિત્યસમોના ભાગ સ્વરૂપે, આપણે નીચેનાં પરિણામો સાબિત કરી શકીએ :

21. **(i)** $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

(ii) $-2\sin x\sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$

(iii) $2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

(iv) $2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે,

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4} = 1$$

ઉકેલ : અહીં,

$$\text{ડા. બા.} = 3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$$

$$= 3\times\frac{1}{2}\times 2 - 4\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\times 1$$

$$= 3 - 4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 3 - 4\times\frac{1}{2} = 1 = \text{જ. બા.}$$

ઉદાહરણ 11 : $\sin 15°$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$

$$= \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

ઉદાહરણ 12 : $tan\ \frac{13\pi}{12}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $tan\ \frac{13\pi}{12} = tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right)$

$$= tan\ \frac{\pi}{12}$$

$$= tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{tan\frac{\pi}{4} - tan\frac{\pi}{6}}{1 + tan\frac{\pi}{4} tan\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે,

$$\frac{sin(x+y)}{sin(x-y)} = \frac{tan\,x + tan\,y}{tan\,x - tan\,y}.$$

ઉકેલ : અહીં, ડા. બા. $= \frac{sin(x+y)}{sin(x-y)} = \frac{sin\,x\,cos\,y + cos\,x\,sin\,y}{sin\,x\,cos\,y - cos\,x\,sin\,y}$

અંશ તથા છેદને $cos\ x\ cos\ y$ વડે ભાગતાં,

$$\frac{sin(x+y)}{sin(x\quad y)} = \frac{tan\,x + tan\,y}{tan\,x\quad tan\,y}.$$

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે,

$$tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x = tan\ 3x - tan\ 2x - tan\ x$$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $3x = 2x + x$

આથી, $tan\ 3x = tan\ (2x + x)$

$$\therefore\ tan 3x - \frac{tan\,2x + tan\,x}{1 - tan\ 2x\,tan\,x}$$

$$\therefore\ tan\ 3x - tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x = tan\ 2x + tan\ x$$

$$\therefore\ tan\ 3x - tan\ 2x - tan\ x = tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x$$

$$\therefore\ tan\ 3x\ tan\ 2x\ tan\ x = tan\ 3x - tan\ 2x - tan\ x.$$

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો કે,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$$

ઉકેલ : નિત્યસમ 20(i)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{ડા. બા.} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}\quad x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x = \text{જ. બા.}$$

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે, $\dfrac{\cos 7x+\cos 5x}{\sin 7x-\sin 5x}=\cot x$

ઉકેલ : નિત્યસમ 20 (i) અને 20 (iv) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{ડા. બા.} = \frac{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\sin\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{જ. બા.}$$

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો કે, $\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}=\tan x$

ઉકેલ : અહીં, ડા. બા. $=\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}$

$$=\frac{\sin 5x+\sin x-2\sin 3x}{\cos 5x-\cos x}$$

$$=\frac{2\sin 3x\cos 2x-2\sin 3x}{-2\sin 3x\sin 2x}$$

$$=-\frac{\sin 3x\,(\cos 2x\quad 1)}{\sin 3x\sin 2x}$$

$$=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$=\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$$

$$= \tan x = \text{જ. બા.}$$

સ્વાધ્યાય 3.3

સાબિત કરો કે : (પ્રશ્ન 1 થી 4)

1. $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{3} - \tan^2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$

2. $2\sin^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

3. $\cot^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6} + 3\tan^2\frac{\pi}{6} = 6$

4. $2\sin^2\frac{3\pi}{4} + 2\cos^2\frac{\pi}{4} + 2\sec^2\frac{\pi}{3} = 10$

5. કિંમત શોધો :

(i) $\sin 75°$ (ii) $\tan 15°$

સાબિત કરો કે :

6. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \sin(x + y)$

7. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \left(\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right)^2$

8. $\dfrac{\cos(\pi + x)\cos(-x)}{\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \cot^2 x$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right] = 1$

10. $\sin(n + 1)x \sin(n + 2)x + \cos(n + 1)x \cos(n + 2)x = \cos x$

11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin 2x \sin 10x$

13. $\cos^2 2x - \cos^2 6x = \sin 4x \sin 8x$

14. $\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x = 4\cos^2 x \sin 4x$

15. $\cot 4x(\sin 5x + \sin 3x) = \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$

16. $\dfrac{\cos 9x \quad \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

22. $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

23. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

24. $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

25. $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

3.5 ત્રિકોણમિતિય સમીકરણો

ત્રિકોણમિતિય વિધેયોને સાંકળતી સમતાને *ત્રિકોણમિતિય સમીકરણ* કહેવાય. આ વિભાગમાં આવા સમીકરણના ઉકેલ શોધીશું. આપણે શીખી ગયાં છીએ કે, $\sin x$ અને $\cos x$ ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન 2π લંબાઈના અંતરાલમાં થાય છે અને $\tan x$ ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન π લંબાઈના અંતરાલમાં થાય છે. જો ત્રિકોણમિતિય સમીકરણનો ઉકેલ $0 \le x < 2\pi$ માં હોય તો તેને *મુખ્ય ઉકેલ* (*principal solution*) કહેવાય છે. ત્રિકોણમિતિય સમીકરણોના તમામ ઉકેલને સમાવતી પૂર્ણાંક n વાળી અભિવ્યક્તિને *ત્રિકોણમિતિય સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ* કહેવાય. પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગણને '**Z**' વડે દર્શાવીશું.

ત્રિકોણમિતિય સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા નીચેનાં ઉદાહરણો મદદરૂપ થશે :

ઉદાહરણ 18 : સમીકરણ $\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ના મુખ્ય ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

આથી, મુખ્ય ઉકેલ, $x = \dfrac{\pi}{3}$ અને $\dfrac{2\pi}{3}$ છે.

ઉદાહરણ 19 : સમીકરણ $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ના મુખ્ય ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. આથી, $\tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

અને, $\tan\left(2\pi \quad \dfrac{\pi}{6}\right) = \quad \tan\dfrac{\pi}{6} = \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

આમ, $\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

આથી, મુખ્ય ઉકેલ, $\frac{5\pi}{6}$ અને $\frac{11\pi}{6}$ છે.

હવે આપણે ત્રિકોણમિતિય સમીકરણોના વ્યાપક ઉકેલ શોધીશું.

આપણે આગળ જોઈ ગયા કે,

જો $\sin x = 0$, તો $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ અને જો $\cos x = 0$, તો $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ મળે છે.

હવે આપણે નીચેનાં પરિણામો સાબિત કરીશું :

પ્રમેય 1 કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y માટે,

$\sin x = \sin y$ તો $n \in \mathbf{Z}$ માટે $x = n\pi + (-1)^n y$.

સાબિતી : જો, $\sin x = \sin y$, તો

$\sin x - \sin y = 0$ અથવા $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

આથી, $\cos\frac{x+y}{2} = 0$ અથવા $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

માટે, $\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $\frac{x-y}{2} = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$

$\therefore x = (2n+1)\pi - y$ અથવા $x = 2n\pi + y$, $n \in \mathbf{Z}$

$\therefore x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ અથવા $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y$, $n \in \mathbf{Z}$.

આ બંને પરિણામો સંયુક્ત રીતે એકત્રિત કરતાં,

$n \in \mathbf{Z}$ માટે $x = n\pi + (-1)^n y$ તરીકે લખી શકાય.

પ્રમેય 2 : કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y માટે, જો $\cos x = \cos y$ તો $x = 2n\pi \pm y$, $n \in \mathbf{Z}$.

સાબિતી : જો $\cos x = \cos y$, તો $\cos x - \cos y = 0$,

$\therefore -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

આમ, $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ અથવા $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

માટે $\frac{x+y}{2} = n\pi$ અથવા $\frac{x-y}{2} = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$

$x = 2n\pi - y$ અથવા $x = 2n\pi + y$, $n \in \mathbf{Z}$

આમ, $x = 2n\pi \pm y$, $n \in \mathbf{Z}$

પ્રમેય 3 : સાબિત કરો કે જો x અને y, $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ ગુણિત ના હોય, તો

$$\tan x = \tan y \text{ હોય, તો } x = n\pi + y,\ n \in \mathbf{Z}$$

સાબિતી : જો $\tan x = \tan y$ હોય, તો $\tan x - \tan y = 0$

અથવા $$\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$$

$$\therefore\ \sin(x - y) = 0 \qquad \text{(કેમ ?)}$$

$$\therefore\ x - y = n\pi, \text{ અર્થાત્ } x = n\pi + y,\ n \in \mathbf{Z}.$$

ઉદાહરણ 20 : $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ નો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

આથી, $\sin x = \sin\frac{4\pi}{3}$ પરથી,

$$x = n\pi + (-1)^n\frac{4\pi}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$$

નોંધ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ માટે $\frac{4\pi}{3}$ એ x ની એક કિંમત છે. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ થાય તેવી બીજી કોઇક કિંમત પણ લઈ શકાય. આથી, મળતા ઉકેલ એક જ હશે પરંતુ દેખીતી રીતે ભિન્ન લાગી શકે.

ઉદાહરણ 21 : $\cos x = \frac{1}{2}$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં, $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\therefore\ x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$$

ઉદાહરણ 22 : $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં, $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$

અથવા $$\tan 2x = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\therefore\ 2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$$

$$x = n\pi + \frac{5\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$$

ઉદાહરણ 23 : $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$ ઉકેલો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ $\sin 6x + \sin 2x \quad \sin 4x = 0$ તરીકે પણ લખી શકાય.

અથવા $2\sin 4x \cos 2x \quad \sin 4x = 0$

અર્થાત્ $\sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

$\therefore \quad \sin 4x = 0$ અથવા $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \sin 4x = 0$ અથવા $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad 4x = n\pi$ અથવા $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

$\therefore \quad x = \frac{n\pi}{4}$ અથવા $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}.$

ઉદાહરણ 24 : $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ ઉકેલો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ $2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0$ તરીકે પણ લખી શકાય.

$\therefore \quad 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

એટલે કે $(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

આમ, $\sin x = -\frac{1}{2}$ અથવા $\sin x = 2$

પરંતુ, $\sin x = 2$ શક્ય નથી. (કેમ ?)

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}.$$

આથી, ઉકેલ $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}.$

સ્વાધ્યાય 3.4

આપેલ સમીકરણના મુખ્ય અને વ્યાપક ઉકેલ શોધો : (પ્રશ્ન 1 થી 4)

1. $\tan x = \sqrt{3}$

2. $\sec x = 2$

3. $\cot x = -\sqrt{3}$

4. $\operatorname{cosec} x = -2$

આપેલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલ શોધો :

5. $\cos 4x = \cos 2x$

6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

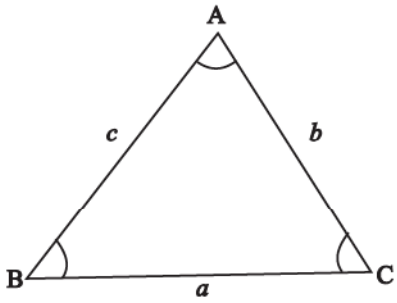
7. $\sin 2x + \cos x = 0$

8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

3.6 *Sine* અને *Cosine* સૂત્રોની સાબિતી અને સરળ ઉપયોગ

ધારો કે ABC એક ત્રિકોણ છે. ખૂણો A, એટલે કે બાજુઓ AB અને AC વચ્ચેનો ખૂણો 0° અને 180° વચ્ચે આવેલો છે એમ આપણે માનીશું. ખૂણાઓ B અને C આ જ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે. શિરોબિંદુઓ C, A અને B ની સામેની બાજુએ આવેલી બાજુઓ AB, BC અને CA ને અનુક્રમે c, a અને b વડે દર્શાવીશું. (જુઓ આકૃતિ 3.15.)

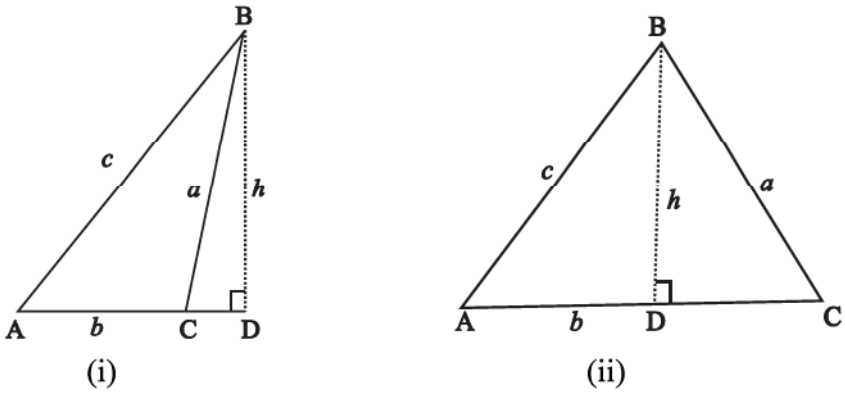


આકૃતિ 3.15

પ્રમેય 4 : (*Sine* સૂત્ર) કોઈ પણ ત્રિકોણની બાજુઓ, તેમની સામે આવેલ ખૂણાના *Sine* ના પ્રમાણમાં છે, એટલે કે ત્રિકોણ ABC માં

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

સાબિતી : ધારો કે 3.16 (i) અને (ii) માં દર્શાવેલ ત્રિકોણમાંથી કોઈ એક ત્રિકોણ ABC લો.



આકૃતિ 3.16

શિરોબિંદુ B થી બાજુ AC ને D માં મળે તેવી રીતે વેધ h દોર્યો છે. [(i) માં વેધ D માં મળે તે રીતે AC ને લંબાવી છે.] આકૃતિ 3.16(i) ના કાટકોણ ત્રિકોણ ABD પરથી,

$$\sin A = \frac{h}{c} \text{ એટલે કે } h = c \sin A \tag{1}$$

અને $$\sin(180° - C) = \frac{h}{a} \text{ એટલે કે } h = a \sin C \tag{2}$$

(1) અને (2) પરથી,

$$c \sin A = a \sin C, \text{ i.e., } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \tag{3}$$

તે જ પ્રમાણે

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \tag{4}$$

(3) અને (4) પરથી

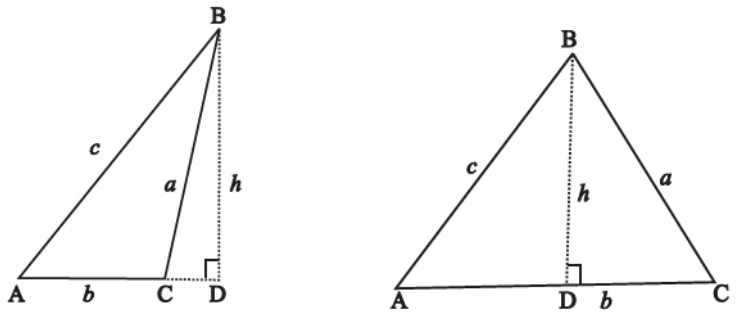
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

આકૃતિ 3.16 (ii) ના ત્રિકોણ ABC માટે તે જ પ્રમાણે સમીકરણ (3) અને (4) મળે.

પ્રમેય 5 : (*Cosine* સૂત્ર) જો A, B અને C ત્રિકોણના ખૂણાઓ હોય અને a, b અને c એ અનુક્રમે ખૂણાઓ A, B અને C ની સામેની બાજુઓની લંબાઈ હોય, તો

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos C$$

સાબિતી : ધારો કે ત્રિકોણ ABC આકૃતિ 3.17 (i) અથવા (ii) માં આપ્યા પ્રમાણે છે.



(i) (ii)

આકૃતિ 3.17

આકૃતિ 3.17 (ii) ના સંદર્ભમાં,

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2$$
$$= BD^2 + AD^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB\ cos\ A$$

અથવા $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A$

તે જ પ્રમાણે આપણે,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ cos B$$

અને $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C$ મેળવી શકીએ.

આ સમીકરણો આકૃતિ 3.17 (i) માટે પણ મેળવી શકાય. ત્યાં, C ગુરુકોણ છે.

જ્યારે ખૂણાઓ શોધવાના હોય ત્યારે *cosine* સૂત્રનું નીચે પ્રમાણેનું અનુકૂળ સ્વરૂપ લઈ શકાય :

$$cos\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$cos\ B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$cos\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ઉદાહરણ 25 : ત્રિકોણ ABC માં સાબિત કરો કે,

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

સાબિતી : *sine* સૂત્ર,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \quad \text{(ધારો)}$$

આથી, $$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k(\sin B - \sin C)}{k(\sin B + \sin C)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \cot\frac{(B+C)}{2}\tan\frac{(B-C)}{2}$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$

માટે $$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

તે જ પ્રમાણે બીજાં પરિણામો સાબિત કરી શકાય. આ પરિણામો *Napier* ની સમતા તરીકે પ્રખ્યાત છે.

ઉદાહરણ 26 : કોઈપણ ત્રિકોણ ABC માટે સાબિત કરો કે,

$$a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$$

ઉકેલ : અહીં,

$$a\sin(B-C) = a[\sin B\cos C - \cos B\sin C] \qquad (1)$$

હવે, $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k \quad \text{(ધારો કે)}$$

માટે, $\sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

sin B અને *sin* C નું મૂલ્ય (1) માં મૂકતાં અને *cosine* સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$a\sin(B-C) = a\left[bk\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) - ck\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left(a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2\right)$$

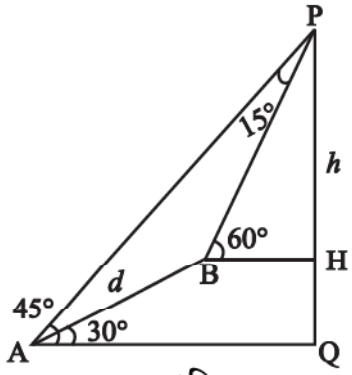
$$= k(b^2-c^2)$$

તે જ પ્રમાણે $b \sin(C-A) = k(c^2-a^2)$

અને $c \sin(A-B) = k(a^2-b^2)$

આથી ડા.બા. $= k(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2) = 0 =$ જ.બા.

ઉદાહરણ 27: h ઊંચાઈના શિરોલંબ ટાવર PQ ની ટોચના બિંદુ P નો A બિંદુએથી ઉત્સેધકોણ 45° અને B બિંદુથી ઉત્સેધકોણ 60° છે. જ્યાં B નું A થી અંતર AB = d છે. AB એ AQ સાથે 30° નો ખૂણો બનાવે છે. સાબિત કરો કે $d = h(\sqrt{3}-1)$.



આકૃતિ 3.18

ઉકેલ : આકૃતિ 3.18 પરથી, ∠PAQ = 45°, ∠BAQ = 30°, ∠PBH = 60°

સ્પષ્ટ છે કે $\angle APQ = 45°, \angle BPH = 30°$ આથી, $\angle APB = 15°$

વળી, $\angle PAB = 15°$ પરથી $\angle ABP = 150°$

ત્રિકોણ APQ પરથી, $AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$ (કેમ ?)

અથવા $AP = \sqrt{2}h$

Δ ABP માં *sine* સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{AB}{\sin 15°} = \frac{AP}{\sin 150°}$$

$$\therefore \frac{d}{\sin 15°} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150°}$$

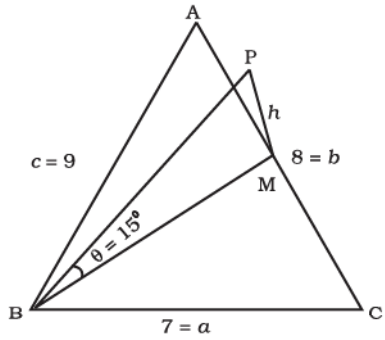
એટલે કે, $d = \dfrac{\sqrt{2}h \sin 15°}{\sin 30°}$

$= h(\sqrt{3}-1)$ (કેમ ?)

ઉદાહરણ 28 : ત્રિકોણીય પ્લોટ ABC ની બાજુ AC ના મધ્યબિંદુ M પર દીવાનો થાંભલો આવેલ છે. પ્લોટની બાજુઓ BC = 7 મીટર, CA = 8 મીટર અને AB = 9 મીટર છે. આ થાંભલો બિંદુ B આગળ 15° નો ખૂણો આંતરે છે. દીવાના થાંભલાની ઊંચાઈ નક્કી કરો.

ઉકેલ : આકૃતિ 3.19 પરથી AB = 9 મી = c, BC = 7 મી = a અને AC = 8 મી = b.

AC નું મધ્યબિંદુ M છે ત્યાં h (ધારો કે) ઊંચાઈનો દિવાનો થાંભલો MP આવેલો છે. ફરી, ધારો કે દીવાનો થાંભલો B બિંદુએ 15° નો ખૂણો આંતરે છે.



આકૃતિ 3.19

ΔABC માં *cosine* સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7} \qquad (1)$$

તે જ પ્રમાણે Δ BMC માટે *cosine* સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2\ BC \times CM \cos C.$$

અહીં AC નું મધ્યબિંદુ M હોવાથી $CM = \frac{1}{2} CA = 4$

માટે (1) નો ઉપયોગ કરતાં,

$$BM^2 = 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7} = 49$$

$$\therefore \quad BM = 7$$

આમ, M બિંદુએ કાટખૂણાવાળા ΔBMP પરથી,

$$\tan \theta = \frac{PM}{BM} = \frac{h}{7}$$

અથવા $\frac{h}{7} = \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$ (કેમ ?)

અથવા $h = 7(2 - \sqrt{3})m.$

સ્વાધ્યાય 3.5

કોઈપણ ત્રિકોણ ABC માટે જો $a = 18$, $b = 24$, $c = 30$, તો નીચેનાં મૂલ્ય શોધો : (પ્રશ્ન 1 તથા 2)

1. *cos* A, *cos* B, *cos* C
2. *sin* A, *sin* B, *sin* C

કોઈપણ ત્રિકોણ ABC માટે સાબિત કરો, (પ્રશ્ન 3 થી 13)

3. $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$$

4. $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\cos\dfrac{C}{2}}$

5. $\sin\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$

6. $a\,(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$

7. $a\,(\cos C - \cos B) = 2\,(b-c)\cos^2\dfrac{A}{2}$

8. $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \dfrac{b^2-c^2}{a^2}$

9. $(b+c)\cos\dfrac{B+C}{2} = a\cos\dfrac{B-C}{2}$

10. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

11. $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

12. $(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0$

13. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$

14. એક ટેકરી પર શિરોલંબ દિશામાં એક વૃક્ષ ઊભું છે. ટેકરી ક્ષિતિજ સાથે 15° નો ખૂણો બનાવે છે. ટેકરી પરના વૃક્ષના તળિયેથી 35 મી અંતરે આવેલા મેદાનના એક બિંદુએથી જોતાં વૃક્ષની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° માલૂમ પડે છે. વૃક્ષની ઊંચાઈ શોધો.

15. બે જહાજ એક સાથે બંદર છોડે છે. એક જહાજ 24 કિમી/કલાકની ઝડપે ઈશાન દિશામાં અને બીજું 32 કિમી/કલાકની ઝડપે દક્ષિણથી પૂર્વ દિશા સાથે 75° ના ખૂણે જાય છે. ત્રણ કલાક પછી બંને જહાજ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

16. નદીની એક જ બાજુએ બે વૃક્ષ A અને B આવેલાં છે. નદીમાંના બિંદુ C થી વૃક્ષ A અને વૃક્ષ B નાં અંતર અનુક્રમે 250 મીટર અને 300 મીટર છે. જો ખૂણો C એ 45° નો હોય તો તે બે વૃક્ષ વચ્ચેનું અંતર શોધો. ($\sqrt{2} = 1.414$)

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 29 : જો x અને y બંને બીજા ચરણમાં હોય અને $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -\frac{12}{13}$, તો $\sin(x+y)$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \ldots (1)$$

હવે, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\therefore \quad \cos x = \pm\frac{4}{5}$.

વળી, x બીજા ચરણમાં હોવાથી, $\cos x$ ઋણ થશે.

આથી, $\cos x = -\frac{4}{5}$

હવે, $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

તેથી, $\sin y = \pm\frac{5}{13}$.

પરંતુ y બીજા ચરણમાં હોવાથી $\sin y$ ધન હશે. આથી $\sin y = \frac{5}{13}$.

(1) માં $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ અને $\cos y$ નાં મૂલ્યો મૂકતાં,

$$\sin(x+y) = \frac{3}{5}\times\left(\frac{12}{13}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13} = -\frac{36}{65}-\frac{20}{65} = -\frac{56}{65}.$$

ઉદાહરણ 30 : સાબિત કરો કે,

$$\cos 2x \cos\frac{x}{2} - \cos 3x \cos\frac{9x}{2} = \sin 5x \sin\frac{5x}{2}.$$

ઉકેલ : અહીં, ડા. બા. $= \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{15x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -\sin 5x \sin\left(-\frac{5x}{2}\right)$$

$$= \sin 5x \sin\frac{5x}{2} = \text{જ. બા.}$$

ઉદાહરણ 31 : $\tan\frac{\pi}{8}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x = \frac{\pi}{8}$. આથી $2x = \frac{\pi}{4}$.

હવે, $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$$\therefore \quad \tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$

ધારો કે, $y = \tan\frac{\pi}{8}$. તેથી $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

અથવા $y^2 + 2y - 1 = 0$

આથી, $y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

પરંતુ $\frac{\pi}{8}$ પ્રથમ ચરણમાં હોવાથી $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ધન થાય.

આથી, $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.

ઉદાહરણ 32 : જો $\tan x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, તો $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ અને $\tan\frac{x}{2}$ નાં મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ હોવાથી $\cos x$ ઋણ થશે.

વળી, $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$.

$\therefore$ $\sin\frac{x}{2}$ ધન છે અને $\cos\frac{x}{2}$ ઋણ થાય.

હવે, $sec^2x = 1 + tan^2x = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$\therefore$ $cos^2x = \frac{16}{25}$ અથવા $cos\ x = -\frac{4}{5}$ (કેમ ?)

હવે, $2sin^2\frac{x}{2} = 1 - cos\ x = 1+\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$.

$\therefore sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$

અથવા $sin\ \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (કેમ ?)

વળી, $2cos^2\frac{x}{2} = 1+ cos\ x = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ $cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$

અથવા $cos\ \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (કેમ ?)

આથી, $tan\ \frac{x}{2} = \frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\times\left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3.$

ઉદાહરણ 33 : સાબિત કરો કે, $cos^2x + cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

ઉકેલ : અહીં, ડા. બા. $= \frac{1+cos\ 2x}{2}+\frac{1+cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1+cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$.

$$= \frac{1}{2}\left[3+cos\ 2x+cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+cos\ 2x+2cos\ 2x\ cos\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+cos\ 2x+2cos\ 2x cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+cos\ 2x-2cos\ 2x\ cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[3+cos\ 2x-cos\ 2x] = \frac{3}{2} =$$ જ. બા.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 3

સાબિત કરો :

1. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

2. $(\sin 3x+\sin x)\sin x+(\cos 3x-\cos x)\cos x=0$

3. $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\cos^2\frac{x+y}{2}$

4. $(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\sin^2\frac{x-y}{2}$

5. $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x=4\cos x\cos 2x\sin 4x$

6. $\frac{(\sin 7x+\sin 5x)+(\sin 9x+\sin 3x)}{(\cos 7x+\cos 5x)+(\cos 9x+\cos 3x)}=\tan 6x$

7. $\sin 3x+\sin 2x-\sin x=4\sin x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્ન માટે $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ અને $\tan\frac{x}{2}$ ની કિંમતો શોધો.

8. $\tan x=-\frac{4}{3}$, x એ બીજા ચરણમાં છે.

9. $\cos x=-\frac{1}{3}$, x એ ત્રીજા ચરણમાં છે.

10. $\sin x=\frac{1}{4}$, x એ બીજા ચરણમાં છે.

સારાંશ

- r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં, l લંબાઈનું ચાપ કેન્દ્ર આગળ θ રેડિયન માપનો ખૂણો આંતરે તો, $l=r\theta$
- રેડિયન માપ $=\frac{\pi}{180}\times$ અંશ માપ
- અંશ માપ $=\frac{180}{\pi}\times$ રેડિયન માપ
- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$
- $1+\tan^2 x=\sec^2 x$
- $1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$
- $\cos(2n\pi+x)=\cos x$
- $\sin(2n\pi+x)=\sin x$
- $\sin(-x)=-\sin x$
- $\cos(-x)=\cos x$
- $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
- $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

  $\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(2\pi - x) = -\sin x$
- જો x, y અને $(x \pm y)$ એ $\frac{\pi}{2}$ ના અયુગ્મ ગુણિત ના હોય, તો

  $$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

  $$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$
- જો x, y અને $(x \pm y)$ એ π ના ગુણિત ના હોય, તો

  $$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

  $$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$
- $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
- (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

  (ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

- (i) $2\cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$

  (ii) $-2\sin x \sin y = \cos (x + y) - \cos (x - y)$

  (iii) $2\sin x \cos y = \sin (x + y) + \sin (x - y)$

  (iv) $2 \cos x \sin y = \sin (x + y) - \sin (x - y)$.
- $\sin = 0$ પરથી $x = n\pi$, જ્યાં $n \in \mathbf{Z}$.
- જો $\cos x = 0$ હોય, તો $x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ અને પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- જો $\sin x = \sin y$ હોય, તો $x = n + (-1)^n y$, $n \in \mathbf{Z}$ અને પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- જો $\cos x = \cos y$ હોય, તો $x = 2n\pi \pm y$, $n \in \mathbf{Z}$ અને પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- જો $\tan x = \tan y$ હોય, તો $x = n\pi + y$, $n \in \mathbf{Z}$ અને પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

Historical Note

The study of trigonometry was first started in India. The ancient Indian Mathematicians, Aryabhatta (476), Brahmagupta (598), Bhaskara I (600) and Bhaskara II (1114) got important results. All this knowledge first went from India to middle-east and from there to Europe. The Greeks had also started the study of trigonometry but their approach was so clumsy that when the Indian approach became known, it was immediately adopted throughout the world.

In India, the predecessor of the modern trigonometric functions, known as the sine of an angle, and the introduction of the sine function represents the main contribution of the *siddhantas* (Sanskrit astronomical works) to the history of mathematics.

Bhaskara I (about 600) gave formulae to find the values of sine functions for angles more than 90°. A sixteenth century Malayalam work *Yuktibhasa* (period) contains a proof for the expansion of *sin* (A + B). Exact expression for sines or cosines of 18°, 36°, 54°, 72°, etc., are given by Bhaskara II.

The symbols $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, etc., for arc *sin x*, arc *cos x*, etc., were suggested by the astronomer Sir John F.W. Hersehel (1813) The names of Thales (about 600 B.C.) is invariably associated with height and distance problems. He is credited with the determination of the height of a great pyramid in Egypt by measuring shadows of the pyramid and an auxiliary staff (or gnomon) of known height, and comparing the ratios:

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (sun's altitude)}$$

Thales is also said to have calculated the distance of a ship at sea through the proportionality of sides of similar triangles. Problems on height and distance using the similarity property are also found in ancient Indian works.