પ્રકરણ 4

ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત

❖ *Analysis and natural philosophy owe their most important discoveries to this fruitful means, which is called induction. Newton was indebted to it for his theorem of the binomial and the principle of universal gravity. – LAPLACE* ❖

4.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણિતની સંકલ્પનામાં આનુમાનિક વિચારશક્તિ એ એક પાયાની ચાવી છે. નીચેનાં ત્રણ વિધાનોમાં દર્શાવેલ દલીલ એ ઉપાર્જિત, અવિધિસરનું અને આનુમાનિક વિચારશક્તિનું ઉદાહરણ છે:

(a) સોક્રેટિસ એ પુરુષ છે.

(b) બધા જ પુરુષો મર્ત્ય છે.

તેથી (c) સોક્રેટિસ મર્ત્ય છે.

જો વિધાન (a) અને (b) સત્ય હોય, તો (c)ની સત્યાર્થતા સ્થાપિત થાય છે. ગણિતની દૃષ્ટિએ આ દલીલ સરળ બનાવવા માટે આપણે લખીશું કે,

(i) આઠ એ બે વડે વિભાજ્ય છે.

(ii) બેથી વિભાજ્ય કોઈ પણ સંખ્યા યુગ્મ સંખ્યા છે.

માટે (iii) આઠ યુગ્મ સંખ્યા છે.

G. Peano
(1858-1932)

ટૂંકમાં *તારણ એ સામાન્ય રીતે ગણિતમાં અનુમાન અથવા પ્રમેય કહેવાતું સાબિત કરવાનું વિધાન છે. પ્રમાણિત તારવણીનાં પગલાં મળે અને તેની સાબિતી સ્થાપિત થઈ શકે, અથવા ન પણ થઈ શકે, એટલે કે, તારવણી એ વ્યાપક વિકલ્પ પરથી વિશિષ્ટ વિકલ્પ માટે ઉપયોગી છે.*

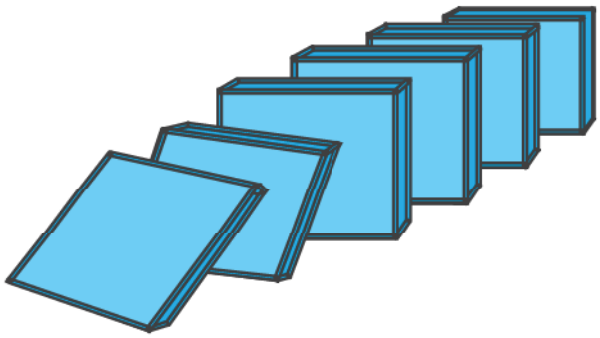
તારવણીના પ્રતિપક્ષે અનુમાનજન્ય દલીલો તમામ વિકલ્પોની ગણતરી પર આધારિત હોય છે અને આપણે દરેક વિકલ્પોના નિરીક્ષણ પરથી એક અનુમાન વિકસાવીએ છીએ. માહિતીના સંચય અને વિશ્લેષણના ઉદ્દેશ માટે ગણિતમાં તેનો વારંવાર ઉપયોગ થાય છે અને તે વૈજ્ઞાનિક દલીલ માટે ચાવીરૂપ ખ્યાલ છે.

આમ, સરળ ભાષામાં કહીએ, તો વિશિષ્ટ સત્યો અથવા વિકલ્પો પરથી વ્યાપક પરિણામની પ્રાપ્તિ એ અનુમાન શબ્દનો અર્થ છે.

બીજગણિત અથવા ગણિતની અન્ય શાખાઓનાં કેટલાંક પરિણામો; અથવા વિધાનો ધનપૂર્ણાંક n ના સ્વરૂપમાં રચવામાં આવે છે. આવાં વિધાનોની સાબિતી માટે વિશિષ્ટ તકનિક આધારિત સુનિયોજિત સિદ્ધાંત વપરાય છે અને તેને *ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત* કહે છે.

4.2 વિષયાભિમુખ

ગણિતમાં આપણે પૂર્ણ અનુમાનના રૂપના ઉપયોગને ગાણિતિક અનુમાન કહીશું. ગાણિતિક અનુમાનના પાયાના સિદ્ધાંતને સમજવા માટે, ધારો કે પાતળી તક્તીઓને આકૃતિ 4.1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવી છે :



આકૃતિ 4.1

જ્યારે પ્રથમ તક્તીને સૂચિત દિશામાં ધક્કો મારવામાં આવે, ત્યારે તમામ તક્તીઓ પડી જશે. બધી જ તક્તીઓ નિશ્ચિત રૂપે પડી જ જશે એમ નક્કી કરવા માટે, આપણે

(a) પ્રથમ તક્તી પડશે, અને

(b) પ્રથમ તક્તી પડવાની ઘટના બને તો તેની તરત પછીની તક્તી જરૂર પડશે, તેમ જાણવું પર્યાપ્ત છે. આ ગાણિતિક અનુમાનનો પાયાનો સિદ્ધાંત છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણનો વિશિષ્ટ ક્રમિત ઉપગણ છે. વાસ્તવમાં **N** એ નીચેના ગુણધર્મવાળો **R** નો નાનામાં નાનો ઉપગણ છે.

ગણ S માટે $1 \in S$ અને $x \in S$ હોય તો $x + 1 \in S$ થાય તે પ્રમાણેના ગુણધર્મ ધરાવતા ગણ S ને અનુમાનિત ગણ કહીશું. **N** એ **R** નો નાનામાં નાનો અનુમાનિત ઉપગણ છે. તે પરથી ફલિત થાય છે કે **R** ના કોઈ પણ અનુમાનિત ઉપગણમાં **N** સમાવિષ્ટ હોય જ.

દ્રષ્ટાંત :

ધારો કે આપણે ધનપૂર્ણાંક સંખ્યાઓ 1, 2, 3.....n ના સરવાળા માટેનું સૂત્ર શોધવું છે, એટલે કે જ્યારે $n = 3$ હોય, ત્યારે $1 + 2 + 3$ નું મૂલ્ય, $n = 4$ હોય, ત્યારે $1 + 2 + 3 + 4$ નું મૂલ્ય મેળવવાનું સૂત્ર અને આ

જ પ્રમાણે આગળ વધીએ તથા ધારો કે કોઈક રીતે આપણે સૂત્ર $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ સત્ય છે તેમ સ્વીકારીએ છીએ. ખરેખર, આ સૂત્ર કેવી રીતે સાબિત થશે ? આમ તો, આપણે n ની યથેચ્છ ધન પૂર્ણાંક કિંમતો માટે તેની ચકાસણી કરીશું. પરંતુ આ પ્રક્રિયાથી n ની તમામ કિંમતો માટે આ સૂત્ર સાબિત થશે નહિ. આ માટે એ જરૂરી છે કે કોઈક પ્રકારની પ્રક્રિયાઓની એક એવી શ્રૃંખલા મળે કે જેની અસરથી એક વખત વિશિષ્ટ ધન પૂર્ણાંક માટે સૂત્ર સાબિત કર્યું હોય તો એ સૂત્ર તે પછીના ધન પૂર્ણાંક માટે અને પછી અનિર્ણિત સુધી સ્વયં સત્ય ઠરે. આવી પ્રક્રિયા ગાણિતિક અનુમાનની રીતથી મળશે એમ માની શકીએ.

4.3 ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત

ધારો કે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n સંબંધી એક વિધાન $P(n)$ આપેલું છે.

(i) *વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય હોય એટલે કે $P(1)$ સત્ય હોય અને*

(ii) *જો વિધાન $n = k$ માટે સત્ય હોય (જ્યાં k કોઈ ધન પૂર્ણાંક છે), તો વિધાન $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય હોય, એટલે કે, $P(k)$ની સત્યાર્થતા પરથી $P(k + 1)$ની સત્યાર્થતા ફલિત થાય, તો $P(n)$ એ તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે સત્ય છે.*

ગુણધર્મ (i) સામાન્ય રીતે વિધાનની સત્યાર્થતા બતાવે છે. એવી પણ પરિસ્થિતિનું નિર્માણ થાય કે વિધાન તમામ $n \geq 4$ માટે સત્ય હોય. આ પરિસ્થિતિમાં, પગલું (i), $n=4$ થી શરૂ થશે અને આપણે $n=4$ માટે પરિણામની સત્યાર્થતા ચકાસીશું, એટલે કે $P(4)$ ની સત્યાર્થતા.

ગુણધર્મ (ii) એ શરતી ગુણધર્મ છે. આપેલ વિધાન $n = k$ માટે સત્ય છે તેમ સ્પષ્ટ થતું નથી. પરંતુ તે એટલું કહે છે કે, જો વિધાન $n = k$ માટે સત્ય હોય, તો તે $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય છે. આથી, વિધાન આ ગુણધર્મ ધરાવે છે તેમ સાબિત કરવા માટે, માત્ર નીચેનો શરતી પ્રસ્તાવ જ સાબિત કરવો પડે.

'જો વિધાન $n = k$ માટે સત્ય હોય, તો તે $n = k + 1$ માટે પણ સત્ય છે.' કેટલીક વખત આ પગલાને અનુમાનિત પગલા તરીકે ગણાય છે. વિધાન $n = k$ માટે સત્ય છે એવી ધારણાના આ અનુમાનિત પગલાને અનુમાનિત કલ્પના કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, એક સૂત્રની કલ્પના કરી હોય અને ગણિતમાં તેના વારંવાર ઉપયોગથી તે કોઈ નમૂના પ્રમાણે બંધબેસતી હોય, જેમકે,

$$1 = 1^2 = 1$$

$$4 = 2^2 = 1 + 3$$

$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7, \text{ વગેરે.}$$

તેના પરથી નોંધીશું કે પ્રથમ બે અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો એ બીજી પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ છે, પ્રથમ ત્રણ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો એ ત્રીજી પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ છે. આ પ્રમાણે આગળ મળે. આ ઉપરના નિયમ પરથી $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ દેખાય છે, એટલે કે પ્રથમ n અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો n નો વર્ગ છે.

આપણે, $P(n)$: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ લખી શકીએ.

પ્રત્યેક n માટે આપણે $P(n)$ સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

સાબિતીના પ્રથમ સોપાન માટે ગાણિતિક અનુમાનના ઉપયોગ માટે $P(1)$ સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

આ પગથિયાને પાયાનું પગથિયું કહે છે.

$1 = 1^2$ દેખીતું જ છે, એટલે કે, $P(1)$ સત્ય છે.

બીજા પગલાને અનુમાનિત સોપાન કહીશું. અહીં, આપણે ધારીશું કે કોઈક ધન પૂર્ણાંક k માટે $P(k)$ સત્ય છે અને $P(k + 1)$ સત્ય સાબિત કરવાની જરૂરિયાત ઊભી થશે. $P(k)$ સત્ય છે, માટે

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2 \qquad ... (1)$$

હવે,
$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + \{2(k + 1) - 1\} \qquad ... (2)$$

$$= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2 \qquad [(1) \text{ પરથી}]$$

માટે $P(k + 1)$ સત્ય છે અને અનુમાનિત સાબિતી હવે પૂરી થઈ.

આથી $P(n)$ એ તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે સત્ય છે.

ઉદાહરણ 1 : $n \geq 1$ માટે; સાબિત કરો કે,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ વિધાનને $P(n)$ દ્વારા દર્શાવીએ, એટલે કે,

$$P(n): \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$ લેતાં, $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$ સત્ય છે.

ધારો કે, કોઈક ધન પૂર્ણાંક k માટે $P(k)$ સત્ય છે, એટલે કે,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad ... (1)$$

હવે આપણે $P(k + 1)$ પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું. હવે આપણી પાસે,

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + k^2) + (k + 1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad [(1) \text{ પરથી}]$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

આમ P(k) સત્ય હોય ત્યારે P(k + 1) સત્ય છે.

આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે વિધાન P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 2 : તમામ ધન પૂર્ણાંક n માટે સાબિત કરો કે $2^n > n$

ઉકેલ : ધારો કે P(n): $2^n > n$

જો n =1, તો $2^1 > 1$. આથી P(1) સત્ય છે.

$k = 2$ માટે $2^2 = 4 > 2$. ... (1)

આથી P(2) = P(1 + 1) સત્ય છે.

ધારો કે 1 થી મોટા કોઈક ધન પૂર્ણાંક k માટે P(k) સત્ય છે, એટલે કે, $2^k > k$

હવે આપણે સાબિત કરીશું કે જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે.

$k > 1$ માટે (1) ની બંને બાજુએ 2 વડે ગુણતાં,

$$2 \cdot 2^k > 2k$$

એટલે કે, $2^{k+1} > 2k = k + k > k + 1$ $(k > 1)$

આથી જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, દરેક ધન પૂર્ણાંક n માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : પ્રત્યેક $n \geq 1$ માટે સાબિત કરો કે,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots.. + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ઉકેલ : આપણે P(n) : $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots.. + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ લઈશું.

આપણે નોંધીએ કે P(1) : $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ સત્ય છે. આમ n = 1 માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે પ્રાકૃતિક સંખ્યા k માટે P(k) સત્ય છે,

એટલે કે $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots.. + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ ....(1)

જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે, તેમ આપણે સાબિત કરીશું.

હવે, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots.. + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots.. + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$ [(1) પરથી]

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

$$= \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

આમ જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય હોય. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી, તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 4 : પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે સાબિત કરો કે $7^n - 3^n$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : આપણે લખીશું કે, P(n): $7^n - 3^n$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે.

આપણે નોંધીશું કે,

P(1): $7^1 - 3^1 = 4$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે. આમ $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે, પ્રાકૃતિક સંખ્યા k માટે P(k) સત્ય છે,

એટલે કે, P(k) : $7^k - 3^k$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે તે સત્ય છે.

આપણે $d \in \mathbf{N}$ માટે, $7^k - 3^k = 4d$ લખીશું.

હવે, આપણે જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે સાબિત કરીશું.

હવે, $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)} = 7^{(k+1)} - 7 \cdot 3^k + 7 \cdot 3^k - 3^{(k+1)}$

$$= 7(7^k - 3^k) + (7-3)3^k$$

$$= 7(4d) + (7-3)3^k$$

$$= 7(4d) + 4 \cdot 3^k$$

$$= 4(7d + 3^k)$$

છેલ્લા સોપાન પરથી આપણે કહી શકીએ કે, $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$ એ 4 વડે વિભાજ્ય છે.

આમ, જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે.

આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પ્રમાણે આપેલ વિધાન પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે સત્ય છે.

ઉદાહરણ 5 : તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ n માટે સાબિત કરો કે $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, જ્યાં $x > -1$.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલું વિધાન P(n) છે,

એટલે કે, P(n): $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, $x > -1$

આપણે નોંધીશું કે $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે, કારણ કે $x > -1$ માટે $(1 + x)^1 \geq (1 + 1 \cdot x)$

ધારો કે P(k): $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$, $x > -1$ સત્ય છે. ... (1)

જો P(k) સત્ય હોય, તો P($k + 1$) એ $x > -1$ માટે સત્ય છે તેમ સાબિત કરીએ. ... (2)

નિત્યસમ, $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x)$ લઈએ.

$x > -1$ આપેલું હોવાથી, $(1 + x) > 0$.

માટે $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x)$ મળે.

એટલે કે, $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx + kx^2)$ ....(3)

અહીં k પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $x^2 \geq 0$. આથી $kx^2 \geq 0$.

માટે $(1 + x + kx + kx^2) \geq (1 + x + kx)$. અર્થાત્ $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + (1 + k)x)$

આમ, વિધાન (2) સત્ય થશે. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે,

પ્રત્યેક $n \in \mathbf{N}$ માટે $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ એ 24 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : વિધાન P(n) નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

P(n) : $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ એ 24 વડે વિભાજ્ય છે.

$2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 - 5 = 24$ એ 24 વડે વિભાજ્ય છે. આથી $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

એટલે કે, $2 \cdot 7^k + 3 \cdot 5^k - 5 = 24q$, જ્યાં $q \in \mathbf{N}$ ....(1)

હવે, જો આપણે P(k) સત્ય હોય, તો P($k + 1$) સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

$$2 \cdot 7^{k+1} + 3 \cdot 5^{k+1} - 5 = 2 \cdot 7^k \cdot 7^1 + 3 \cdot 5^k \cdot 5^1 - 5 \quad .....(2)$$

$$= 7\,[2 \cdot 7^k + 3 \cdot 5^k - 5 - 3 \cdot 5^k + 5] + 3 \cdot 5^k \cdot 5 - 5$$

$$= 7\,[24q - 3 \cdot 5^k + 5] + 15 \cdot 5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 21 \cdot 5^k + 35 + 15 \cdot 5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 6 \cdot 5^k + 30$$

$$= 7 \times 24q - 6\,(5^k - 5)$$

$$= 7 \times 24q - 6\,(4p) \quad [(5^k - 5) \text{ એ 4 નો ગુણિત છે (શા માટે ?)}]$$

$$= 7 \times 24q - 24p$$

$$= 24\,(7q - p)$$

$$= 24 \times r\,;\ r = 7q - p \text{ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.} \quad .....(3)$$

આથી (3) ની ડા.બા.ની અભિવ્યક્તિ 24 વડે વિભાજ્ય છે. આમ જો P(k) સત્ય હોય, તો P($k + 1$) સત્ય છે.

આથી, ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, પ્રત્યેક $n \in \mathbf{N}$ માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ: $5^k - 5 = 5(5-1)(5^{k-2} + 5^{k-3} + ... + 1) \qquad k \geq 2$

$$= 5 \cdot 4(5^{k-2} + 5^{k-3} + ... + 1)$$

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે,

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}, n \in \mathbf{N}$$

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ વિધાન P(n) છે.

એટલે કે, $P(n) : 1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}, n \in \mathbf{N}$

$1^2 > \frac{1^3}{3}$ હોવાથી, $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

એટલે કે, $P(k) : 1^2 + 2^2 + ... + k^2 > \frac{k^3}{3}$ સત્ય છે. ...(1)

જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે એમ સાબિત કરીશું.

હવે, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2$

$$= \left(1^2 + 2^2 + ... + k^2\right) + (k+1)^2$$

$$> \frac{k^3}{3} + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{3}[k^3 + 3k^2 + 6k + 3] \qquad (\because (1))$$

$$= \frac{1}{3}[(k + 1)^3 + 3k + 2] > \frac{1}{3}(k + 1)^3$$

માટે, જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k+1) પણ સત્ય છે. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in \mathbf{N}$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 8 : પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી ઘાતાંકનો નિયમ $(ab)^n = a^n b^n$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, આપેલ વિધાન P(n) છે.

એટલે કે, $P(n) : (ab)^n = a^n b^n$

$(ab)^1 = a^1 b^1$ હોવાથી, $n = 1$ માટે P(n) સત્ય છે.

ધારો કે, P(k) સત્ય છે, એટલે કે,

$(ab)^k = a^k b^k$ ....(1)

હવે આપણે જો P(k) સત્ય હોય, તો P(k + 1) સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

હવે, $(ab)^{k+1} = (ab)^k (ab)$

$= (a^k b^k)(ab)$ [(1) પરથી]

$= (a^k \cdot a^1)(b^k \cdot b^1)$

$= a^{k+1} \cdot b^{k+1}$

માટે જો $P(k)$ સત્ય હોય, તો $P(k+1)$ પણ સત્ય છે. આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંત અનુસાર પ્રત્યેક $n \in \mathbf{N}$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

$n \in \mathbf{N}$ માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી નીચેનાં વિધાનો સાબિત કરો :

1. $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \dfrac{(3^n - 1)}{2}$.

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. $1 + \dfrac{1}{(1+2)} + \dfrac{1}{(1+2+3)} + \ldots + \dfrac{1}{(1+2+3+\ldots n)} = \dfrac{2n}{(n+1)}$

4. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots + n \cdot 3^n = \dfrac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$

6. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \left[\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$

7. $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \dfrac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$

8. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2$

9. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

10. $\dfrac{1}{2 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \dfrac{n}{(6n+4)}$

11. $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

12. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

13. $\left(1 + \dfrac{3}{1}\right)\left(1 + \dfrac{5}{4}\right)\left(1 + \dfrac{7}{9}\right) \ldots \left(1 + \dfrac{(2n+1)}{n^2}\right) = (n+1)^2$

14. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=(n+1)$

15. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

16. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{(3n+1)}$

17. $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$

18. $1+2+3+\ldots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

19. $n(n+1)(n+5)$ એ 3 નો ગુણિત છે.

20. $10^{2n-1}+1$ એ 11 વડે વિભાજ્ય છે.

21. $x^{2n}-y^{2n}$ એ $x+y$ વડે વિભાજ્ય છે.

22. $3^{2n+2}-8n-9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

23. 41^n-14^n એ 27નો ગુણિત છે.

24. $(2n+7)<(n+3)^2$

સારાંશ

- ગણિતની સંકલ્પનાઓમાં આનુમાનિક વિચારશક્તિ એ એક પાયાની ચાવી છે. આનુમાનિક તારવણીના પ્રતિપક્ષે, અનુમાનજન્ય વિચારશક્તિ તમામ વિકલ્પો પર આધારિત હોય છે અને આપણે દરેક વિકલ્પોના નિરીક્ષણ પછી એક અનુમાન વિકસાવીએ છીએ. આમ, સરળ ભાષામાં કહીએ તો, વિશિષ્ટ સત્યો અથવા વિકલ્પો પરથી વ્યાપક સ્વરૂપ એ 'અનુમાન' શબ્દનો અર્થ છે.
- વિવિધ અમર્યાદિત ગાણિતિક વિધાનો સાબિત કરવા માટે ગાણિતિક અનુમાનનો સિદ્ધાંત એક ઉપયોગી સાધન છે. ધન પૂર્ણાંક સાથે સંકળાયેલ પ્રત્યેક આવા વિધાનને આપણે $P(n)$ ધારીશું તથા $n = 1$ માટે વિધાનની સત્યાર્થતા ચકાસીશું. પછી ધન પૂર્ણાંક k માટે $P(k)$ ની સત્યાર્થતા પરથી $n = k + 1$ માટે $P(k + 1)$ની સત્યાર્થતા સ્થાપિત કરીશું.

Historical Note

Unlike other concepts and methods, proof by mathematical induction is not the invention of a particular individual at a fixed moment. It is said that the principle of mathematical induction was known by the Pythagoreans.

The French mathematician Blaise Pascal is credited with the origin of the principle of mathematical induction.

The name induction was used by the English mathematician John Wallis.

Later the principle was employed to provide a proof of the binomial theorem.

De Morgan contributed many accomplishments in the field of mathematics on many different subjects. He was the first person to define and name "mathematical induction" and developed De Morgan's rule to determine the convergence of a mathematical series.

G. Peano undertook the task of deducing the properties of natural numbers from a set of explicitly stated assumptions, now known as Peano's axioms.The principle of mathematical induction is a restatement of one of the Peano's axioms.