પ્રકરણ 6

સુરેખ અસમતાઓ

❖*Mathematics is the art of saying many things in many different ways.* – *MAXWELL*❖

6.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળનાં ધોરણોમાં આપણે એક ચલ સુરેખ સમીકરણો તથા બે ચલની સુરેખ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ મેળવ્યો છે. વળી આપણે કેટલાંક વિધાનો દ્વારા વર્ણવેલા કૂટપ્રશ્નોને પણ આવાં સમીકરણોમાં પરિવર્તિત કર્યાં હતાં અને તેમના ઉકેલ મેળવ્યા હતા. હવે પછી સ્વભાવિક રીતે પ્રશ્ન ઉદ્‌ભવે કે વ્યવહારમાં હંમેશાં પ્રત્યેક કૂટપ્રશ્નનું પરિવર્તન સમીકરણમાં થાય તે જરૂરી છે ? ઉદાહરણ તરીકે, તમારા વર્ગમાં બધા જ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ 160 સેમીથી ઓછી છે. તમારા વર્ગમાં વધુમાં વધુ 60 ટેબલ કે ખુરશીઓ કે બંને સમાઈ શકે છે. અહીં આપણને એવાં વિધાનો મળે છે કે જેમાં '$<$' (થી ઓછું), '$>$' (થી વધુ), '$\leq$' (થી ઓછું કે બરાબર) અને $\geq$ (થી વધુ કે બરાબર) જેવા સંકેતો પણ ઉદ્‌ભવી શકે છે. આવી અભિવ્યક્તિને ***સુરેખ અસમતા*** *(Linear Inequalities)* કહે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે એક ચલમાં તથા બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓનો અભ્યાસ કરીશું. ગણિત, વિજ્ઞાન, આંકડાશાસ્ત્રમાં, મહત્તમ, ન્યૂનતમના પ્રશ્નો (ઇષ્ટ કિંમતના પ્રશ્નો) (*optimisation problems*), અર્થશાસ્ત્ર, મનોવિજ્ઞાન વગેરેનો અભ્યાસ કરવામાં અસમતાઓ ઉપયોગી છે.

6.2 અસમતાઓ

હવે આપણે કેટલીક પરિસ્થિતિઓ વિચારીએ :

(i) રવિ ₹ 200 લઈને ચોખા ખરીદવા બજારમાં જાય છે. ચોખા એક કિલોના પૅકેટમાં ઉપલબ્ધ છે. 1 કિલો ચોખાના પૅકેટની કિંમત ₹ 30 છે. હવે જો x એ રવિએ ખરીદેલા ચોખાનાં પૅકેટોની સંખ્યા દર્શાવે તો, તેણે ખર્ચ કરેલી કુલ રકમ ₹ $30x$ થાય.

અહીં તેને ચોખાનાં પૅકેટો જ ખરીદવાના હોવાથી તે પૂરા ₹ 200 નો ખર્ચ નહિ કરી શકે. (કેમ?)

આથી, $30x < 200$ ... (1)

અહીં સ્પષ્ટ છે કે પરિણામ (I) સમીકરણ નથી, કારણ કે તેમાં સમતાનો સંકેત નથી.

(ii) રેશ્મા પાસે ₹ 120 છે. તેમાંથી તે કેટલાંક રજિસ્ટર અને પેન ખરીદવા માંગે છે. પ્રત્યેક રજિસ્ટરની કિંમત ₹ 40 અને પ્રત્યેક પેનની કિંમત ₹ 20 છે. આ પરિસ્થિતિમાં રેશ્માએ ખરીદેલ રજિસ્ટરની સંખ્યા x અને પેનની સંખ્યા y હોય તો તેના દ્વારા ખર્ચ થયેલ કુલ રકમ ₹ $(40x + 20y)$ થાય.

અને તેથી $40x + 20y \leq 120$ ... (2)

આ પરિસ્થિતિમાં ખર્ચ થયેલી કુલ રકમ ₹ 120 હોઈ શકે છે. તો અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે વિધાન (2) બે ભાગમાં છે.

$40x + 20y < 120$ ... (3)

અને $40x + 20y = 120$ ... (4)

વિધાન (3) એ સમીકરણ નથી તે એક અસમતા છે, જ્યારે વિધાન (4) સમીકરણ છે.

વ્યાખ્યા 1 : *બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ કે બૈજિક પદાવલી વચ્ચે '$<$', '$>$', '$\leq$' અને '$\geq$' જેવા સંબંધો અસમતા રચે છે.*

ઉપરનાં વિધાનો (1), (2) અને (3) અસમતાઓ છે. $3 < 5$; $7 > 5$ એ સંખ્યાત્મક અસમતાનાં ઉદાહરણો છે. $x < 5$; $y > 2$; $x \geq 3$, $y \leq 4$ એ શાબ્દિક અસમતાનાં ઉદાહરણો છે.

$3 < 5 < 7$ (વાંચો : 5 એ 3 થી મોટો છે અને 7 થી નાનો છે), $3 \leq x < 5$ (વાંચો : x એ 3 ને સમાન અથવા 3 થી મોટો છે અને 5 થી નાનો છે), $2 < y \leq 4$ એ દ્વિ-અસમતાનાં ઉદાહરણો છે.

અસમતાઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે મુજબ છે :

$ax + b < 0$ ... (5)

$ax + b > 0$ ... (6)

$ax + b \leq 0$ ... (7)

$ax + b \geq 0$ ... (8)

$ax + by < c$ ... (9)

$ax + by > c$ ... (10)

$ax + by \leq c$ ... (11)

$ax + by \geq c$ ... (12)

$ax^2 + bx + c \leq 0$ ... (13)

$ax^2 + bx + c > 0$ ... (14)

અસમતાઓ (5), (6), (9), (10) અને (14) એ ***ચુસ્ત અસમતાઓ*** (*strict inequalities*) છે. જ્યારે (7), (8), (11), (12), અને (13) ને ***મિશ્ર અસમતા*** (*slack inequalities*) કહે છે. અસમતાઓ (5) થી (8) એ એક ચલ x ની સુરેખ અસમતા છે. (જ્યાં $a \neq 0$) અસમતાઓ (9) થી (12) એ શૂન્યેતર a તથા b માટે બે ચલ x અને y માં સુરેખ અસમતાઓ છે.

અસમતાઓ (13) અને (14) એ સુરેખ અસમતાઓ નથી. (હકીકતમાં તો $a \neq 0$ માટે આ એક ચલની દ્વિઘાત અસમતા છે.)

આ પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત એક ચલ અને બે ચલની સુરેખ અસમતાનો જ અભ્યાસ કરીશું.

6.3 એક ચલમાં સુરેખ અસમતાનો બૈજિક ઉકેલ અને તેનું આલેખ પર નિરૂપણ :

વિભાગ 6.2 ના વિધાન(1) માં આપણી પાસે અસમતા $30x < 200$ હતી. અહીં x એ ચોખાનાં પૅકેટની સંખ્યા દર્શાવે છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે x એ ઋણ પૂર્ણાંક કે અપૂર્ણાંક સંખ્યા હોઈ શકે નહિ. આ અસમતામાં ડાબી બાજુ $30x$ અને જમણી બાજુ 200 છે. તેથી

જો $x = 0$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (0) = 0 < 200$ (જમણી બાજુ) સત્ય છે.

જો $x = 1$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (1) = 30 < 200$ (જમણી બાજુ) સત્ય છે.

જો $x = 2$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (2) = 60 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 3$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (3) = 90 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 4$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (4) = 120 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 5$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (5) = 150 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 6$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (6) = 180 < 200$, સત્ય છે.

જો $x = 7$, તો, ડાબી બાજુ $= 30\ (7) = 210 < 200$, મિથ્યા છે.

ઉપરની પરિસ્થિતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે x ની જે કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે તેવી કિંમતો 0,1,2,3,4,5,6 છે. x ની જે કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે તેવી કિંમતોને અસમતાનો *ઉકેલ* કહે છે. આવા તમામ ઉકેલોથી બનતા ગણ $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ને અસમતાનો *ઉકેલ ગણ* કહે છે.

આમ, ચલની જે કિંમતો માટે આપેલ એક ચલ અસમતા સત્ય વિધાન દર્શાવે તે કિંમતોને અસમતાનો ઉકેલ કહે છે.

આપણે ઉપરની અસમતાનો ઉકેલ પ્રયત્ન દ્વારા ક્ષતિ-નિવારણ પદ્ધતિથી મેળવ્યો. આ બહુ કાર્યક્ષમ પદ્ધતિ નથી. દેખીતી રીતે આ પદ્ધતિ ખૂબ સમય માગી લે તેવી અને ક્યારેક બિનઅસરકારક છે. આપણને અસમતાના ઉકેલ માટે વધુ સારી રીતે અને વ્યવસ્થિત રીતે ઉકેલ મળે તેવી પદ્ધતિની જરૂર છે. આ પહેલાં આપણે સંખ્યાત્મક અસમતાના કેટલાક વધુ ગુણધર્મો જોઈશું અને અસમતાનો ઉકેલ મેળવતી વખતે તેમનો નિયમ તરીકે ઉપયોગ કરીશું.

સુરેખ સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવતી વખતે તમે નીચેના નિયમોને યાદ રાખજો :

નિયમ : 1 સમીકરણની બંને બાજુએ સમાન સંખ્યા ઉમેરી (કે તેમાંથી બાદ) કરી શકાય છે.

નિયમ : 2 સમીકરણની બંને બાજુને સમાન શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણી (કે ભાગી) શકાય છે.

અસમતાઓનો ઉકેલ મેળવતી વખતે પણ આપણે ફરી આ જ નિયમોનો ઉપયોગ કરીશું, પણ આપણે નિયમ 2 માં

થોડો સુધારો કરીશું, અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ઋણ સંખ્યા વડે ગુણતાં (કે ભાગતાં) અસમતાની નિશાની ઊલટાઈ જાય છે. (જેમ કે, '<' ને બદલે '>', ≤' ને બદલે '≥' વગેરે) આ નીચેની હકીકત પરથી સ્પષ્ટ છે :

$3 > 2$ પરંતુ $-3 < -2$,

$-8 < -7$ પરંતુ $(-8)(-2) > (-7)(-2)$, એટલે કે, $16 > 14$.

આમ, અસમતાના ઉકેલ માટેના નિયમો નીચે પ્રમાણે છે :

નિયમ 1 : અસમતાની બંને બાજુએ સમાન સંખ્યા ઉમેરતા કે તેમાંથી બાદ કરતાં તેની નિશાની બદલાતી નથી.

નિયમ 2 : અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ધન સંખ્યા વડે ગુણતા કે ભાગતાં અસમતાની નિશાની બદલાતી નથી, પણ અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ઋણ સંખ્યા વડે ગુણતાં કે ભાગતાં અસમતાની નિશાની *ઊલટાઈ* જાય છે.

ચાલો હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : (i) પ્રાકૃતિક સંખ્યા x (ii) પૂર્ણાંક સંખ્યા x માટે $30x < 200$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં $30x < 200$ આપેલ છે.

અથવા $\frac{30x}{30} < \frac{200}{30}$ (નિયમ-2)

તેથી, $x < \frac{20}{3}$

(i) x પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય તો નીચેની કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે છે.

પ્રાકૃતિક સંખ્યા 1, 2, 3, 4, 5, 6.

અસમતાનો ઉકેલ ગણ : {1, 2, 3, 4, 5, 6} છે.

(ii) x પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તો આપેલ અસમતાનો ઉકેલ...,–3, –2,–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે.

અસમતાનો ઉકેલ ગણ {..., – 3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} છે.

ઉદાહરણ 2 : (i) પૂર્ણાંક સંખ્યા x (ii) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $5x - 3 < 3x + 1$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં, $5x - 3 < 3x + 1$

$5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (નિયમ 1)

$5x < 3x + 4$

$5x - 3x < 3x + 4 - 3x$ (નિયમ 1)

$2x < 4$

$x < 2$ (નિયમ 2)

(i) x પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તો આપેલ અસમતાનો ઉકેલ ..., – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1 છે.

(ii) જ્યારે x વાસ્તવિક સંખ્યા હોય ત્યારે આપેલ અસમતાનો ઉકેલ $x < 2$, એટલે, 2 થી ઓછી હોય એવી તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. તેથી આ અસમતાનો ઉકેલ ગણ $x \in (-\infty, 2)$ છે.

આપણે અસમતાઓનો ઉકેલ પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણ, પૂર્ણાંક સંખ્યાગણ અને વાસ્તવિક સંખ્યાગણમાં મેળવ્યો. હવેથી જ્યાં પણ નિર્દેશિત કરવામાં આવ્યું ન હોય, ત્યાં આ પ્રકરણમાં આપણે અસમતાનો ઉકેલ વાસ્તવિક સંખ્યાગણમાં મેળવીશું.

ઉદાહરણ 3 : $4x + 3 < 6x + 7$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં, $4x + 3 < 6x + 7$

અથવા $4x - 6x < 6x + 4 - 6x$

અથવા $-2x < 4$ અથવા $x > -2$

આથી, આપેલ અસમતાનો ઉકેલ -2 થી મોટી પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ છે.

ઉકેલ ગણ $(-2, \infty)$ છે.

ઉદાહરણ 4 : $\frac{5-2x}{3} \le \frac{x}{6} - 5$ ઉકેલો.

ઉકેલ : $\frac{5-2x}{3} \le \frac{x}{6} - 5$

અથવા $2(5 - 2x) \le x - 30.$

અથવા $10 - 4x \le x - 30$

અથવા $-5x \le -40$, એટલે કે, $x \ge 8$

આથી, આપેલ અસમાનતાનો ઉકેલ 8 થી મોટી કે 8 ને સમાન પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x છે. ઉકેલ ગણ $[8, \infty)$ છે.

ઉદાહરણ 5 : અસમતા $7x + 3 < 5x + 9$ નો ઉકેલ શોધી તેનો આલેખ સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : $7x + 3 < 5x + 9$

અથવા $2x < 6$

અથવા $x < 3$

આપેલ અસમતાનો સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 6.1 પ્રમાણે દર્શાવાય.

આકૃતિ 6.1

ઉદાહરણ 6 : અસમતા $\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$ નો ઉકેલ શોધો અને તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ :

$$\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$$

અથવા $\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x-3}{4}$

$\therefore$ $2(3x - 4) \geq (x - 3)$

$\therefore$ $6x - 8 \geq x - 3$

$\therefore$ $5x \geq 5$ અથવા $x \geq 1$

ઉકેલ સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 6.2 માં દર્શાવેલ છે.

આકૃતિ 6.2

ઉદાહરણ 7 : એક વિદ્યાર્થી ધોરણ 11ની પ્રથમ અને બીજા સત્રની પરીક્ષામાં અનુક્રમે 62 અને 48 ગુણ મેળવે છે. હવે તેણે વાર્ષિક પરીક્ષામાં કેટલા ન્યૂનતમ ગુણ મેળવવા જોઈએ કે જેથી તેના સરેરાશ ગુણ ઓછામાં ઓછા 60 થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે વિદ્યાર્થી વાર્ષિક પરીક્ષામાં x ગુણ પ્રાપ્ત કરે છે, તો

$\frac{62+48+x}{3} \geq 60$ થવું જોઈએ.

અથવા $110 + x \geq 180$ થવું જોઈએ.

અથવા $x \geq 70$ થવું જોઈએ.

આથી, વિદ્યાર્થીએ સરેરાશ ન્યૂનતમ ગુણ 60 કરવા માટે વાર્ષિક પરીક્ષામાં ન્યૂનતમ 70 ગુણ લાવવા પડે.

ઉદાહરણ 8 : બે પૈકીનો પ્રત્યેક 10 થી મોટો હોય અને જેમનો સરવાળો 40 થી ઓછો હોય તેવા ક્રમિક અયુગ્મ પૂર્ણાંકોની જોડ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, બે ક્રમિક અયુગ્મ પૂર્ણાંકોમાં નાનો અયુગ્મ પૂર્ણાંક x છે. તો બીજો અયુગ્મ પૂર્ણાંક $x + 2$ થશે. હવે પ્રશ્ન અનુસાર

$x > 10$ ... (1)

અને $x + (x + 2) < 40$ ... (2)

(2) પરથી, આપણને $2x + 2 < 40$ મળે.

$x < 19$ ... (3)

પરિણામો (1) અને (3), પરથી

$10 < x < 19$

x અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોવાથી x એ 11, 13, 15 અને 17 હોઈ શકે.

તેથી, શક્ય ક્રમયુક્ત યુગ્મ (11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19) બને.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (i) પ્રાકૃતિક સંખ્યા x (ii) પૂર્ણાંક સંખ્યા x માટે $24x < 100$ ઉકેલો.
2. (i) પ્રાકૃતિક સંખ્યા x (ii) પૂર્ણાંક સંખ્યા x માટે $-12x > 30$ ઉકેલો.

3. (i) પૂર્ણાંક સંખ્યા x (ii) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $5x - 3 < 7$ ઉકેલો.

4. (i) પૂર્ણાંક સંખ્યા x (ii) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $3x + 8 > 2$ ઉકેલો.

નીચેની 5 થી 16 ક્રમની અસમતાઓનો વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે ઉકેલ મેળવો.

5. $4x + 3 < 5x + 7$

6. $3x - 7 > 5x - 1$

7. $3(x - 1) \le 2(x - 3)$

8. $3(2 - x) \ge 2(1 - x)$

9. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 11$

10. $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$

11. $\frac{3(x-2)}{5} \le \frac{5(2-x)}{3}$

12. $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5} + 4\right) \ge \frac{1}{3}(x - 6)$

13. $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$

14. $37 - (3x + 5) \ge 9x - 8(x - 3)$

15. $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

16. $\frac{(2x-1)}{3} \ge \frac{(3x-2)}{4} - \frac{(2-x)}{5}$

નીચેની 17 થી 20 ક્રમની અસમતાઓનો ઉકેલ મેળવો અને તેમને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

17. $3x - 2 < 2x + 1$

18. $5x - 3 \ge 3x - 5$

19. $3(1 - x) < 2(x + 4)$

20. $\frac{x}{2} \ge \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

21. રવિએ પહેલી બે એકમ કસોટીમાં 70 અને 75 ગુણ મેળવેલ છે. હવે તેણે ત્રીજા કસોટીમાં કેટલા ન્યૂનતમ ગુણ મેળવવા જોઈએ કે જેથી તેના સરેરાશ ગુણ ઓછામાં ઓછા 60 થાય?

22. કોઈ એક અભ્યાસક્રમમાં ગ્રેડ 'A' મેળવવા માટે પાંચ પરીક્ષાની સરેરાશ 90 કે તેથી વધુ ગુણ હોવા જોઈએ. (દરેકના 100 ગુણ હોય તેવી પરીક્ષા). જો સુનીતાના પ્રથમ ચાર પરીક્ષાના ગુણ 87, 92, 94 અને 95 હોય, તો તેને તે અભ્યાસક્રમમાં 'A' ગ્રેડ મળે એ માટે તેણે પાંચમી પરીક્ષામાં ન્યૂનતમ કેટલા ગુણ મેળવવા જોઈએ?

23. બે પૈકી પ્રત્યેક 10 થી નાનો હોય અને જેમનો સરવાળો 11 થી વધુ હોય તેવા ક્રમિક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંકોની જોડ મેળવો.

24. બે પૈકી પ્રત્યેક 5 થી મોટો હોય અને જેમનો સરવાળો 23 થી ઓછો હોય તેવી ક્રમિક યુગ્મ ધન પૂર્ણાંકોની જોડ મેળવો.

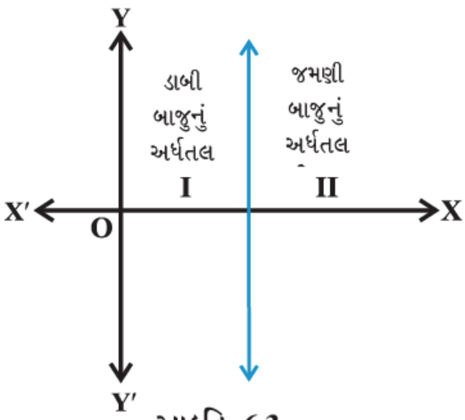
25. ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુની લંબાઈ તેની સૌથી નાની બાજુની લંબાઈ કરતા ત્રણ ગણી છે. આ સિવાયની ત્રીજી બાજુ સૌથી મોટી બાજુથી 2 સેમી નાની છે. ત્રિકોણની પરિમિતિ ઓછામાં ઓછી 61સેમી હોય તો સૌથી નાની બાજુની ન્યૂનતમ લંબાઈ શોધો.

26. એક વ્યક્તિ 91 સેમી લાંબા એક પાટિયાના ત્રણ ટુકડા કરવા માગે છે. બીજા ટુકડાની લંબાઈ સૌથી નાના ટુકડાની લંબાઈ કરતા 3 સેમી વધુ છે અને ત્રીજા ટુકડાની લંબાઇ સૌથી નાના ટુકડાની લંબાઈથી બમણી છે. જો ત્રીજા ટુકડાની લંબાઈ બીજા ટુકડાની લંબાઈથી ઓછામાં ઓછી 5 સેમી વધુ હોય, તો સૌથી નાના ટુકડાની શક્ય લંબાઈ શોધો.

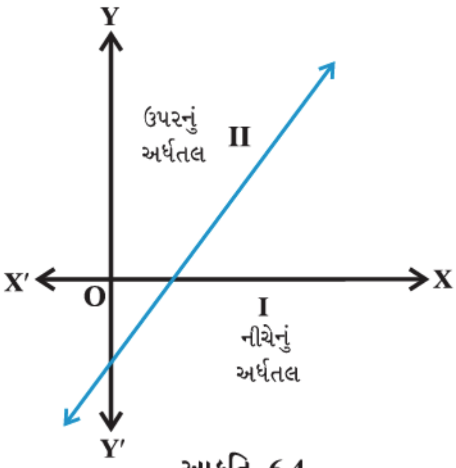
[**સૂચન** : જો સૌથી નાના ટૂકડાની લંબાઈ x હોય તો $(x + 3)$ અને $2x$ અનુક્રમે બીજા અને ત્રીજા ટૂકડાની લંબાઈ છે. આ રીતે $x + (x + 3) + 2x \le 91$ અને $2x \ge (x + 3) + 5$].

6.4 બે ચલમાં સુરેખ અસમતાનો આલેખ પરથી ઉકેલ

અગાઉના વિભાગમાં આપણે એક ચલ અસમતાનો આલેખ જોયો. તે દશ્યમાન રજૂઆત છે અને અસમતાના ઉકેલને રજૂ કરવાની એક અનુકૂળ રીત છે. હવે, આપણે બે ચલમાં સુરેખ અસમતાના આલેખ વિશે ચર્ચા કરીશું.



આકૃતિ 6.3



આકૃતિ 6.4

આપણે જાણીએ છીએ કે કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં રેખા દ્વારા યામ-સમતલનું બે ભાગમાં વિભાજન છે. પ્રત્યેક ભાગને *અર્ધતલ* કહે છે. શિરોલંબ રેખા દ્વારા યામ-સમતલનું ડાબું અર્ધતલ અને જમણું અર્ધતલ એમ બે અર્ધતલોમાં વિભાજન થાય છે અને શિરોલંબ ન હોય તેની રેખા દ્વારા યામ-સમતલનું ઉપરના અને નીચેના અર્ધતલોમાં વિભાજન થાય છે. (આકૃતિ 6.3. અને 6.4.)

હવે યામ-સમતલમાં આવેલ કોઈપણ બિંદુ કાં તો રેખા પર હશે અથવા અર્ધતલ I અથવા II માં હશે. હવે, આપણે ચકાસીશું કે સમતલમાં આપેલ બિંદુને અસમતા $ax + by < c$ અથવા $ax + by > c$ સાથે કોઈ સંબંધ છે કે નહિ.

હવે ધારો કે $ax + by = c, \quad a \ne 0, \quad b \ne 0$ એક રેખા છે. ... (1)

હવે અહીં કોઈપણ બિંદુ (x, y) માટે, ત્રણ શક્યતાઓ છે.

(i) $ax + by = c$ (ii) $ax + by > c$ (iii) $ax + by < c$.

અહીં સ્પષ્ટ છે કે વિકલ્પ (i)માં જે બિંદુઓ (x, y) વિકલ્પ (i) નું સમાધાન કરે તે પ્રત્યેક બિંદુ તે રેખા પરનું બિંદુ છે અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

હવે વિકલ્પ (ii) નો વિચાર કરીએ. સૌપ્રથમ ધારો કે $b > 0$ છે.

ધારો કે રેખા $ax + by = c$, $b > 0$ પર $P(\alpha,\beta)$ કોઈ પણ બિંદુ છે.

$\therefore a\alpha + b\beta = c$

હવે, અર્ધતલ II માં કોઈ બિંદુ $Q(\alpha , \gamma)$ લો. (આકૃતિ 6.5).

આકૃતિ પરથી દેખીતું જ છે કે,

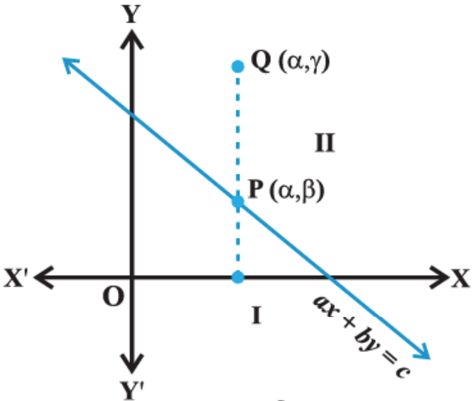
$\gamma > \beta$ (કેમ ?)

અથવા $b\gamma > b\beta$ અથવા $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (કેમ ?)

અથવા $a\alpha + b\gamma > c$

આમ, $Q(\alpha, \gamma)$ અસમતા $ax + by > c$ નું સમાધાન કરે છે.

આમ, $ax + by = c$ ના ઉપરના અર્ધતલ II માં આવેલું પ્રત્યેક બિંદુ $ax + by > c$ નું સમાધાન કરશે.



આકૃતિ 6.5

આથી ઊલટું, ધારો કે $P(\alpha, \beta)$ એ રેખા $ax + by = c$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે અને $Q(\alpha, \gamma)$ બિંદુ $ax + by > c$ નું સમાધાન કરે છે.

તો $a\alpha + b\gamma > c$

$\therefore$ $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (કેમ ?)

$\therefore$ $\gamma > \beta$ $(\because b > 0)$

આમ, બિંદુ $Q(\alpha, \gamma)$ અર્ધતલ II માં આવેલ છે.

આમ અર્ધતલ II ના પ્રત્યેક બિંદુ માટે $ax + by > c$, અને આથી ઊલટું $ax + by > c$ નું સમાધાન કરતું પ્રત્યેક બિંદુ અર્ધતલ II માં આવેલ છે.

$b < 0$, માટે પણ ઉપર જેવી જ ચર્ચા થઈ શકે અને સાબિત કરી શકાય કે પ્રત્યેક બિંદુ કે જે $ax + by > c$ નું સમાધાન કરે તે અર્ધતલ I માં આવેલ છે અને આથી ઊલટું પણ સત્ય છે.

આમ આ પરથી તારણ નીકળે છે કે $ax + by > c$ નું સમાધાન કરે તેવું પ્રત્યેક બિંદુ $b>0$ કે $b<0$ અનુસાર અર્ધતલ II કે I માંથી કોઈ એક અર્ધતલમાં હોય છે અને ઊલટું પણ સત્ય છે.

અસમતા $ax + by > c$ નો આલેખ બેમાંથી એક અર્ધતલ થશે. (તેને *ઉકેલ પ્રદેશ* કહેવાય) અને તેને સમતલમાં રંગીન પ્રદેશ તરીકે દર્શાવાય છે.

નોંધ : (1) જેમાં અસમતાનો સંપૂર્ણ ઉકેલ સમાયેલો હોય તેવા પ્રદેશને ***અસમતાનો ઉકેલ પ્રદેશ*** કહે છે.

(2) કોઈ અસમતાનો ઉકેલ પ્રદેશ ઓળખવા માટે તે રેખાના કોઈપણ એક અર્ધતલનું બિંદુ (a, b) લો. (જે રેખા પર ન હોય) અને તે બિંદુ તે અસમતાનું સમાધાન કરે છે કે નહિ તે ચકાસો. હવે જો તે બિંદુ અસમતાનું સમાધાન કરે તો તે બિંદુ જે અર્ધતલમાં છે તે અર્ધતલ ઉકેલ પ્રદેશ છે અને તે અર્ધતલ રંગીન કરો. નહિ તો તે બિંદુને ન સમાવતો અર્ધતલ અસમતાનો ઉકેલ પ્રદેશ થાય. સુવિધા માટે બિંદુ $(0, 0)$ ને પ્રાથમિકતા આપવામાં આવે છે.

(3) જો અસમતા $ax + by \geq c$ અથવા $ax + by \leq c$ પ્રકારની હોય, તો ઉકેલમાં રેખા $ax + by = c$ નાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે અને તે દર્શાવવા માટે આપણે ઘાટી રેખા દોરીએ છીએ.

(4) જો અસમતા $ax + by > c$ અથવા $ax + by < c$, પ્રકારની હોય, તો ઉકેલમાં રેખા $ax + by = c$ નાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી અને આ દર્શાવવા માટે આપણે તૂટક રેખા દોરીએ છીએ.

વિભાગ 6.2 માં આપણે બે ચલો x અને y માં નીચેની સુરેખ અસમતા મેળવી હતી.

$$40x + 20y \leq 120 \quad \text{... (1)}$$

આપણે રેશમા દ્વારા રજિસ્ટર અને પેનને ખરીદવા સંબંધી કૂટપ્રશ્નને ગાણિતિક સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી આ અસમતા પ્રાપ્ત કરી હતી.

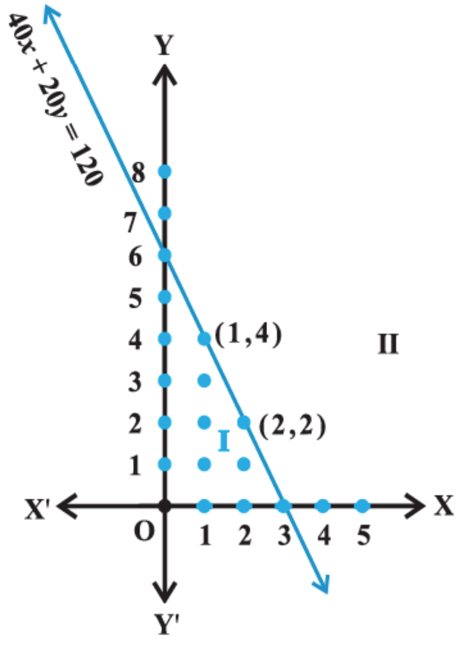
હવે આ અસમતાનો ઉકેલ માત્ર પૂર્ણ સંખ્યા જ હોય તે બાબત ધ્યાનમાં રાખી મેળવીશું, કારણ કે વસ્તુઓની સંખ્યા અપૂર્ણાંક કે ઋણ ન હોઈ શકે આ કિસ્સામાં આપણે x અને y ની કિંમતો વિધાન (1) સત્ય બને તે રીતે મેળવીશું. વાસ્તવમાં આવી ક્રમયુક્ત જોડનો ગણ એ અસમતા (1)નો *ઉકેલ ગણ* છે.

હવે, $x = 0$ લઈ શરૂઆત કરીએ તો સમીકરણ (1)ની ડાબી બાજુ,

$$40x + 20y = 40\,(0) + 20y = 20y.$$

$$\therefore\ 20y \leq 120 \text{ અથવા } y \leq 6 \quad \text{... (2)}$$

$x = 0$, માટે y ને સંગત માત્ર 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 મળે. તો આ સ્થિતિમાં (1) ના ઉકેલો (0, 0), (0, 1), (0,2), (0,3), (0,4), (0, 5) અને (0, 6) છે.



આકૃતિ 6.6

તે જ રીતે, જ્યારે $x = 1, 2$ અને 3 હોય તો (1) ના ઉકેલો (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0) છે. તે આકૃતિ 6.6 માં દર્શાવ્યા છે.

હવે આપણે x અને y ના પ્રદેશને પૂર્ણ સંખ્યાઓથી વિસ્તારી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ કરીએ અને જોઈએ કે આ સ્થિતિમાં અસમતા (1) ના ઉકેલ શું થશે.

તમે જોશો કે ઉકેલ મેળવવાની આલેખની રીત આ પરિસ્થિતિમાં વધુ સુવિધાજનક છે. આ હેતુ માટે આપણે (1) ને સંગત સમીકરણ

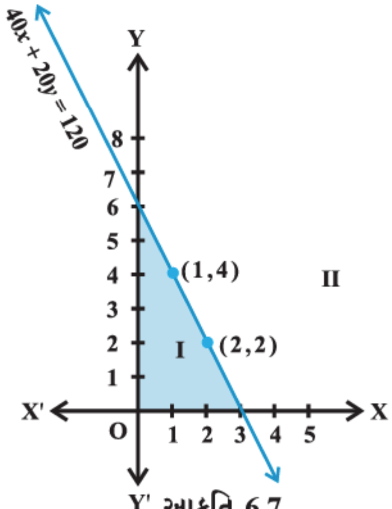
$$40x + 20y = 120 \quad \text{... (3)}$$

લઈશું અને તેનો આલેખ દોરીશું.

આ આલેખ એક રેખા છે. તે યામ-સમતલનું અર્ધતલ I અને અર્ધતલ II માં વિભાજન કરે છે.

અસમતા I નો આલેખ દોરવા માટે આપણે અર્ધતલ I માં એક બિંદુ (0, 0), લઈએ અને ચકાસીએ કે x અને y ની કિંમતો અસમતાનું સમાધાન કરે છે કે નહિ.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $x = 0$, $y = 0$ અસમતાનું સમાધાન કરે છે. આ પરથી આપણે કહી શકીએ કે અસમતાનો આલેખ અર્ધતલ I છે.(આકૃતિ 6.7) વળી, રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ પણ અસમતા (1) નું સમાધાન કરે છે. આથી રેખા પણ આલેખનો એક ભાગ છે.



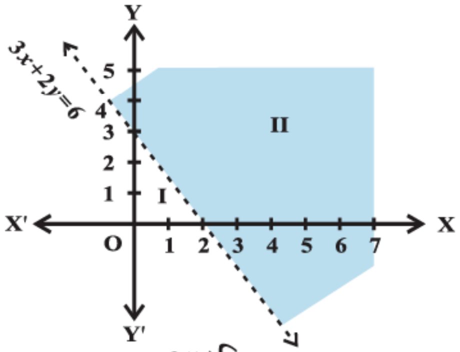
આકૃતિ 6.7

આમ, આપેલ અસમતાનો આલેખ રેખા સહિત અર્ધતલ I છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે અર્ધતલ II આલેખનો ભાગ નથી. આમ, અસમતા (I)નો *ઉકેલ* આ આલેખનાં તમામ બિંદુઓ છે. (રેખાના સમાવેશ સહિત અર્ધતલ I)

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોની મદદથી બે ચલની સુરેખ અસમતાનો ઉકેલ મેળવવાની ઉપર દર્શાવેલ રીત સમજીએ.

ઉદાહરણ 9 : $3x + 2y > 6$ નો ઉકેલ આલેખ દ્વારા દર્શાવો.

ઉકેલ : $3x + 2y = 6$નો આલેખ તૂટક રેખા દ્વારા આકૃતિ 6.8 માં દર્શાવેલ છે. આ રેખા xy સમતલને બે અર્ધતલો I અને II માં વિભાજિત કરે છે. હવે આપણે એક બિંદુ (જે રેખા પર નથી) (0, 0) પસંદ કરીએ. તે અર્ધતલ I માં આવેલ છે (આકૃતિ 6.8). હવે આપણે ચકાસીએ કે આ બિંદુ અસમતાનું સમાધાન કરે છે કે નહિ. (0, 0) એ ઉકેલ નથી કારણ કે



આકૃતિ 6.8

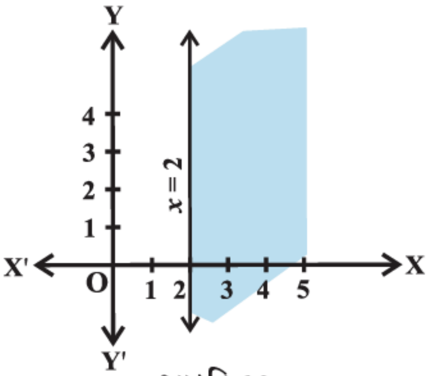
$$3(0) + 2(0) > 6$$

અથવા $0 > 6$, સત્ય નથી. આથી, અર્ધતલ I આપેલ અસમતાનો ઉકેલ નથી. સ્પષ્ટ છે કે રેખા પર આપેલ કોઇ પણ બિંદુ ચુસ્ત અસમતાનું સમાધાન કરતું નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો રંગીન અર્ધતલ II ઉકેલ પ્રદેશ દર્શાવે છે. તેમાં રેખા પરનાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી.

ઉદાહરણ 10 : દ્વિ-પરિમાણીય યામ-સમતલમાં $3x - 6 \geq 0$ નો ઉકેલ આલેખ દ્વારા દર્શાવો.

ઉકેલ : $3x - 6 = 0$ નો આલેખ આકૃતિ 6.9 માં દર્શાવેલ છે.

હવે આપણે એક બિંદુ (0, 0)ને પસંદ કરી તેને અસમતામાં મૂકતાં, આપણને $3(0) - 6 \geq 0$ અથવા $-6 \geq 0$ મળશે, જે સત્ય નથી. આથી ઉકેલ પ્રદેશ રેખા $x = 2$ ના(0, 0)ને ન સમાવતો રેખાની જમણી બાજુનો રંગીન પ્રદેશ છે. આલેખ રેખાને સમાવે છે.



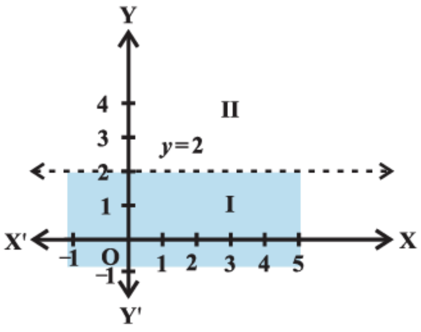
આકૃતિ 6.9

ઉદાહરણ 11 : $y < 2$ નો ઉકેલ આલેખ દ્વારા મેળવો.

ઉકેલ: રેખા $y = 2$ નો આલેખ આકૃતિ 6.10 માં દર્શાવેલ છે.

આપણે રેખાની નીચેના અર્ધતલ I માં એક બિંદુ (0, 0) પસંદ કરીએ. $y = 0$ને આપેલ અસમતામાં મૂકતાં, આપણને $1 \times 0 < 2$ અથવા $0 < 2$ મળે, જે સત્ય છે.

આથી, ઉકેલ પ્રદેશ રેખા $y = 2$ ની નીચેનો રંગીન પ્રદેશ છે, આમ રેખાની નીચેનું પ્રત્યેક બિંદુ (રેખા પરનાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી.) આપેલ અસમતાનો ઉકેલ પ્રદેશ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 6.10

સ્વાધ્યાય 6.2

નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ ગણ આલેખ પર દ્વિ-પરિમાણીય યામ-સમતલમાં મેળવો :

1. $x + y < 5$ **2.** $2x + y \geq 6$ **3.** $3x + 4y \leq 12$ **4.** $y + 8 \geq 2x$

5. $x - y \leq 2$ **6.** $2x - 3y > 6$ **7.** $-3x + 2y \geq -6$ **8.** $3y - 5x < 30$

9. $y < -2$ **10.** $x > -3$.

6.5 બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ

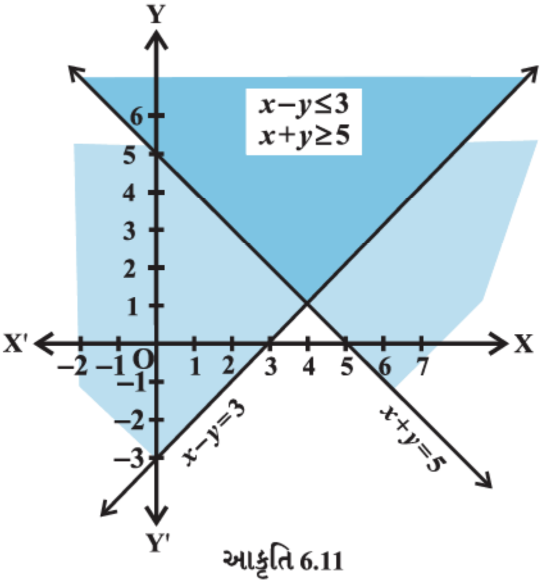
આગળના વિભાગમાં આપણે આલેખ દ્વારા બે ચલ રાશિઓની સુરેખ અસમતાઓનો ઉકેલ મેળવવાની રીત શીખી ગયા છીએ. હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા આલેખ દ્વારા બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવવો તે સમજીએ.

ઉદાહરણ 12 : નીચેની સુરેખ અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ આલેખ દ્વારા મેળવો.

$x + y \geq 5$ ... (1)

$x - y \leq 3$ ... (2)

ઉકેલ : સુરેખ સમીકરણ $x + y = 5$ નો આલેખ આકૃતિ 6.11 માં દર્શાવેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અસમતાનો ઉકેલ, રેખા $x + y = 5$ની ઉપરનું અર્ધતલ છે. આ પ્રદેશને રંગીન કરીએ. તેમાં રેખા પરનાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે. હવે આ જ અક્ષો માટે $x - y = 3$ નો આલેખ દોરીએ. તે આકૃતિ 6.11 માં દર્શાવેલ છે. હવે અસમતા (2)નો ઉકેલ રેખા $x - y = 3$ ની ઉપરનો રંગીન પ્રદેશ છે. તેમાં રેખા પરનાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે.



આકૃતિ 6.11

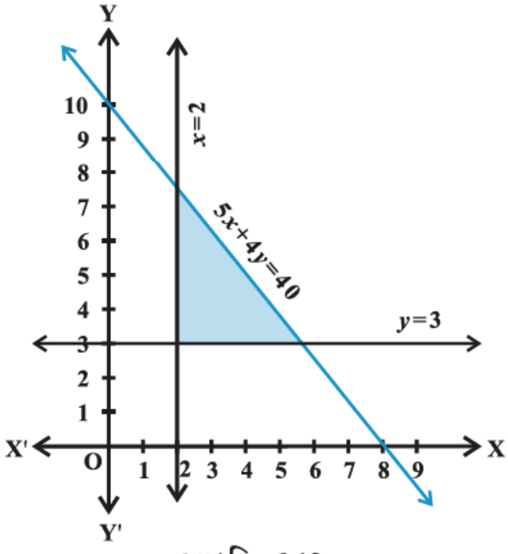
અહીં સ્પષ્ટ છે કે બંને અસમતાઓના ઉકેલના રંગીન પ્રદેશથી બનતો હોય તેવા સામાન્ય રંગીન પ્રદેશને આપેલ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ પ્રદેશ કહે છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચેની સુરેખ અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ આલેખ દ્વારા મેળવો.

$5x + 4y \leq 40$ ... (1)

$x \geq 2$ ... (2)

$y \geq 3$ ... (3)



આકૃતિ 6.12

ઉકેલ : સૌપ્રથમ સમીકરણો $5x + 4y = 40$, $x = 2$ અને $y = 3$ દ્વારા દર્શાવતી રેખાઓના આલેખ દોરીએ. હવે આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અસમતા (1)નો ઉકેલ પ્રદેશ રેખા $5x + 4y = 40$ ની નીચેનો

રંગીન ભાગ છે. અસમતા (2)નો ઉકેલ રેખા $x = 2$ ની જમણી બાજુનો રંગીન પ્રદેશ અને અસમતા (3) નો ઉકેલ રેખા $y = 3$ ની ઉપરનો રંગીન ભાગ છે. આમ, આ રેખાઓ પરનાં બિંદુઓ અને રંગીન ભાગ આપણી અસમતાઓનો ઉકેલ દર્શાવે છે. (આકૃતિ 6.12)

ઘણીબધી વ્યવહારિક પરિસ્થિતિમાં આવતી અસમતાઓમાંના ચલ x અને y ની કિંમતો અનૃણ હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ઉત્પાદિત એકમો, ખરીદવામાં આવેલી વસ્તુઓ, કામના કલાકો વગેરે. દેખીતી રીતે આવા કિસ્સાઓમાં $x \geq 0, y \geq 0$ હોય છે અને તેથી તેમનો ઉકેલ પ્રથમ ચરણમાં જ મળે છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલ મેળવો.

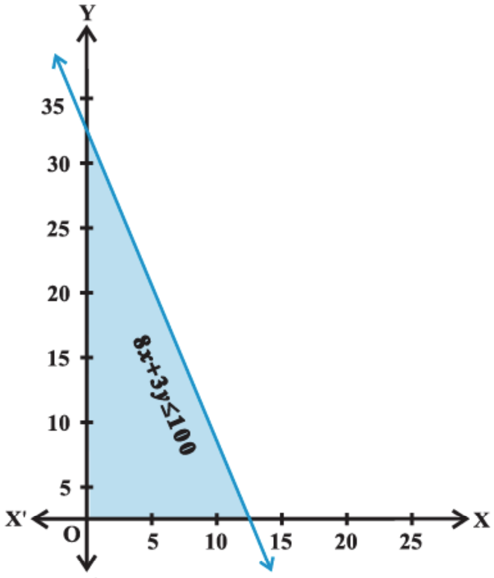
$8x + 3y \leq 100$ ... (1)

$x \geq 0$ ... (2)

$y \geq 0$ ... (3)

ઉકેલ : આપણે રેખા $8x + 3y = 100$ નો આલેખ દોરીએ. અસમતા $8x + 3y \leq 100$ નો ઉકેલ રેખાની નીચેનો રંગીન ભાગ છે, જેમાં, રેખા $8x + 3y = 100$ પરનાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે. (આકૃતિ 6.13).

વળી, $x \geq 0, y \geq 0$, છે. તેથી, રંગીન પ્રદેશનું પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રત્યેક બિંદુ તથા રેખા અને અક્ષો પરનાં તમામ બિંદુઓ આપેલ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 6.13

ઉદાહરણ 15 : નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલ આલેખ દ્વારા મેળવો.

$x + 2y \leq 8$ ... (1)

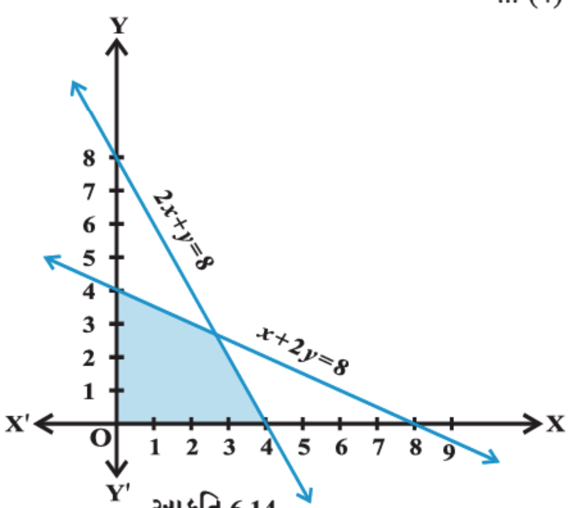
$2x + y \leq 8$ ... (2)

$x \geq 0$ ... (3)

$y \geq 0$ ... (4)

ઉકેલ : આપણે રેખાઓ $x + 2y = 8$ અને $2x + y = 8$ નો આલેખ દોરીએ. અસમતાઓ (1) અને (2)એ રેખાઓની નીચેનો રંગીન ભાગ દર્શાવે છે. તેમાં રેખાઓ પરનાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે.

વળી, $x \geq 0$ અને $y \geq 0$ છે. તેથી પ્રથમ ચરણમાં અને અક્ષો ઉપર રંગીન પ્રદેશમાં આવેલ પ્રત્યેક બિંદુ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ દર્શાવશે. (આકૃતિ 6.14).



આકૃતિ 6.14

સ્વાધ્યાય 6.3

નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલ પ્રદેશ આલેખ પરથી મેળવો :

1. $x \geq 3, y \geq 2$

2. $3x + 2y \leq 12,\ x \geq 1, y \geq 2$

3. $2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12$

4. $x + y \geq 4,\ 2x - y < 0$

5. $2x - y > 1, x - 2y < -1$

6. $x + y \leq 6,\ x + y \geq 4$

7. $2x + y \geq 8,\ x + 2y \geq 10$

8. $x + y \leq 9,\ y > x,\ x \geq 0$

9. $5x + 4y \leq 20,\ \ x \geq 1, y \geq 2$

10. $3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \geq 0,\ y \geq 0$

11. $2x + y \geq 4,\ x + y \leq 3,\ 2x - 3y \leq 6$

12. $x - 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12,\ x \geq 0, y \geq 1$

13. $4x + 3y \leq 60, y \geq 2x,\ x \geq 3,\ \ x, y \geq 0$

14. $3x + 2y \leq 150, x + 4y \leq 80,\ x \leq 15,\ y \geq 0, x \geq 0$

15. $x + 2y \leq 10, x + y \geq 1, x - y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 16 : ઉકેલો : $-8 \leq 5x - 3 < 7$

ઉકેલ : અહીં, આપણી પાસે બે અસમતાઓ $-8 \leq 5x - 3$ અને $5x - 3 < 7$, છે. તેમને આપણે એક સાથે ઉકેલવી છે.

$$-8 \leq 5x - 3 < 7$$

અથવા $-5 \leq 5x < 10$

અથવા $-1 \leq x < 2$

ઉદાહરણ 17 : $-5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8.$

ઉકેલ : $-5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8$

$\therefore\ -10 \leq 5 - 3x \leq 16$ અથવા $-15 \leq -3x \leq 11$

$\therefore\ 5 \geq x \geq -\dfrac{11}{3}$

આને $\dfrac{-11}{3} \leq x \leq 5$ રીતે પણ લખી શકાય.

ઉદાહરણ 18 : નીચેની અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ મેળવો અને ઉકેલને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

$$3x - 7 < 5 + x \quad \text{... (1)}$$

$$11 - 5x \leq 1 \quad \text{... (2)}$$

ઉકેલ : અસમતા (1) પરથી

$3x - 7 < 5 + x$

અથવા $x < 6$ મળે. ...(3)

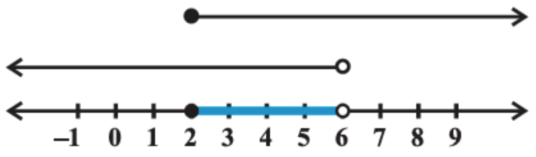
અસમતા (2) પરથી

$11 - 5x \leq 1$

અથવા $-5x \leq -10$

અથવા $x \geq 2$ મળે. ... (4)

હવે સંખ્યારેખા પર અસમતા (3) અને (4) ના આલેખ દોરીએ. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે x ની જે કિંમતો બંને અસમતાઓમાં સમાન છે, તેને ઘટ્ટ રેખા દ્વારા આકૃતિ 6.15 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.15

આમ, સંહતિનો ઉકેલ 2 અથવા 2 થી મોટી અને 6 થી નાની એવી તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x નો ગણ છે.

આમ, $2 \leq x < 6$.

ઉદાહરણ 19 : એક પ્રયોગમાં હાઇડ્રોક્લોરિક ઍસિડના દ્રાવણનું ઉષ્ણતામાન 30° અને 35° સેલ્સિયસ વચ્ચે રાખવાનું છે. જો સેલ્સિયસ તથા ફેરનહીટ વચ્ચે રૂપાંતર સૂત્ર $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ હોય, તો ફેરનહીટમાં ઉષ્ણતામાનનો વિસ્તાર શું છે ? C અને F અનુક્રમે ઉષ્ણતામાન ડિગ્રી સેલ્સિયસ અને ડિગ્રી ફેરનહીટ દર્શાવે છે.

ઉકેલ : અહીં, $30 < C < 35$ આપેલ છે.

જ્યાં $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, મૂકતાં

$30 < \frac{5}{9}(F - 32) < 35$,

અથવા $\frac{9}{5} \times (30) < (F - 32) < \frac{9}{5} \times (35)$

અથવા $54 < (F - 32) < 63$

અથવા $86 < F < 95$.

$\therefore$ દ્રાવણનું ઉષ્ણતામાન 86° F અને 95° F ની વચ્ચે રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 20 : એક નિર્માતા પાસે 600 લિટર 12% ઍસિડનું દ્રાવણ છે, તો તેમાં કેટલાં લિટર 30% ઍસિડનું દ્રાવણ ઉમેરવાથી પરિણામી મિશ્રણમાં ઍસિડનું પ્રમાણ 15% થી વધારે પણ 18%થી ઓછું થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે x લિટર 30% ઍસિડનું દ્રાવણ ઉમેરવામાં આવે છે.

આથી કુલ મિશ્રણ $(x + 600)$ લિટર

આથી $30\ \%\ x + 600$ ના $12\ \% > (x + 600)$ ના $15\ \%$

અને $30\ \%\ x + 600$ ના $12\ \% < (x + 600)$ ના $18\ \%$

અથવા $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x + 600)$

અને $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x + 600)$

અથવા $30x + 7200 > 15x + 9000$

અને $30x + 7200 < 18x + 10800$

અથવા $15x > 1800$ અને $12x < 3600$

અથવા $x > 120$ અને $x < 300$,

આથી, $120 < x < 300$

આમ, 120 લિટરથી વધુ અને 300 લિટરથી ઓછું 30 % ઍસિડનું દ્રાવણ ઉમેરવું જોઈએ.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 6

નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ શોધો : (1 થી 6)

1. $2 \le 3x - 4 \le 5$

2. $6 \le -3(2x - 4) < 12$

3. $-3 \le 4 - \frac{7x}{2} \le 18$

4. $-15 < \frac{3(x-2)}{5} \le 0$

5. $-12 < 4 - \frac{3x}{-5} \le 2$

6. $7 \le \frac{(3x+11)}{2} \le 11$

નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ મેળવો અને તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો (7 થી 10)

7. $5x + 1 > -24,\quad 5x - 1 < 24$

8. $2(x - 1) < x + 5,\quad 3(x + 2) > 2 - x$

9. $3x - 7 > 2(x - 6),\quad 6 - x > 11 - 2x$

10. $5(2x - 7) - 3(2x + 3) \le 0,\quad 2x + 19 \le 6x + 47$

11. એક દ્રાવણનું તાપમાન 68° F અને 77° F વચ્ચે રાખવાનું છે. સેલ્સિયસ તથા ફેરનહીટ વચ્ચે રૂપાંતર સૂત્ર $F = \frac{9}{5}C + 32$ છે. સેલ્સિયસમાં તાપમાનનો વિસ્તાર શું છે ?

12. 8 % બોરિક ઍસિડના દ્રાવણને મંદ કરવા તેમાં 2 % બોરીક ઍસિડનું દ્રાવણ ઉમેરવામાં આવે છે. પરિણામે બોરિક એસિડનું મિશ્રણ 4 % થી વધુ અને 6 % થી ઓછું મળે છે. તો આપણી પાસે 640 લિટર 8 % નું દ્રાવણ હોય, તો તેમાં કેટલાં લિટર 2 % ટકા સાંદ્રતા ધરાવતું દ્રાવણ ઉમેરવું પડે ?

13. 45 % એસિડનું 1125 લિટર દ્રાવણ છે, તો પરિણામી મિશ્રણમાં 25% થી વધારે પણ 30 % થી ઓછું ઍસિડ થાય તે માટે દ્રાવણમાં કેટલું પાણી ઉમેરવું જોઈએ ?

14. વ્યક્તિનો IQ દર્શાવતું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે છે :

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

અહીં MA વ્યક્તિની માનસિક ઉંમર અને CA તેની સમયાનુક્રમિક ઉંમર છે. જો $80 \le IQ \le 140$ હોય, તો 12 વર્ષની ઉંમરના બાળકોના સમૂહની માનસિક ઉંમરનો વિસ્તાર શોધો.

સારાંશ

- બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ કે બૈજિક પદાવલીઓ વચ્ચે $<, >, \le$ અથવા $\ge$ મૂકતાં બનતા સંબંધને અસમતા કહે છે.
- એક અસમતાની બંને બાજુએ સમાન સંખ્યા ઉમેરી કે તેમાંથી બાદ કરી શકાય છે.
- અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ધન સંખ્યા વડે ગુણી (કે ભાગી) શકાય છે. પણ જ્યારે અસમતાની બંને બાજુએ સમાન ઋણ સંખ્યા વડે ગુણતાં (કે ભાગતાં) અસમતાની નિશાની ઊલટાઈ જાય છે.
- ચલ x ની જે કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે તે કિંમતોને અસમતાનો ઉકેલ કહે છે.
- $x < a$ (અથવા $x > a$) ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવવા આપણે સંખ્યા a પર એક નાનું વર્તુળ કરી તેની ડાબી (કે જમણી) બાજુની રેખાને ઘાટી કરીશું.
- $x \le a$ (અથવા $x \ge a$) ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવવા આપણે સંખ્યા a પર એક ઘટ્ટ વર્તુળ કરી તેની ડાબી (કે જમણી) બાજુની રેખાને ઘાટી કરીશું.
- જો અસમતામાં $\le$ અથવા $\ge$ સંકેત આવે તો અસમતાના ઉકેલમાં રેખા પરના બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે. જે ભાગમાં આવેલા સ્વૈરબિંદુથી અસમતાનું સમાધાન થાય તેવી સમતા દ્વારા દર્શાવતી ***ઘટ્ટ*** રેખાના ડાબી(નીચે) અથવા જમણી(ઉપર) બાજુનો ભાગ અસમતાનો ઉકેલ છે.
- જો અસમતા $<$ અથવા $>$ સંકેત આવે તો અસમતાના ઉકેલમાં રેખા પરના બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થતો નથી. જે ભાગમાં આવેલા સ્વૈરબિંદુથી અસમતાનું સમાધાન થાય તેવી સમતા દ્વારા દર્શાવતી ***તૂટક*** રેખાના ડાબી(નીચે) અથવા જમણી(ઉપર) બાજુનો ભાગ અસમતાનો ઉકેલ છે.
- અસમતાઓની સંહતિનો ઉકેલ પ્રદેશ એટલે તે સંહતિમાં આપેલ પ્રત્યેક અસમતાનું સમાધાન એકસાથે કરતો હોય એવો પ્રદેશ.