પ્રકરણ 7

ક્રમચય અને સંચય

❖*Every body of discovery is mathematical in form because there is no other guidance we can have – DARWIN*❖

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ધારો કે તમારી પાસે સંખ્યાત્મક તાળાવાળી એક પેટી છે. આ તાળાને ચાર ચક્રો લાગેલાં છે અને દરેક ચક્ર 0 થી 9 પૈકીના દસ અંકો વડે નિર્દેશિત છે. જ્યારે આ ચક્રો પુનરાવર્તન સિવાય અમુક ચોક્કસ 4 અંકોની ખાસ શ્રેણીમાં ગોઠવણી થાય ત્યારે તાળું ખૂલે છે. કોઈક કારણે તમે આ ચોક્કસ અંકોની શ્રેણી ભૂલી ગયા છો. તમને ફક્ત પ્રથમ અંક 7 છે તેટલું યાદ છે. તાળું ખોલવા બાકીના 3 અંકોની કેટલી શ્રેણી તમારે ચકાસવી પડશે ? આ પ્રશ્નનો જવાબ આપવા માટે તમે કદાચ તરત જ બાકીના 9 અંકોમાંથી 3 અંકો સાથે લઈ તમામ શક્ય ગોઠવણી તત્કાળ શરૂ કરી દેશો. પરંતુ આ રીત કંટાળાજનક હશે. કારણ કે આવી શક્ય શ્રેણીઓની સંખ્યા ઘણી મોટી હોઈ શકે. આ પ્રકરણમાં આપણે ગણતરીની કેટલીક પાયાની યુક્તિઓનો અભ્યાસ કરીશું. તેનાથી આપણે આ પ્રશ્નનો જવાબ 3 અંકોની ગોઠવણીની ખરેખર યાદી બનાવ્યા વગર આપી શકીએ. ખરું જોતાં આ યુક્તિઓ વસ્તુઓની ગોઠવણી અને પસંદગી જુદા જુદા કેટલા પ્રકારે કરી શકાય તે વાસ્તવમાં યાદી બનાવ્યા વગર નક્કી કરવામાં મદદરૂપ થાય છે. પ્રથમ પગલા તરીકે આપણે આ બધી યુક્તિઓનો અભ્યાસ કરવા માટે એક ખૂબ જ મૂળભૂત સિદ્ધાંતને ચકાસીશું.

Jacob Bernoulli
(1654-1705)

7.2 ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત

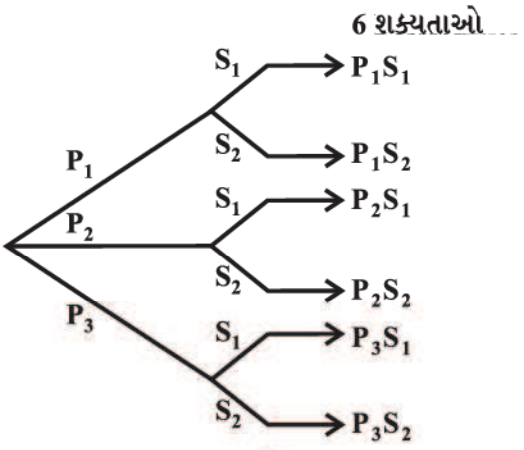
ચાલો આપણે અત્રે આપેલા પ્રશ્નનો વિચાર કરીએ. મોહન પાસે જુદી-જુદી ભાતના 3 પાટલૂન અને જુદી-જુદી ભાતના 2 ખમીસ છે. તે પાટલૂન અને ખમીસની કેટલી ભિન્ન જોડીઓ બનાવીને પોશાક પહેરી શકે ? પાટલૂનની પસંદગી 3 પ્રકારે કરી શકાય, કારણ કે 3 પાટલૂન આપેલ છે. તે જ પ્રમાણે ખમીસની પસંદગી 2 પ્રકારે કરી શકાય. દરેક પાટલૂનની પસંદગી પછી ખમીસ 2 પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. માટે પાટલૂન અને ખમીસની $3 \times 2 = 6$ જોડ થશે.

ચાલો આપણે ત્રણ પાટલૂનને P_1, P_2, P_3 અને બે ખમીસને S_1, S_2 નામ આપીએ. આકૃતિ 7.1 માં શક્યતાઓ દર્શાવેલ છે.

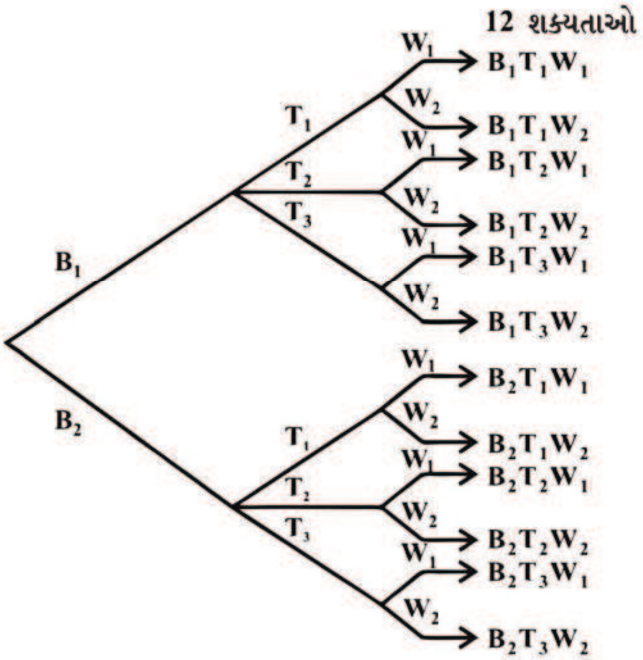
ચાલો આપણે આવા જ પ્રકારના બીજા પ્રશ્નનો વિચાર કરીએ.

શબનમ પાસે 2 દફતર, 3 નાસ્તાના ડબ્બા અને 2 પાણીની બોટલ (દરેક વસ્તુ જુદી-જુદી ભાતની) છે. આ પ્રત્યેક પૈકી એક-એક તે કેટલા પ્રકારે શાળાએ લઈ જઈ શકે?

દફતર 2 પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. દફતર પસંદ કર્યા પછી નાસ્તાનો ડબો 3 પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. આમ, દફતર અને નાસ્તાના ડબ્બાની $2 \times 3 = 6$ જોડીઓ થશે. આ દરેક જોડી માટે પાણીની બોટલ 2 જુદા જુદા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય છે. આમ, શબનમ $6 \times 2 = 12$ જુદા જુદા પ્રકારે આ બધી વસ્તુઓ શાળાએ લઈ જઈ શકે. જો આપણે 2 દફતરને B_1, B_2, ત્રણ નાસ્તાના ડબાને T_1, T_2, T_3 અને બે પાણીની બોટલને W_1, W_2, એવું નામ આપીએ તો આકૃતિ 7.2 માં આ બધી શક્યતાઓને દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ 7.1



આકૃતિ 7.2

ખરેખર, જેને *ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત* કે *ગુણાકારનો સિદ્ધાંત* તરીકે ઓળખાય છે, તેના વડે આ પ્રકારના પ્રશ્નોનો ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે. તે દર્શાવે છે કે

"જો એક ઘટના m ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્ભવે તથા તેને આનુષંગિક બીજી ઘટના n ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્ભવે તો બંને ઘટનાઓ એક સાથે ઉદ્ભવે તેના પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $m \times n$ છે."

ઉપરના સિદ્ધાંતને મર્યાદિત સંખ્યાની ઘટનાઓ માટે વિસ્તૃત કરી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે 3 ઘટનાઓ માટેનો સિદ્ધાંત નીચે પ્રમાણે છે :

"જો એક ઘટના m ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્ભવે, તેને આનુષંગિક બીજી ઘટના n ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્ભવે તથા આ બંનેને અનુરૂપ આનુષંગિક ત્રીજી ઘટના p ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્ભવે તો ત્રણેય ઘટનાઓ એક સાથે ઉદ્ભવે તેવા પ્રકારોની કુલ સંખ્યા $m \times n \times p$ છે."

પ્રથમ પ્રશ્નમાં પાટલૂન અને ખમીસ પહેરવાના માંગેલ પ્રકારો એ નીચે પ્રમાણેની ભિન્ન ઘટનાઓ એક પછી એક ઉદ્ભવે એ હતી :

(i) પાટલૂન પસંદ કરવાની ઘટના

(ii) ખમીસ પસંદ કરવાની ઘટના

બીજા પ્રશ્નમાં માંગેલ પ્રકારો એ આ પ્રમાણેની ભિન્ન ઘટનાઓ એક પછી એક ઉદ્ભવે એ હતી.

(i) દફતર પસંદ કરવાની ઘટના

(ii) નાસ્તાનો ડબો પસંદ કરવાની ઘટના

(iii) પાણીની બોટલ પસંદ કરવાની ઘટના

અહીં બંને વિકલ્પમાં દરેક પ્રશ્નમાં આપેલ ઘટનાઓ વિવિધ ક્રમમાં ઉદ્ભવે છે. પરંતુ આપણે ગમે તે એક શક્ય ક્રમ પસંદ કરવો જોઈએ અને આ ક્રમમાં ભિન્ન ઘટનાઓ કેટલા પ્રકારે ઉદ્ભવે તેની ગણતરી કરી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : ROSE શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરી 4 મૂળાક્ષરોવાળા અર્થસભર અથવા અર્થરહિત, કેટલા શબ્દો બને તે શોધો. મૂળાક્ષરોનું પુનરાવર્તન કરવાની અનુમતિ નથી.

ઉકેલ : 4 મૂળાક્ષરો વડે ચાર ખાલી સ્થાનો □ □ □ □ જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલા શબ્દો બને. આપણે ધ્યાન રાખીશું કે પુનરાવર્તન કરવાનું નથી. 4 મૂળાક્ષરો R, O, S, E માંથી ગમે તે એક મૂળાક્ષર દ્વારા પ્રથમ સ્થાન 4 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી દ્વિતીય સ્થાન બાકી રહેલ 3 મૂળાક્ષરોમાંથી ગમે તે એક દ્વારા 3 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી તૃતીય સ્થાન બાકી રહેલ 2 મૂળાક્ષરોમાંથી ગમે તે એક દ્વારા 2 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી ચતુર્થ સ્થાન 1 પ્રકારે ભરી શકાય. આમ, ગુણાકારના સિદ્ધાંત દ્વારા 4 સ્થાનોને $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ પ્રકારે ભરી શકાય. તેથી માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા 24 છે.

નોંધ જો મૂળાક્ષરોના પુનરાવર્તનની મંજૂરી હોય તો કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ? સરળતાથી સમજી શકાય છે કે 4 ખાલી સ્થાન એક પછી એક ભરવાની રીતોની સંખ્યા $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ થશે.

ઉદાહરણ 2 : ભિન્ન રંગના 4 ધ્વજ આપેલા છે. જો એકની નીચે બીજો ધ્વજ રાખીને એક સંકેત મેળવી શકાય તો આવા કેટલા ભિન્ન સંકેતો બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : ભિન્ન રંગના 4 ધ્વજમાંથી એક પછી એક ધ્વજ વડે 2 ખાલી સ્થાનો [ ] જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલા સંકેતો મળી શકે. ઉપરનું ખાલી સ્થાન 4 ભિન્ન ધ્વજ વડે 4 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી નીચેનું ખાલી સ્થાન બાકી રહેલા 3 ધ્વજમાંથી ગમે તે એક ધ્વજ વડે 3 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય. આમ, ગુણાકારના સિદ્ધાંતથી માંગેલ સંકેતોની સંખ્યા $4 \times 3 = 12$ છે.

ઉદાહરણ 3 : 1, 2, 3, 4, 5 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 2 અંકોની કેટલી યુગ્મ સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ? (અંકોનું પુનરાવર્તન કરી શકાય.)

ઉકેલ : આપેલ પાંચ અંકોના ઉપયોગથી એક પછી એક અંક વડે 2 ખાલી સ્થાનો [ ][ ] જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલી 2 અંકોની સંખ્યા મળે. અહીં આ પ્રશ્નમાં આપણે એકમનું સ્થાન પૂરવાથી શરૂઆત કરીશું, કારણ કે આ સ્થાન માટે ફક્ત અંકો 2 અને 4 જ વિકલ્પ તરીકે પ્રાપ્ય છે. તે સ્થાન 2 પ્રકારે ભરી શકાય. ત્યાર પછી દશકનું સ્થાન આપેલ 5 અંકોમાંથી 5 ભિન્ન પ્રકારે ભરી શકાય, કારણ કે અંકોનું પુનરાવર્તન કરી શકાય છે. આમ, ગુણાકારના સિદ્ધાંતથી માંગેલ બે અંકોની યુગ્મ સંખ્યાઓ 2×5 એટલે કે 10 થશે.

ઉદાહરણ 4 : એક હારમાં ઊભા કરેલા શિરોલંબ ધ્વજસ્તંભ પર ભિન્ન રંગના પાંચ ધ્વજ દ્વારા કેટલા સંકેત બનાવી શકાય ? દરેક સંકેતમાં ભિન્ન રંગના બે અથવા બેથી વધુ ધ્વજ (એકની નીચે બીજો) હોઈ શકે.

ઉકેલ : કોઈ પણ સંકેત 2 ધ્વજ, 3 ધ્વજ, 4 ધ્વજ કે 5 ધ્વજનો હોઈ શકે. હવે આપણે 2 ધ્વજ, 3 ધ્વજ, 4 ધ્વજ કે 5 ધ્વજ ધરાવતા શક્ય તમામ સંકેતોની અલગથી ગણતરી કરીશું અને પછી દરેકનો સરવાળો કરીશું.

આપેલ 5 ધ્વજમાંથી એક પછી એક 2 ખાલી સ્થાનો [ ] જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલા બે ધ્વજ ધરાવતા સંકેતો મળે. ગુણાકારના સિદ્ધાંત વડે તે $5 \times 4 = 20$ પ્રકારે મળે.

તે જ રીતે 5 ધ્વજ વડે 3 ખાલી સ્થાનો [ ] જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલા 3 ધ્વજ ધરાવતા સંકેતો મળે. તે $5 \times 4 \times 3 = 60$ પ્રકારે મળે.

એ જ રીતે આગળ વધતાં આપણે શોધી શકીએ કે,

4 ધ્વજ ધરાવતા સંકેતોની સંખ્યા $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

અને 5 ધ્વજ ધરાવતા સંકેતોની સંખ્યા $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

માંગેલ સંકેતોની સંખ્યા $20 + 60 + 120 + 120 = 320$.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચેની શરતો અનુસાર 1, 2, 3, 4 અને 5 અંકોનો ઉપયોગ કરી 3 અંકોની કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય?

(i) અંકોનું પુનરાવર્તન કરવાની અનુમતિ છે.

(ii) અંકોનું પુનરાવર્તન કરવાની અનુમતિ નથી.

2. જો અંકોનું પુનરાવર્તન કરી શકાય તો 1, 2, 3, 4, 5, 6 અંકો વડે 3 અંકોની કેટલી યુગ્મ સંખ્યાઓ બને ?

3. પુનરાવર્તન સિવાય અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના પ્રથમ 10 અક્ષરોના ઉપયોગથી 4 અક્ષરોવાળા કેટલા સંકેત બનાવી શકાય ?

4. 0 થી 9 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 5 અંકોવાળા કેટલા ટેલિફોન નંબર બનાવી શકાય ? દરેક નંબરની શરૂઆત સંખ્યા 67 થી થાય છે તથા અંકોનું પુનરાવર્તન થતું નથી.

5. એક સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને પરિણામ નોંધવામાં આવે છે. કેટલાં શક્ય પરિણામો હશે ?

6. ભિન્ન રંગોના 5 ધ્વજ આપેલ છે. એકની નીચે બીજો એવા 2 ધ્વજથી બનતા કેટલા સંકેત બનાવી શકાય ?

7.3 ક્રમચયો

અગાઉના વિભાગના ઉદાહરણ 1 માં આપણે ખરેખર શક્ય ભિન્ન ગોઠવણીઓની ગણતરી કરતા હતા. જેમકે ROSE, REOS, ..., વગેરે. અહીં, આ યાદીમાં દરેક ગોઠવણી બીજી ગોઠવણી કરતાં જુદી પડે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, અક્ષરોનો ક્રમ અગત્યનો છે. દરેક ગોઠવણીને ભિન્ન અક્ષરોને એક સાથે લેવાથી બનતો ક્રમચય કહે છે. હવે, જો આપણે NUMBER શબ્દના અક્ષરોથી પુનરાર્વતન કર્યા સિવાય ત્રણ અક્ષરોવાળા અર્થસભર કે અર્થરહિત શબ્દો નક્કી કરવા હોય, તો NUM,NMU, MUN, NUB, ..., વગેરે ગોઠવણીની ગણતરી આપણે કરવી પડે. અહીં, આપણે 6 ભિન્ન અક્ષરોમાંથી 3 અક્ષરો એક સાથે આવે તેવા ક્રમચયોની ગણતરી કરીએ છીએ.

માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $= 6 \times 5 \times 4 = 120$ (ગુણાકારના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી)

જો અક્ષરોના પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય તો માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $6 \times 6 \times 6 = 216$ થશે.

વ્યાખ્યા 1 : *આપેલ વસ્તુઓમાંથી અમુક અથવા બધી જ વસ્તુઓની ચોક્કસ ગોઠવણી એ ક્રમચય છે.*

નીચેના પેટા વિભાગમાં આપણે પ્રશ્નોના જવાબ ઝડપથી આપી શકીએ તે માટેનાં જરૂરી સૂત્રો મેળવીશું.

7.3.1 જ્યારે ભિન્ન વસ્તુ આપેલી હોય ત્યારે ક્રમચયો

પ્રમેય 1 : *n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી આપેલી r વસ્તુઓ, $0 < r \le n$ એક સાથે લેવાથી (વસ્તુઓનું પુનરાવર્તન નથી.) મળતાં ક્રમચયોની સંખ્યા $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ થાય તથા તેને સંકેતમાં ^nP_r થી દર્શાવાય છે.*

સાબિતી : n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r ખાલી સ્થાનો □ □ □ ... □ જેટલા પ્રકારે ભરી શકાય તેટલી ક્રમચયોની

$\leftarrow$ r ખાલી સ્થાનો $\rightarrow$

સંખ્યા થશે. પ્રથમ સ્થાન n પ્રકારે ભરી શકાય, ત્યાર પછી દ્વિતીય સ્થાન $(n-1)$ પ્રકારે ભરી શકાય, ત્યારે પછી તૃતીય સ્થાન $(n-2)$ પ્રકારે ભરી શકાય ..., ત્યાર પછી r મું સ્થાન $(n-(r-1))$ પ્રકારે ભરી શકાય. આમ, r ખાલી સ્થાનો એક પછી એક ભરવાના પ્રકારની કુલ સંખ્યા

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$ અથવા $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ થાય.

પદાવલિ ^nP_r ની આ અભિવ્યક્તિ કષ્ટદાયક છે, માટે આપણે પદાવલિની લંબાઈ ઘટાડવામાં મદદરૂપ થઈ શકે એવા સંકેતની જરૂર છે. આ માટે સંકેત $n!$ (ક્રમગુણિત n અથવા n ક્રમગુણિત વંચાય છે) આપણી મદદે આવે છે. આગળની સમજૂતીમાં આપણે $n!$ ખરેખર શું છે તે સમજીશું.

7.3.2 ક્રમગુણિતનો સંકેત :

સંકેત n ! એ પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર દર્શાવે છે, એટલે કે

ગુણાકાર $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ ને સંકેત $n!$. વડે દર્શાવાય છે. આપણે આ સંકેતને '*n factorial*' તરીકે વાંચીશું.

આમ, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times (n-1) \times n = n\,!$

$$1 = 1\,!$$

$$1 \times 2 = 2\,!$$

$$1 \times 2 \times 3 = 3\,!$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4\,!$$

આ જ રીતે આગળ વધી શકાય.

આપણે $5\,! = 5 \times 4\,! = 5 \times 4 \times 3\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!$ લખી શકીએ.

સ્પષ્ટ રીતે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે

$$n\,! = n\,(n-1)\,!$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,! \qquad [(n > 2) \text{ હોય તો}]$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,! \qquad [(n > 3) \text{ હોય તો}]$$

આ જ રીતે આગળ વધી શકાય.

આપણે $0\,! = 1$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

ઉદાહરણ 5 : કિંમત શોધો (i) $5\,!$ (ii) $7\,!$ (iii) $7\,! - 5!$

ઉકેલ : (i) $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ii) $7\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

(iii) $7\,! - 5! = 5040 - 120 = 4920$

ઉદાહરણ 6 : કિંમત શોધો : (i) $\frac{7!}{5!}$ (ii) $\frac{12!}{(10!)\,(2!)}$

ઉકેલ : (i) અહીં, $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

(ii) $\frac{12!}{(10!)\,(2!)} = \frac{12 \times 11 \times (10!)}{(10!) \times (2)} = 6 \times 11 = 66$

ઉદાહરણ 7 : $n = 5$ અને $r = 2$ માટે $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપણે $\frac{5!}{2!(5-2)!}$ ની કિંમત શોધવી છે. $(n = 5, r = 2)$

અહીં, $\frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\times 3!} = \frac{4\times 5}{2} = 10$

ઉદાહરણ 8 : જો $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$ હોય, તો x ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9\times 8!} = \frac{x}{10\times 9\times 8!}$

$\therefore 1+\frac{1}{9} = \frac{x}{10\times 9}$ અથવા $\frac{10}{9} = \frac{x}{10\times 9}$

$\therefore x = 100$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. કિંમત શોધો :

(i) 8! (ii) 4! – 3!

2. 3! + 4! = 7! થશે કે નહિ તે નક્કી કરો.

3. કિંમત શોધો $\frac{8!}{6!\times 2!}$.

4. જો $\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{x}{8!}$ હોય, તો x ની કિંમત શોધો.

5. જ્યારે (i) $n = 6, r = 2$ (ii) $n = 9, r = 5$ હોય ત્યારે $\frac{n!}{(n-r)!}$ ની કિંમત શોધો.

7.3.3 ^nP_r ના સૂત્રની પ્રાપ્તિ :

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0 \le r \le n, \quad n \ne 0$$

ચાલો આપણે અગાઉના વિભાગમાં આ પ્રમાણેનું જે સૂત્ર નક્કી કર્યું હતું તે જોઈએ.

$$^nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ (n-r+1)$$

અંશ અને છેદનો $(n-r)\,(n-r-1)\ \ldots\ 3 \times 2 \times 1$, વડે ગુણાકાર કરતાં,

$$^nP_r = \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!},$$

આમ, $$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!},\ \text{જ્યાં } 0 < r \le n$$

અગાઉ કરતાં ^nP_r માટેની આ અભિવ્યક્તિ વધુ અનુકૂળ છે. વિશેષમાં જ્યારે $r = n$ હોય ત્યારે $^nP_n = \frac{n!}{0!} = n!$

ક્રમચયોની ગણતરી કરવી એ અમૂક અથવા બધી જ વસ્તુઓને કેટલા પ્રકારે એકી સાથે ગોઠવી શકાય તે છે. કોઈ પણ વસ્તુની ગોઠવણી ન કરવી એ બધી જ વસ્તુઓને જેમ છે એમ રહેવા દેવી એ છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે, તે માત્ર એક પ્રકારે જ કરી શકાય છે. આમ,

$$^nP_0 = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{(n-0)!} \qquad \dots (1)$$

આમ, સૂત્ર (1) એ $r = 0$ માટે પણ ઉપયુક્ત છે.

તેથી, $$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!},\ 0 \le r \le n,\ n \ne 0$$

પ્રમેય 2 : *n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પુનરાવર્તન સહિત એકી સાથે લેવામાં આવે, તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા n^r થશે.*

આની સાબિતી પ્રમેય 1 પ્રમાણે છે અને તેને વાંચક પર છોડી દેવામાં આવે છે.

અહીં, આપણે આગળના વિભાગના અમુક પ્રશ્નો ^nP_r ના સૂત્રની મદદથી ઉકેલીશું કે જેથી તેની ઉપયોગિતા જોઈ શકાય.

ઉદાહરણ 1 માં માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $= {}^4P_4 = 4! = 24$. અહીં, પુનરાવર્તનની અનુમતિ નથી. જો પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય, તો માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $4^4 = 256$.

NUMBER શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરી બનતા ત્રણ અક્ષરોવાળા શબ્દોની સંખ્યા $= {}^6P_3 = \frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$.

અહીં, આ પ્રશ્નમાં પણ પુનરાવર્તનની અનુમતિ નથી. જો પુનરાવર્તનની અનુમતિ હોય, તો માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $6^3 = 216$ થશે.

જો આપણે ધારી લઈએ કે કોઈ એક વ્યક્તિ બે પદ ધરાવતા ન હોય તો 12 વ્યક્તિઓમાંથી એક અધ્યક્ષ અને ઉપાધ્યક્ષને

$^{12}P_2 = \frac{12!}{10!} = 11 \times 12 = 132$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

7.3.4 જ્યારે બધી વસ્તુઓ ભિન્ન ન હોય ત્યારે ક્રમચયોની સંખ્યા :

ધારો કે આપણે ROOT શબ્દના મૂળાક્ષરોની પુનઃગોઠવણી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય તે શોધવું છે. આપેલ પ્રશ્નમાં શબ્દના બધા મૂળાક્ષરો ભિન્ન નથી. અહીં O બે વખત આવે છે અને તે સમાન છે. ચાલો હંગામી રીતે બે O ને આપણે ભિન્ન માનીએ અને O_1 અને O_2 વડે દર્શાવીએ. આ કિસ્સામાં બધા જ મૂળાક્ષરોને એક સાથે લેતાં 4 મૂળાક્ષરોથી બનતા ક્રમચયોની સંખ્યા 4! થશે. આ પૈકી એક ક્રમચય RO_1O_2T નો વિચાર કરીએ. જો આપણે O_1 અને O_2 ને ભિન્ન ન માનીએ તો આ ક્રમચયને અનુરૂપ 2 ! ક્રમચયો RO_1O_2T અને RO_2O_1T એ સમાન ક્રમચયો થશે. એટલે કે O_1 અને O_2 બંને સ્થાન પર O હોય.

$\therefore$ માંગેલ ક્રમચયોની સંખ્યા $= \frac{4!}{2!} = 3 \times 4 = 12$

જ્યારે O_1, O_2 ભિન્ન હોય ત્યારે ક્રમચયો		જ્યારે O_1, O_2 એ O તરીકે હોય ત્યારે ક્રમચયો
RO_1O_2T, RO_2O_1T	→	R O O T
TO_1O_2R, TO_2O_1R	→	T O O R
RO_1TO_2, RO_2TO_1	→	R O T O
TO_1RO_2, TO_2RO_1	→	T O R O
RTO_1O_2, RTO_2O_1	→	R T O O
TRO_1O_2, TRO_2O_1	→	T R O O
O_1O_2RT, O_2O_1TR	→	O O R T
O_1RO_2T, O_2RO_1T	→	O R O T
O_1TO_2R, O_2TO_1R	→	O T O R
O_1RTO_2, O_2RTO_1	→	O R T O
O_1TRO_2, O_2TRO_1	→	O T R O
O_1O_2TR, O_2O_1TR	→	O O T R

ચાલો આપણે INSTITUTE શબ્દના મૂળાક્ષરોની પુનઃગોઠવણી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય તે શોધીએ. અહીં, 9 મૂળાક્ષરો છે તેમાં I બે વખત અને T ત્રણ વખત આવે છે.

હંગામી રીતે આપણે આ મૂળાક્ષરોને ભિન્ન છે તેમ માનીએ અને તેમને I_1, I_2, T_1, T_2, T_3 વડે દર્શાવીએ. 9 ભિન્ન મૂળાક્ષરોને એકી સાથે લેતા મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા 9! થાય. આ પૈકી એક ક્રમચય $I_1\ NT_1\ SI_2\ T_2\ U\ E\ T_3$ નો વિચાર કરીએ. અહીં, જો I_1, I_2 ને સમાન ન ગણીએ અને T_1, T_2, T_3 ને સમાન ન ગણીએ તો I_1, I_2 ની 2! પ્રકારે ગોઠવણી થઈ શકે તથા T_1, T_2, T_3 ને 3! પ્રકારે ગોઠવી શકાય. માટે પસંદ કરેલા ક્રમચય $I_1NT_1SI_2T_2UET_3$ ને સાપેક્ષ $2! \times 3!$ ક્રમચયો સમાન થશે. આથી કુલ ભિન્ન ક્રમચયોની સંખ્યા $\frac{9!}{2!\,3!}$ થશે.

નીચે પ્રમાણેના પ્રમેયો આપણે સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારીશું :

પ્રમેય 3 : *આપેલ n વસ્તુઓમાંથી p સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ હોય અને બાકીની ભિન્ન હોય, તો ક્રમચયોની સંખ્યા* $= \dfrac{n!}{p!}$.

ખરેખર, વ્યાપક સ્વરૂપમાં આ પ્રમેય નીચે મુજબ છે :

પ્રમેય 4 : *જો આપેલી n વસ્તુઓમાંથી p_1 એક પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે, p_2 બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે ..., p_k એ k માં પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે અને બાકીની વસ્તુઓ ભિન્ન છે (જો હોય તો). તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા* $\dfrac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_k!}$.

ઉદાહરણ 9 : ALLAHABAD શબ્દનાં મૂળાક્ષરોથી બનતા ક્રમચયોની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : અહીં, 9 મૂળાક્ષરો છે, તેમાંથી A 4 વખત આવે છે L 2 વખત આવે છે અને બાકીના મૂળાક્ષર ભિન્ન છે.

માંગેલ ગોઠવણીની સંખ્યા $= \dfrac{9!}{4!2!} = \dfrac{5\times6\times7\times8\times9}{2} = 7560$

ઉદાહરણ 10 : 1 થી 9 અંકોનો ઉપયોગ કરી પુનરાવર્તન સિવાય 4 અંકોવાળી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : અહીં, અંકોનો ક્રમ મહત્ત્વનો છે, જેમકે 1234 અને 1324 એ ભિન્ન સંખ્યાઓ થશે. માટે 9 ભિન્ન અંકોમાંથી 4 અંકો લઈને જેટલા ક્રમચયો મળે તેટલી 4 અંકોથી બનતી સંખ્યાઓ થશે.

$\therefore$ માંગેલ 4 અંકોની સંખ્યાઓ $= {}^9P_4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

ઉદાહરણ 11 : પુનરાવર્તન વગર અંકો 0, 1, 2, 3, 4, 5 નો ઉપયોગ કરીને 100 થી 1000 ની વચ્ચે આવેલી કેટલી સંખ્યાઓ મળે?

ઉકેલ : 100 થી 1000 વચ્ચે આવેલ દરેક સંખ્યાઓ 3 અંકોવાળી હોય છે. પ્રથમ આપણે 6 અંકોમાંથી 3 અંકો એક સાથે લેવાથી મળતા ક્રમચયોની સંખ્યાની ગણતરી કરીશું. તે ${}^6P_3$ થશે. પરંતુ આ ક્રમચયોમાં એવી સંખ્યાઓનો પણ સમાવેશ થશે જેના શતકના સ્થાને 0 હોય. જેમકે 092, 042, ... વગેરે. તે ખરેખર 2 અંકોવાળી સંખ્યા થાય અને તેથી આવી સંખ્યાઓને ${}^6P_3$ સંખ્યાઓમાંથી બાદ કરવી જોઈએ. આવી સંખ્યાઓ મેળવવા માટે આપણે શતકના સ્થાને 0 સ્થિત કરી દઈએ અને બાકીના 5 અંકોમાંથી 2 અંકો એક સાથે લઈ પુનઃગોઠવણી કરીએ. આવી સંખ્યાઓની સંખ્યા ${}^5P_2$.

$\therefore$ માંગેલ સંખ્યાઓ $= {}^6P_3 - {}^5P_2$

$$= \frac{6!}{3!} - \frac{5!}{3!}$$

$$= 4 \times 5 \times 6 - 4 \times 5$$

$$= 100$$

ઉદાહરણ 12 : નીચેનામાં n ની કિંમત શોધો :

(i) ${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3,\ n > 4$ (ii) $\dfrac{{}^nP_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3},\ n > 4$

ઉકેલ : (i) અહીં, $^nP_5 = 42\ ^nP_3$

અથવા $n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4) = 42\ n(n-1)\ (n-2)$

$n > 4$ હોવાથી $n(n-1)\ (n-2) \neq 0$

માટે, બંને બાજુ $n(n-1)\ (n-2)$ વડે ભાગતાં,

$(n-3)\ (n-4) = 42$

$\therefore\ n^2 - 7n - 30 = 0$

$\therefore\ n^2 - 10n + 3n - 30 = 0$

$\therefore\ (n-10)\ (n+3) = 0$

$\therefore\ n - 10 = 0$ અથવા $n + 3 = 0$

$\therefore\ n = 10$ અથવા $n = -3$

n ની કિંમત ઋણ ન હોઈ શકે. આથી $n = 10$.

(ii) અહીં, $\dfrac{^nP_4}{^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3}$

$3n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3) = 5(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)$

$\therefore 3n = 5\ (n-4)$ $[(n-1)\ (n-2)\ (n-3) \neq 0,\ n > 4]$

$\therefore n = 10$

ઉદાહરણ 13 : જો $5\ ^4P_r = 6\ ^5P_{r-1}$ હોય તો r શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $5\ ^4P_r = 6\ ^5P_{r-1}$

$$\therefore\quad 5\times\frac{4!}{(4-r)!} = 6\times\frac{5!}{(5-r+1)!}$$

$$\therefore\quad \frac{5!}{(4-r)!} = \frac{6\times5!}{(5-r+1)\,(5-r)(5-r-1)!}$$

$\therefore\ (6-r)\ (5-r) = 6$

$\therefore\ r^2 - 11r + 24 = 0$

$\therefore\ r^2 - 8r - 3r + 24 = 0$

$\therefore\ (r-8)\ (r-3) = 0$

$\therefore\ r = 8$ અથવા $r = 3$, પરંતુ $r = 8$ શક્ય નથી. $(r \leq 4)$

$\therefore\ r = 3$.

ઉદાહરણ 14 : જો (i) બધા જ સ્વર એક સાથે આવે (ii) બધા જ સ્વર એક સાથે ન આવે, તો DAUGHTER શબ્દના અક્ષરો વડે 8 અક્ષરોની ગોઠવણી કેટલા ભિન્ન પ્રકારે થઇ શકે ?

ઉકેલ : (i) DAUGHTER શબ્દમાં 8 મૂળાક્ષરો છે, જ્યાં A, U અને E એમ 3 સ્વરો છે. બધા જ સ્વર એક સાથે લેવા માટે આપણે AUE ને એક જ વસ્તુ છે તેમ ધારી લઈશું. આ એક વસ્તુ તથા બાકી રહેતા 5 બીજા અક્ષરો (વસ્તુઓ) ને 6 વસ્તુઓ છે તેમ ગણીશું. પછી આપણે 6 વસ્તુઓમાંથી બધી જ વસ્તુઓ એક સાથે લેવાથી મળતા પ્રત્યેક ક્રમચયને અનુરૂપ આપણને

A, U, E એક સાથે લેવાથી મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા 3! થાય.

આથી, ગુણાકારના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી માંગેલ ક્રમચયોની સંખ્યા = 6 ! × 3 ! = 4320.

(ii) આપણે જો બધા જ સ્વર એક સાથે ન આવે એવા ક્રમચયની ગણતરી કરવાની હોય તો પ્રથમ આપણે 8 અક્ષરોને એક સાથે લેવાથી મળતી શક્ય ગોઠવણીના પ્રકાર શોધવા પડે. તે 8! પ્રકારે થઈ શકે. પછી આપણે જ્યાં સ્વર હમેશાં એક સાથે આવે એવા ક્રમચયોની સંખ્યાની બાદબાકી કરવી જોઈએ.

આમ, માંગેલ સંખ્યા $8\,! - 6\,! \times 3\,! = 6\,!\,(7\times8\ -\ 6)$

$= 2 \times 6\,!\,(28 - 3)$

$= 50 \times 6\,! = 50 \times 720 = 36{,}000$

ઉદાહરણ 15 : 4 લાલ, 3 પીળી અને 2 લીલી ગોળાકાર તકતીઓને કેટલા પ્રકારે હારમાં ગોઠવી શકાય ? (સરખા રંગની તકતી સ્પષ્ટપણે જુદી પાડી શકાતી નથી.)

ઉકેલ : ગોળાકાર તકતીઓની કુલ સંખ્યા 4 + 3 + 2 = 9. આ 9 તકતીમાંથી 4 એક પ્રકારની છે (લાલ), 3 બીજા પ્રકારની છે (પીળી) અને 2 ત્રીજા પ્રકારની છે (લીલી)

માંગેલ ગોઠવણીના પ્રકારની સંખ્યા $= \dfrac{9!}{4!\,3!\ 2!} = 1260$

ઉદાહરણ 16 : INDEPENDENCE શબ્દના મૂળાક્ષરોની કેટલા પ્રકારે ગોઠવણી કરી શકાય ? આ ગોઠવણીઓમાંથી કેટલા શબ્દો

(i) P થી શરૂ થાય છે ?

(ii) બધા સ્વરો એક સાથે આવે ?

(iii) બધા સ્વરો એક સાથે ન આવે ?

(iv) I થી શરૂ થાય અને P માં અંત પામે ?

ઉકેલ : આપેલ શબ્દમાં કુલ 12 મૂળાક્ષરો છે. તેમાં N એ 3 વખત આવે છે. E એ 4 વખત આવે છે અને D એ 2 વખત આવે છે તથા બાકીના મૂળાક્ષરો ભિન્ન છે.

$\therefore$ માંગેલ ગોઠવણીની સંખ્યા $= \dfrac{12!}{3!\,4!\ 2!} = 1663200$

(i) મૂળાક્ષર P ને ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાને નિયત કરીએ. હવે આપણે બાકી રહેતા 11 અક્ષરોની ગોઠવણીની ગણતરી કરીએ.

$\therefore$ P થી શરૂ થતા માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $= \dfrac{11!}{3!\,2!\,4!} = 138600$

(ii) આપેલ શબ્દમાં 5 સ્વર છે. તેમાં 4 E તથા 1 I છે. તેઓ એક સાથે આવતા હોવાથી હંગામી ધોરણે આપણે $\boxed{\text{EEEEI}}$ ને એક વસ્તુ તરીકે ગણીએ. આ એક વસ્તુ અને બાકી રહેતી 7 વસ્તુઓ (અક્ષરો) મળીને 8 વસ્તુઓ થશે. ત્રણ N અને બે D ની ગોઠવણી સાથે આ 8 વસ્તુઓની ગોઠવણી $\dfrac{8!}{3!\,2!}$ પ્રકારે કરી શકાય. દરેક ગોઠવણીને અનુરૂપ 5 સ્વરો E, E, E, E અને I ની ગોઠવણી $\dfrac{5!}{4!}$ પ્રકારે કરી શકાય.

આથી, ગુણાકારના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને માંગેલ ગોઠવણીના પ્રકાર $= \dfrac{8!}{3!\,2!} \times \dfrac{5!}{4!} = 16800$

(iii) માંગેલ ગોઠવણીની સંખ્યા = ગોઠવણીની કુલ સંખ્યા (કોઈ શરત વગર) – બધા સ્વરો સાથે આવે તેવી ગોઠવણીની સંખ્યા

$$= 1663200 - 16800 = 1646400$$

(iv) મૂળાક્ષરો I અને P બંનેને અંતિમ સ્થાનમાં સ્થિત કરીએ (I ને ડાબી બાજુ તથા P ને જમણી બાજુ) આપણી પાસે બાકી 10 અક્ષરો રહે છે.

$\therefore$ માંગેલ ગોઠવણીના પ્રકાર $= \dfrac{10!}{3!\,2!\,4!} = 12600$

સ્વાધ્યાય 7.3

1. 1 થી 9 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 3 અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ? (અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય)

2. અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય 4 અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બને ?

3. 1, 2, 3, 4, 6, 7 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 3 અંકોની કેટલી યુગ્મ સંખ્યાઓ બને ? (અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય)

4. 1, 2, 3, 4, 5 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 4 અંકોની કેટલી સંખ્યાઓ બને ? આમાંથી કેટલી સંખ્યાઓ યુગ્મ હોય ? (અંકોના પુનરાવર્તન સિવાય)

5. 8 વ્યક્તિઓની એક સમિતિમાંથી અધ્યક્ષ અને ઉપાધ્યક્ષ કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય ? આપણે ધારી લઈશું કે કોઈ પણ વ્યક્તિ એક કરતાં વધુ પદ સંભાળતી ન હોય.

6. જો ${}^{n-1}P_3 : {}^{n}P_4 = 1 : 9$ તો n શોધો.

7. જો (i) ${}^{5}P_r = 2\,{}^{6}P_{r-1}$ (ii) ${}^{5}P_r = {}^{6}P_{r-1}$ તો r શોધો.

8. EQUATION શબ્દના દરેક મૂળાક્ષરનો ફક્ત એક વખત ઉપયોગ કરી અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

9. MONDAY શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરી પુનરાવર્તન સિવાય અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો નીચેના વિકલ્પો અનુસાર બનાવી શકાય ?

(i) કોઈ પણ 4 મૂળાક્ષરો એક સાથે લેતાં

(ii) બધા જ મૂળાક્ષરો એક સાથે લેતાં

(iii) પ્રથમ મૂળાક્ષર સ્વર હોય તે રીતે બધા જ મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરતા

10. MISSISSIPPI શબ્દના કેટલા ભિન્ન ક્રમચયોમાં ચાર I સાથે ન આવે ?

11. PERMUTATIONS શબ્દના મૂળાક્ષરોની ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે નીચેના વિકલ્પોમાં કરી શકાય ?

(i) શબ્દો P થી શરૂ થાય અને S માં અંત પામે.

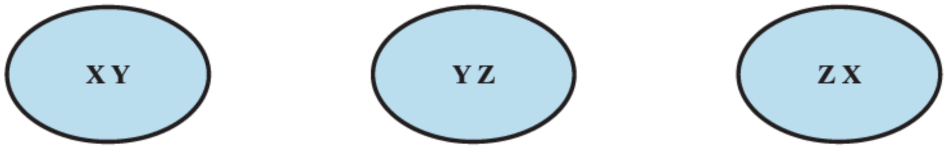
(ii) બધા સ્વરો સાથે હોય.

(iii) P અને S ની વચ્ચે હંમેશાં 4 મૂળાક્ષરો હોય.

7.4 સંચય

ધારો કે X, Y, Z એ લોન ટેનિસ રમતના 3 ખેલાડીઓનું એક જૂથ છે, 2 ખેલાડીઓ ધરાવતી એક ટુકડી બનાવવી છે. આવું આપણે કેટલા પ્રકારે કરી શકીશું ? શું X અને Y દ્વારા બનતી ટૂકડીએ Y અને X દ્વારા બનતી ટુકડીથી ભિન્ન છે ? અહીં, ક્રમનું

મહત્ત્વ નથી. ખરેખર, ફક્ત ત્રણ પ્રકારે આવી ટુકડી XY, YZ અને ZX (આકૃતિ7.3) બને. અહીં દરેક પસંદગીને 3 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી 2 વસ્તુઓ એક સાથે પસંદ કરવાનો ***સંચય*** કહે છે.



આકૃતિ 7.3

સંચયમાં ક્રમનું મહત્ત્વ નથી.

હવે આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણ જોઈએ.

12 વ્યક્તિઓ એક ઓરડામાં મળે છે અને દરેક વ્યકિત બાકીની તમામ વ્યક્તિઓ સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. કુલ કેટલી વખત હસ્તધૂનન થયા હોય તે આપણે કેવી રીતે નક્કી કરીશું ? વ્યક્તિ X એ વ્યક્તિ Y અને વ્યક્તિ Y એ વ્યક્તિ X સાથે હાથ મિલાવે તે ભિન્ન હસ્તધૂનન ગણી શકાય નહિ. અહીં ક્રમ મહત્ત્વનો નથી. 12 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી એક સાથે 2 વસ્તુઓ પસંદ કરવાથી જેટલા સંચયો મળે તેટલા હસ્તધૂનન થયા હશે.

એક વર્તુળ ઉપર સાત બિંદુઓ આવેલા છે. કોઈ પણ બે બિંદુને જોડવાથી કેટલી જીવાઓ દોરી શકાય? 7 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી એક સાથે 2 વસ્તુઓ પસંદ કરવાથી જેટલા સંચયો મળે તેટલી જીવા મળે.

હવે આપણે n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી r વસ્તુઓ એક સાથે પસંદ કરવાથી મળતા સંચયોનું સૂત્ર મેળવીશું. તેને ^nC_r વડે દર્શાવાય છે.

ધારો કે આપણી પાસે 4 ભિન્ન વસ્તુઓ A, B, C અને D છે. જો આપણે 2 ભિન્ન વસ્તુઓ એકસાથે પસંદ કરવાના સંચયો મેળવવા હોય, તો AB, AC, AD, BC, BD, CD થશે. અહીં, AB અને BA એ સમાન સંચયો થશે કારણ કે ક્રમના ફેરફારથી સંચય બદલાતો નથી. આ કારણે આપણે BA, CA, DA, CB, DB અને DC નો આ યાદીમાં સમાવેશ કર્યો નથી. 4 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી 2 વસ્તુઓ એક સમયે લેતાં 6 સંચયો મળશે એટલે કે $^4C_2 = 6$.

આ યાદીના દરેક સંચયને અનુરૂપ આપણે 2! ક્રમચય મળે કારણ કે દરેક સંચયની 2 વસ્તુઓની 2! પ્રકારે પુનઃગોઠવણી કરી શકાય. તેથી ક્રમચયોની સંખ્યા $= {^4C_2} \times 2!$.

બીજી રીતે કહીએ તો, 4 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી 2 વસ્તુઓ એક સાથે લઈએ તો, મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા $= {^4P_2}$

$$^4P_2 = {^4C_2} \times 2! \quad \text{એટલે કે} \quad \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = {^4C_2}$$

હવે, ધારો કે આપણી પાસે 5 ભિન્ન વસ્તુઓ A, B, C, D, E છે. જો આપણે 3 વસ્તુઓ એકીસાથે પસંદ કરવાના સંચયો મેળવવા હોય, તો ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, CDE, ACE, ACD, ADE, BDE થશે. આ $^5C_3$ સંચયોના દરેકને અનુરૂપ 3! ક્રમચયો મળે કારણ કે દરેક સંચયમાં રહેલ ત્રણ વસ્તુઓની પુનઃગોઠવણી 3 ! પ્રકારે કરી શકાય.

ક્રમચયોની કુલ સંખ્યા $^5C_3 \times 3!$

$$\therefore {^5P_3} = {^5C_3} \times 3! \quad \text{એટલે કે} \quad \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = {^5C_3}$$

આ ઉદાહરણો દ્વારા આપણને ક્રમચય અને સંચય વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતો પૃષ્ઠ 148 પ્રમાણેનો પ્રમેય મળે છે :

પ્રમેય 5 : ${}^n\mathrm{P}_r = {}^n\mathrm{C}_r \times r!$, $0 < r \le n.$

સાબિતી : ${}^n\mathrm{C}_r$ સંચયો પૈકી દરેક સંચયને અનુરૂપ આપણને $r!$ ક્રમચયો મળે, કારણ કે દરેક સંચયની r વસ્તુઓની $r\,!$ પ્રકારે પુનઃગોઠવણી કરી શકાય.

આથી, n ભિન્ન વસ્તુઓ પૈકી એક સાથે r વસ્તુઓ લેતાં મળતાં કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા ${}^n\mathrm{C}_r \times r!$ થશે. બીજી રીતે વિચારતાં તે ${}^n\mathrm{P}_r$ પણ થાય.

$\therefore\ {}^n\mathrm{P}_r = {}^n\mathrm{C}_r \times r!,$ $0 < r \le n\cdot$

નોંધ 1. ઉપર મુજબ $\dfrac{n!}{(n-r)!} = {}^n\mathrm{C}_r \times r!$, એટલે કે ${}^n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

વિશેષ રીતે, જો $r = n$ તો ${}^n\mathrm{C}_n = \dfrac{n!}{n!\ 0!} = 1.$

2. આપણે અહીં, ${}^n\mathrm{C}_0 = 1$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ. આપેલ n વસ્તુઓમાંથી એક પણ વસ્તુની પસંદગી નહિ તે સંચયોની સંખ્યા 1 છે તેમ ગણીશું. આ સંચયોની ગણતરી કરવી એ અમુક અથવા બધી વસ્તુઓને એક સાથે પસંદગી કરવાના પ્રકારની ગણતરી કરવી એ છે. કોઈપણ વસ્તુને પસંદ ન કરવી એ તમામ વસ્તુને નાપસંદ કરવા સમાન છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે તે આપણે ફક્ત એક જ પ્રકારે કરી શકીએ. આ રીતે આપણે ${}^n\mathrm{C}_0 = 1$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

3. $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1 = {}^n\mathrm{C}_0$ હોવાથી સૂત્ર ${}^n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ એ સૂત્ર $r = 0$ માટે પણ લાગુ પાડી શકાય.

$${}^n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \qquad 0 \le r \le n, \qquad n \ne 0$$

4. $${}^n\mathrm{C}_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^n\mathrm{C}_r,$$

એટલે કે n વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને પસંદ કરવી એ $(n-r)$ વસ્તુઓને નાપસંદ કરવા બરાબર છે.

5. ${}^n\mathrm{C}_a = {}^n\mathrm{C}_b \Rightarrow a = b$ અથવા $a = n - b$, એટલે કે, $n = a + b$

પ્રમેય 6 : $${}^n\mathrm{C}_r + {}^n\mathrm{C}_{r-1} = {}^{n+1}\mathrm{C}_r$$

સાબિતી : $${}^n\mathrm{C}_r + {}^n\mathrm{C}_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {}^{n+1}\mathrm{C}_r$$

ઉદાહરણ 17 : જો ${}^nC_9 = {}^nC_8$ તો ${}^nC_{17}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, ${}^nC_9 = {}^nC_8$

$$\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!\,8!}$$

$\therefore \frac{1}{9} = \frac{1}{n-8}$ એટલે કે, $n - 8 = 9$. આથી, $n = 17$

$\therefore {}^nC_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$

ઉદાહરણ 18 : બે પુરુષ અને ત્રણ સ્ત્રીઓના એક જૂથમાંથી 3 વ્યક્તિઓની એક સમિતિ બનાવવી છે. આવું કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ? આમાંથી કેટલી સમિતિઓમાં 1 પુરુષ અને 2 સ્ત્રીઓ હશે ?

ઉકેલ : અહીં, ક્રમના ફેરફારથી કોઈ ફરક પડતો નથી. માટે આપણે સંચયોની ગણતરી કરવી પડશે. 5 ભિન્ન વ્યક્તિઓ પૈકી એક સાથે 3 વ્યક્તિઓ પસંદ કરવાથી જેટલા સંચયો મળે તેટલી સમિતિઓ બનશે.

આથી, માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા = ${}^5C_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$.

હવે, 2 પુરુષમાંથી 1 પુરુષ ${}^2C_1$ પ્રકારે તથા 3 સ્ત્રીમાંથી 2 સ્ત્રી ${}^3C_2$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

આથી માંગેલ સમિતિની સંખ્યા = ${}^2C_1 \times {}^3C_2 = \frac{2!}{1!\,1!} \times \frac{3!}{2!\,1!} = 6$.

ઉદાહરણ 19 : 52 પત્તાંઓમાંથી 4 પત્તાં કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય ? આમાંથી કેટલા પ્રકારની પસંદગીમાં,

(i) ચાર પત્તાં એક જ ભાતનાં હોય ?

(ii) ચાર પત્તાં ચાર જુદી જુદી ભાતનાં હોય ?

(iii) ચિત્રવાળાં પત્તાં હોય ?

(iv) બે લાલ રંગનાં અને બે કાળા રંગનાં હોય ?

(v) પત્તાં સમાન રંગોવાળાં હોય ?

ઉકેલ : 52 ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી એક સમયે 4 વસ્તુઓ પસંદ કરવાના જેટલા સંચય મળે તેટલા જ સંચય 52 પત્તાંઓમાંથી 4 પત્તાં પસંદ કરવાનાં મળે.

$\therefore$ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા = ${}^{52}C_4 = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{49 \times 50 \times 51 \times 52}{2 \times 3 \times 4} = 270725$

(i) દરેક ભાતમાં 13 પત્તાં હોય છે અને ચાર ભાત હોય છેઃ ચોકટ, ફુલ્લી, કાળી, લાલ. માટે ચોકટનાં 4 પત્તાં ${}^{13}C_4$ પ્રકારે પસંદ થશે, તે જ રીતે 4 ફુલ્લીનાં પત્તાં ${}^{13}C_4$ પ્રકારે પસંદ થશે, 4 કાળીનાં પત્તાં ${}^{13}C_4$ પ્રકારે પસંદ થશે ને 4 લાલના પત્તાં ${}^{13}C_4$ પ્રકારે પસંદ થશે.

આમ, માંગેલ કુલ પ્રકારની સંખ્યા $= {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$.

$$= 4 \times \frac{13!}{4!\,9!} = 2860$$

(ii) દરેક ભાતમાં 13 પત્તાં હોય છે.

ચોકટનાં 13 પત્તાંમાંથી 1 પત્તું $^{13}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. લાલનાં 13 પત્તાંમાંથી 1 પત્તું $^{13}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. ફુલ્લીનાં 13 પત્તાંમાંથી 1 પત્તું $^{13}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. કાળીનાં 13 પત્તાંમાંથી 1 પત્તું $^{13}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

કુલ સંખ્યા $= {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13^4$

(iii) અહીં, 12 ચિત્રોવાળાં પત્તાં છે અને આ 12 પત્તાંમાંથી 4 પત્તાં પસંદ કરવાનાં છે. આ $^{12}C_4$ પ્રકારે કરી શકાય.

$\therefore$ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા $= \dfrac{12!}{4!\ 8!} = 495$

(iv) અહીં, 26 પત્તાં લાલ રંગનાં તથા 26 પત્તાં કાળા રંગનાં હોય છે.

$\therefore$ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા $= {}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$

$$= \left(\frac{26!}{2!\ 24!}\right)^2 = (325)^2 = 105625$$

(v) 26 લાલ રંગનાં પત્તાંમાંથી 4 લાલ રંગનાં પત્તાંની પસંદગી $^{26}C_4$ પ્રકારે કરી શકાય. 26 કાળા રંગનાં પત્તાંમાંથી 4 કાળા રંગનાં પત્તાંની પસંદગી $^{26}C_4$ પ્રકારે કરી શકાય.

$\therefore$ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા $= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4$

$$= 2 \times \frac{26!}{4!\ 22!} = 29900$$

સ્વાધ્યાય 7.4

1. જો $^nC_8 = {}^nC_2$ હોય, તો $^nC_2$ શોધો.

2. n ની કિંમત શોધો :

(i) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 12 : 1$ (ii) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$

3. વર્તુળ પરનાં 21 બિંદુમાંથી કેટલી જીવા દોરી શકાય ?

4. 5 કુમાર અને 4 કુમારીમાંથી 3 કુમારો અને 3 કુમારીઓની કેટલી ટુકડી બનાવી શકાય ?

5. 6 લાલ દડા, 5 સફેદ દડા અને 5 વાદળી દડામાંથી દરેક રંગના 3 દડા એમ 9 દડાની પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

6. 52 પત્તાંમાંથી 5 પત્તાંની પસંદગીમાં બરાબર એક જ એક્કો આવે તે કેટલા પ્રકારે બને ?

7. ક્રિકેટની રમતના 17 ખેલાડીઓ આવેલા છે. તે પૈકી 5 ખેલાડીઓ બોલીંગ કરી શકે છે. દરેક ટુકડીમાં 4 બોલર હોય એવી 11 ખેલાડીઓની ક્રિકેટની કેટલી ટુકડી બનાવી શકાય ?

8. એક થેલીમાં 5 કાળા અને 6 લાલ દડા છે. 2 કાળા તથા 3 લાલ દડાની પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઇ શકે ?

9. જો વિદ્યાર્થીએ 2 ચોક્કસ વિષયો પસંદ કરવાના ફરજિયાત હોય, તો વિદ્યાર્થી ઉપલબ્ધ 9 વિષયોમાંથી 5 વિષયો કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 20 : INVOLUTE શબ્દનો ઉપયોગ કરીને 3 સ્વરો અને 2 વ્યંજનો ધરાવતા અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : INVOLUTE શબ્દમાં 4 સ્વરો I, O, E, U અને 4 વ્યંજનો N, V, L અને T આવેલા છે.

4 સ્વરોમાંથી 3 સ્વરો પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $= {}^4C_3 = 4$

4 વ્યંજનોમાંથી 2 વ્યંજનો પસંદ કરવાના પ્રકારની સંખ્યા $= {}^4C_2 = 6$

3 સ્વરો અને 2 વ્યંજનોના સંચયોની સંખ્યા $4 \times 6 = 24$

હવે, આ દરેક 24 સંચયોના 5 મૂળાક્ષરોને 5 ! પ્રકારે ગોઠવી શકાય છે.

માંગેલ ભિન્ન શબ્દોની સંખ્યા $= 24 \times 5\,! = 2880$

ઉદાહરણ 21 : એક જૂથમાં 4 કુમારીઓ અને 7 કુમારો છે. જેમાં (i) કોઈ કુમારી ન હોય (ii) ઓછામાં ઓછો એક કુમાર અને એક કુમારી આવેલ હોય (iii) ઓછામાં ઓછી 3 કુમારી આવેલ હોય એવી 5 સભ્યોની કેટલી ટુકડીઓ બનાવી શકાય.

ઉકેલ : (i) ટુકડીમાં કોઈ કુમારી ન હોય તો બધા કુમારો પસંદ થાય. 7 કુમારોમાંથી 5 કુમારોની પસંદગી ${}^7C_5$ પ્રકારે થાય.

$$\therefore \text{ માંગેલ સંખ્યાના પ્રકાર } = {}^7C_5 = \frac{7!}{5!\ 2!} = \frac{6\times7}{2} = 21$$

(ii) દરેક ટુકડીમાં ઓછામાં ઓછો એક કુમાર અને એક કુમારી આવેલ હોય, તો ટુકડી નીચે પ્રમાણે બનાવી શકાય.

(a) એક કુમાર અને ચાર કુમારીઓ

(b) બે કુમારો અને ત્રણ કુમારીઓ

(c) ત્રણ કુમારો અને બે કુમારીઓ

(d) ચાર કુમારો અને એક કુમારી

એક કુમાર અને ચાર કુમારીઓ ${}^7C_1 \times {}^4C_4$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

બે કુમારો અને ત્રણ કુમારીઓ ${}^7C_2 \times {}^4C_3$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

ત્રણ કુમારો અને બે કુમારીઓ ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

ચાર કુમારો અને એક કુમારી ${}^7C_4 \times {}^4C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

$$\therefore \text{ માંગેલ પ્રકારની સંખ્યા } = {}^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^4C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1$$

$$= 7 + 84 + 210 + 140 = 441$$

(iii) દરેક ટુકડીમાં ઓછામાં ઓછી 3 કુમારીઓ હોવાથી ટુકડી આ પ્રમાણે પસંદ કરી શકાય.

(a) 3 કુમારીઓ અને 2 કુમારો અથવા (b) 4 કુમારીઓ અને 1 કુમાર.

અહીં, આપણે નોંધીએ કે ટુકડીમાં 5 કુમારીઓ ન હોય કારણ કે જૂથમાં ફક્ત 4 કુમારીઓ જ આપેલ છે.

3 કુમારીઓ અને 2 કુમારો $^4C_3 \times {^7C_2}$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

4 કુમારીઓ અને 1 કુમાર $^4C_4 \times {^7C_1}$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

$\therefore$ માંગેલ પ્રકારની કુલ સંખ્યા $= {^4C_3} \times {^7C_2} + {^4C_4} \times {^7C_1} = 84 + 7 = 91$

ઉદાહરણ 22 : AGAIN શબ્દના બધા મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય તે શોધો. જો આ શબ્દોને શબ્દકોષ પ્રમાણે લખ્યા હોય, તો 50 મા સ્થાને કયો શબ્દ આવે ?

ઉકેલ : AGAIN શબ્દમાં 5 મૂળાક્ષરો છે અને A એ બે વખત આવે છે.

માંગેલ શબ્દોની સંખ્યા $= \frac{5!}{2!} = 60$

A થી શરૂ થતા શબ્દો મેળવવા માટે આપણે A ને ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાને મૂકી બાકી રહેતા 4 મૂળાક્ષરોને એક સાથે લઈને પુનઃ ગોઠવણી કરીએ. જેટલા ક્રમચયો 4 ભિન્ન વસ્તુઓને એક સાથે લેવાથી મળે છે તેટલા જ શબ્દો 4 મૂળાક્ષરોને એક સાથે લેવાથી મળે. આથી, A થી શરૂ થતા શબ્દોની સંખ્યા $= 4! = 24$ થશે. ત્યાર બાદ G થી શરૂ થતાં શબ્દોની સંખ્યા $= \frac{4!}{2!} = 12$ બને, કારણ કે G ને શબ્દની ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાન પર સ્થિત કર્યા પછી આપણી પાસે મૂળાક્ષરો A, A, I અને N બાકી રહે છે. તે જ રીતે I થી શરૂ થતા શબ્દની સંખ્યા 12 થશે. અત્યાર સુધીમાં પ્રાપ્ત શબ્દોની સંખ્યા$= 24 + 12 + 12 = 48$.

49 મા સ્થાન પરનો શબ્દ NAAGI થશે.

50મા સ્થાન પરનો શબ્દ NAAIG થશે.

ઉદાહરણ 23 : 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 અંકોનો ઉપયોગ કરીને 1000000 થી મોટી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : 1000000 એ 7 અંકની સંખ્યા છે અને ઉપયોગમાં લેવાતા અંકોની સંખ્યા 7 અંકની જ હશે. વળી, સંખ્યાઓ 1000000 થી મોટી હોવાથી તેમની શરૂઆતના અંકો 1, 2 અથવા 4 થશે.

જો અંક 1 ને ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાનમાં નિશ્ચિત કરીએ તો બાકી રહેતા અંકો 0, 2, 2, 2, 4, 4 ની પુનઃગોઠવણી કરવી પડે. અહી, અંક 2 ત્રણ વખત આવે છે અને 4 એ બે વખત આવે છે.

1 થી શરૂ થતી સંખ્યાઓની સંખ્યા $= \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{4 \times 5 \times 6}{2} = 60$

તે જ રીતે 2 થી શરૂ થતી સંખ્યાઓની સંખ્યા $= \frac{6!}{2!\ 2!} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{2} = 180$

અને 4 થી શરૂ થતી સંખ્યાઓની સંખ્યા $= \frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$

માંગેલ સંખ્યાઓની સંખ્યા $= 60 + 180 + 120 = 360$

બીજી રીત

7 અંકોની ગોઠવણી દ્વારા મળતી કુલ સંખ્યાઓ $\frac{7!}{3!\ 2!} = 420$

જે સંખ્યાઓની ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાન પર 0 હોય તેવી સંખ્યાઓનો સમાવેશ પણ આમાં થાય છે.

આવી ગોઠવણી દ્વારા મળતી સંખ્યાઓ $\frac{6!}{3!\ 2!}$ (ડાબી બાજુના પ્રથમ સ્થાન પર 0 નિશ્ચિત કરતાં) = 60.

માંગેલ સંખ્યાઓની સંખ્યા = 420 – 60 = 360

નોંધ આપણી યાદીમાં એક અથવા એક કરતાં વધુ અંકો સંખ્યામાં જેટલી વખત આવે તેટલી વખત ઉપયોગમાં લઈ શકાય. ઉદાહરણ તરીકે ઉપરના ઉદાહરણમાં 1 અને 0 ફક્ત એક વખત ઉપયોગમાં લઈ શકાય જ્યારે 2 અને 4 એ અનુક્રમે 3 વખત અને 2 વખત ઉપયોગમાં લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 24 : કોઈ બે કુમારો સાથે ન હોય, તો 5 કુમારીઓ અને 3 કુમારોને હારમાં કેટલા પ્રકારે બેસાડી શકાય ?

ઉકેલ : પ્રથમ આપણે 5 કુમારીઓને ગોઠવીએ. તે કાર્ય 5 ! પ્રકારે કરી શકાય છે. ત્રણ કુમારોને એ પ્રત્યેક ગોઠવણી સંગત ચોકડીની નિશાનીવાળી જગ્યાએ બેસાડી શકાય.

$$\times\ G \times G \times G \times G \times G \times$$

અહીં, 6 ચોકડીની નિશાની છે એમાં ત્રણ કુમારોને ${}^6P_3$ પ્રકારે બેસાડી શકાય.

ગુણાકારના નિયમથી કુલ ગોઠવણીના પ્રકારની સંખ્યા $= 5! \times {}^6P_3$

$$= 5! \times \frac{6!}{3!}$$

$$= 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

$$= 14400$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 7

1. DAUGHTER શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને 2 સ્વરો અને 3 વ્યંજનો દ્વારા અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?
2. EQUATION શબ્દના બધા મૂળાક્ષરોનો એક સમયે ઉપયોગ કરીને સ્વરો અને વ્યંજનો એક જ સાથે આવે તે રીતે અર્થસભર કે અર્થરહિત કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?
3. 9 કુમારો અને 4 કુમારીઓમાંથી 7 સભ્યોની સમિતિ બનાવવી છે. જેમાં (i) બરાબર 3 કુમારીઓ હોય (ii) ઓછામાં ઓછી 3 કુમારીઓ હોય (iii) વધુમાં વધુ 3 કુમારીઓ હોય એવી કેટલી સમિતિની રચના થઈ શકે ?
4. EXAMINATION શબ્દના તમામ ભિન્ન ક્રમચયોને જો શબ્દકોષ પ્રમાણે ગોઠવી યાદી બનાવવામાં આવે તો પ્રથમ શબ્દ E થી શરૂ થાય તે શબ્દ પહેલા કેટલા શબ્દો હશે ?
5. અંકો 0, 1, 3, 5, 7 અને 9 ના ઉપયોગથી પુનરાવર્તન વગર 6 અંકોની 10 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ બને ?
6. અંગ્રેજી વર્ણમાળામાં 5 સ્વરો અને 21 વ્યંજનો છે. મૂળાક્ષરોમાંથી 2 ભિન્ન સ્વરો અને 2 ભિન્ન વ્યંજનો દ્વારા કેટલા શબ્દો બનાવી શકાય ?
7. એક પરીક્ષામાં 12 પ્રશ્નો ધરાવતું પ્રશ્નપત્ર બે ભાગમાં વહેંચાયેલું છે. ભાગ I માં 5 પ્રશ્નો અને ભાગ II માં 7 પ્રશ્નો

આવેલા છે. દરેક ભાગમાંથી ઓછામાં ઓછા 3 પ્રશ્નો પસંદ કરીને વિદ્યાર્થીએ કુલ 8 પ્રશ્નોના જવાબનો પ્રયત્ન કરવો જરૂરી છે. વિદ્યાર્થી કુલ કેટલા પ્રકારે પ્રશ્નો પસંદ કરી શકશે ?

8. 52 પત્તાંમાંથી 5 પત્તાંની પસંદગીમાં બરાબર એક બાદશાહ આવે તે કેટલા પ્રકારે નક્કી કરી શકાય ?

9. 5 પુરુષો અને 4 સ્ત્રીઓને હારમાં એવી રીતે ગોઠવવાં છે કે સ્ત્રીઓ યુગ્મ સ્થાન પર હોય. આવી કેટલી ગોઠવણી શક્ય બને ?

10. 25 વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં 10 વિદ્યાર્થીઓને પર્યટન પર લઈ જવા માટે પસંદ કરવાના છે. ત્રણ વિદ્યાર્થીઓએ એવું નક્કી કર્યું કે કાં તો એ ત્રણેય પર્યટન પર જશે અથવા ત્રણેયમાંથી કોઈ નહિ જાય. પર્યટન પર લઈ જવા માટે વિદ્યાર્થીઓને કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય ?

11. તમામ S સાથે આવે તે રીતે ASSASSINATION શબ્દના મૂળાક્ષરોની ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

સારાંશ

◆ ગણતરીનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત : જો કોઈ ઘટના m ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્‌ભવે તથા તેને આનુષંગિક બીજી ઘટના n ભિન્ન પ્રકારે ઉદ્‌ભવે તો બંને ઘટનાઓ આપેલ ક્રમમાં ઉદ્‌ભવે તે પ્રકારોની સંખ્યા $m \times n$ છે.

◆ n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને એક સાથે પુનરાવર્તન વગર લેવાથી મળતા ક્રમચયોની સંખ્યાને ${}^nP_r$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે

અને ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, જ્યાં $0 \le r \le n, \quad n \ne 0$

◆ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

◆ $n! = n \times (n-1)\,!$

◆ n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને એક સાથે પુનરાવર્તન સહિત લેવાથી મળતા ક્રમચયોની સંખ્યાને n^r વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

◆ જો આપેલી n વસ્તુઓમાંથી p_1 એક પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે, p_2 બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે, ... p_k એ k પ્રકારની સમસ્વરૂપ વસ્તુઓ છે અને બાકીની વસ્તુઓ ભિન્ન છે(જો હોય, તો) તો મળતા ક્રમચયોની સંખ્યા$=\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots\,p_k!}$

◆ n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને એક સાથે લેવાથી મળતા સંચયોની સંખ્યાને ${}^nC_r$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને

${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$ છે, $n \ne 0$

Historical Note

The concepts of permutations and combinations can be traced back to the advent of Jainism in India and perhaps even earlier. The credit, however, goes to the Jains who treated its subject matter as a self-contained topic in mathematics, under the name *Vikalpa*.

Among the Jains, *Mahavira*, (around 850) is perhaps the world's first mathematician credited with providing the general formulae for permutations and combinations.

In the 6th century B.C., *Sushruta,* in his medicinal work, *Sushruta Samhita*, asserts that 63 combinations can be made out of 6 different tastes, taken one at a time, two at a time, etc. *Pingala*, a

Sanskrit scholar around third century B.C., gives the method of determining the number of combinations of a given number of letters, taken one at a time, two at a time, etc. in his work *Chhanda Sutra*. *Bhaskaracharya* (born 1114) treated the subject matter of permutations and combinations under the name *Anka Pasha* in his famous work *Lilavati.* In addition to the general formulae for ${}^nC_r$ and ${}^nP_r$ already provided by *Mahavira, Bhaskaracharya* gives several important theorems and results concerning the subject.

Outside India, the subject matter of permutations and combinations had its humble beginnings in China in the famous book I–King (Book of changes). It is difficult to give the approximate time of this work, since in 213 B.C., the emperor had ordered all books and manuscripts in the country to be burnt which fortunately was not completely carried out. Greeks and later Latin writers also did some scattered work on the theory of permutations and combinations.

Some Arabic and Hebrew writers used the concepts of permutations and combinations in studying astronomy. *Rabbi ben Ezra,* for instance, determined the number of combinations of known planets taken two at a time, three at a time and so on. This was around 1140. It appears that *Rabbi ben Ezra* did not know the formula for ${}^nC_r$. However, he was aware that ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ for specific values n and r. In 1321, *Levi Ben Gerson*, another Hebrew writer came up with the formulae for ${}^nP_r$, ${}^nP_n$ *and the general formula for* ${}^nC_r$.

The first book which gives a complete treatment of the subject matter of permutations and combinations is *Ars Conjectandi* written by a Swiss, *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705), posthumously published in 1713. This book contains essentially the theory of permutations and combinations as is known today.