પ્રકરણ 8

દ્વિપદી પ્રમેય

❖ ***Mathematics is a most exact science and its conclusions are capable of absolute proofs. – C. P. STEINMETZ*** ❖

8.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળના વર્ગોમાં, આપણે $a + b$ અને $a - b$ જેવી દ્વિપદીઓના વર્ગ અને ઘન કેવી રીતે શોધવા તે વિશે અભ્યાસ કર્યો. આપણે તેનો ઉપયોગ કરીને $(98)^2 = (100 - 2)^2$, $(999)^3 = (1000 - 1)^3$ વગેરે જેવી સંખ્યાઓની સંખ્યાત્મક કિંમતોનું મૂલ્યાંકન કરી શક્યા. જોકે, $(98)^5$, $(101)^6$ વગેરે જેવી ઊંચી ઘાતવાળી સંખ્યાઓની ગણતરી પુનરાવર્તિત ગુણાકાર કરી મેળવવી મુશ્કેલ છે. આ મુશ્કેલીનું નિવારણ દ્વિપદી પ્રમેય તરીકે ઓળખાતા પ્રમેયથી થઈ ગયું છે. જો n એ પૂર્ણાંક અથવા સંમેય સંખ્યા હોય તો તે $(a + b)^n$નું વિસ્તરણ કરવાનો સરળ માર્ગ આપે છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર ધન પૂર્ણાંક ઘાતાંક માટે જ દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

Blaise Pascal
(1623-1662)

8.2 ધન પૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટેનું દ્વિપદી પ્રમેય

પૃષ્ઠ 157 ઉપર આગળ આવી ગયેલા કેટલાક નિત્યસમો ઉપર આપણે એક નજર નાખીએ.

$(a+b)^0 = 1$ $\qquad a + b \neq 0$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = (a+b)^3\,(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

આ વિસ્તરણોમાં, આપણે અવલોકન કરીએ કે,

(i) વિસ્તરણનાં પદોની કુલ સંખ્યા $(a+b)$ના ઘાતાંક કરતા એક વધારે છે. ઉદાહરણ તરીકે $(a+b)^2$માં ઘાતાંક 2 હોવાથી પદોની સંખ્યા 3 છે.

(ii) ક્રમાનુસાર પદોમાં પ્રથમ સંખ્યા 'a' નો ઘાતાંક ક્રમિક રીતે 1 ઘટે છે જ્યારે બીજી સંખ્યા 'b' નો ઘાતાંક ક્રમિક રીતે 1 વધે છે.

(iii) વિસ્તરણના દરેક પદમાં a અને b ના ઘાતાંકનો સરવાળો સમાન થાય છે અને તે $a + b$ ના ઘાતાંકને સમાન છે.

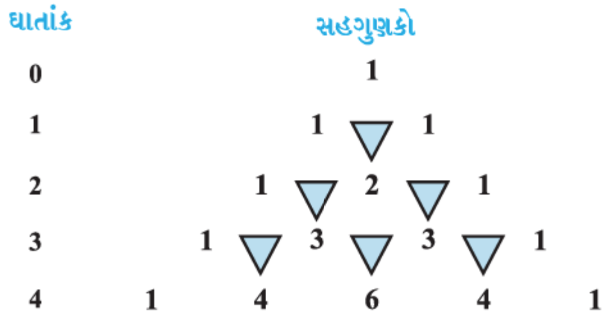
હવે આપણે આ વિસ્તરણના સહગુણકોને નીચે પ્રમાણે ગોઠવીએ (આકૃતિ 8.1) :

ઘાતાંક										સહગુણકો
0					**1**					
1				**1**		**1**				
2			**1**		**2**		**1**			
3		**1**		**3**		**3**		**1**		
4	**1**		**4**		**6**		**4**		**1**	

આકૃતિ 8.1

ઉપરના ટેબલમાં આપણે એવી તરાહનું નિરીક્ષણ કરી શકીશું કે જે પછીની હાર લખવામાં આપણને મદદરૂપ થાય? હા, આપણે લખી શકીએ. એ જોવા મળે છે કે એક ઘાતાંકવાળી હારના બંને 1 નો સરવાળો, બે ઘાતાંકવાળી હાર માટે 2 આપે છે. બે ઘાતાંકવાળી હારના 1, 2 અને 2, 1 નો સરવાળો ત્રણ ઘાતાંકવાળી હાર માટે 3 અને 3 આપે છે અને આ પ્રમાણે આગળ વધીશું. દરેક હારની પ્રારંભમાં અને અંતમાં 1 ની હાજરી તો છે જ. આ ક્રિયાને આપણે ઇચ્છિત ઘાતાંક સુધી આગળ લઈ જઈ શકીએ.

આકૃતિ 8.2 માં આપેલી તરાહને આગળ વધારીને બીજી કેટલીક હાર લખીએ.



આકૃતિ 8.2

પાસ્કલનો ત્રિકોણ

આકૃતિ 8.2 માં આપેલ ઢાંચો ત્રિકોણ સ્વરૂપમાં છે તેમ જોઈ શકાય છે. ત્યાં નીચેની તરફ આગળ વધતી બે તિર્યક

બાજુઓ પર અને ટોચનાં શિરોબિંદુઓ 1 છે. સંખ્યાઓની આ ગોઠવણીને ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી *Blaise Pascal* ના નામ પરથી ***Pascal નો ત્રિકોણ*** કહે છે. તેને ગણિતશાસ્ત્રી *પિંગલા "મેરુ પ્રાસ્ત્ર (Meru Prastara)"* તરીકે ઓળખાવે છે.

ઉચ્ચ કક્ષાવાળી ઘાતનું દ્વિપદી વિસ્તરણ પણ પાસ્કલના ત્રિકોણના ઉપયોગથી શક્ય છે. ચાલો, આપણે $(2x + 3y)^5$ નું પાસ્કલના ત્રિકોણના ઉપયોગથી વિસ્તરણ કરીએ. 5 ઘાતાંક માટેની હાર

1 5 10 10 5 1 થશે.

આ હાર અને આપણાં અવલોકનો (i), (ii) અને (iii) ના ઉપયોગથી,

$$(2x + 3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 (3y) + 10(2x)^3 (3y)^2 + 10 (2x)^2 (3y)^3 + 5(2x) (3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5.$$

હવે, જો આપણે $(2x + 3y)^{12}$ નું વિસ્તરણ શોધવું હોય, તો પ્રથમ 12 ઘાતવાળી હારની જરૂર પડશે. આ માટે 12 ઘાતાંક સુધીની પાસ્કલના ત્રિકોણની બધી જ હાર લખવી પડશે. આ થોડી લાંબી પ્રક્રિયા છે. આપણે હજુ વધારે મોટી ઘાતનો સમાવેશ કરીને વિસ્તરણ કરવા માટે નિરીક્ષણ કર્યા પ્રમાણે આ પ્રક્રિયા વધારે મુશ્કેલ બનશે.

હવે, પાસ્કલના ત્રિકોણની બધી જ હાર લખ્યા સિવાય કોઈપણ દ્વિપદીના ઘાતનું વિસ્તરણ કરવા માટે મદદરૂપ થાય અને જે આપણને જરૂરી ઘાતવાળી હારના પહેલાની બધી જ હાર લખ્યા સિવાય મળે તેવો નિયમ શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ. પાસ્કલના ત્રિકોણની સંખ્યાઓ ફરીથી લખવા માટે, આપણે આગળ શીખી ગયેલ સંચયની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$ અને n એ અનૃણ પૂર્ણાંક છે. વળી $^nC_0 = 1 = {^nC_n}$

પાસ્કલના ત્રિકોણને પુનઃ નીચે પ્રમાણે લખીશું (આકૃતિ 8.3) :

ઘાતાંક	સહગુણકો
0	1
1	$^1C_0$ (=1) $^1C_1$ (=1)
2	$^2C_0$ (=1) $^2C_1$ (=2) $^2C_2$ (=1)
3	$^3C_0$ (=1) $^3C_1$ (=3) $^3C_2$ (=3) $^3C_3$ (=1)
4	$^4C_0$ (=1) $^4C_1$ (=4) $^4C_2$ (=6) $^4C_3$ (=4) $^4C_4$ (=1)
5	$^5C_0$ (=1) $^5C_1$ (=5) $^5C_2$ (=10) $^5C_3$ (=10) $^5C_4$ (=5) $^5C_5$ (=1)

આકૃતિ 8.3 પાસ્કલનો ત્રિકોણ

આપણે આ તરાહનું નિરીક્ષણ કરી પાસ્કલના ત્રિકોણની આગળની હારો લખ્યા સિવાય કોઈ પણ ઘાતાંક માટેની હાર લખી શકીશું. ઉદાહરણ તરીકે,

ઘાતાંક 7 માટેની હાર

$$^7C_0 \;\; ^7C_1 \;\; ^7C_2 \;\; ^7C_3 \;\; ^7C_4 \;\; ^7C_5 \;\; ^7C_6 \;\; ^7C_7 \text{ છે.}$$

આમ, આ હાર અને અવલોકનનો (i), (ii) અને (iii) પરથી આપણને,

$(a+b)^7 = {}^7C_0 a^7 + {}^7C_1 a^6 b + {}^7C_2 a^5 b^2 + {}^7C_3 a^4 b^3 + {}^7C_4 a^3 b^4 + {}^7C_5 a^2 b^5 + {}^7C_6 a b^6 + {}^7C_7 b^7$ મળે.

આ અવલોકનોનો ઉપયોગ કરીને કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક ઘાતાંક n માટે દ્વિપદી વિસ્તરણ કલ્પી શકાય.

હવે આપણે કોઇપણ ધન પૂર્ણાંક ઘાતાંક માટે દ્વિપદીનું વિસ્તરણ કરવાની સ્થિતિમાં છીએ.

8.2.1 *કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n માટે દ્વિપદી પ્રમેય*

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a\, b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

સાબિતી : આપણે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિતી આપીશું.

ધારો કે આપેલું વિધાન

$$P(n) : (a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a b^{n-1} + {}^nC_n b^n \text{ છે.}$$

$n = 1$ માટે,

$P(1) : (a+b)^1 = {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 b^1 = a + b$ મળશે.

આમ, P (1) સત્ય છે.

ધારો કે કોઈક ધન પૂર્ણાંક k માટે P (k) સત્ય છે, એટલે કે,

$$(a+b)^k = {}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2 a^{k-2} b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1} a b^{k-1} + {}^kC_k b^k \quad \ldots\ldots (1)$$

આપણે P(k + 1) પણ સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું, એટલે કે,

$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k b + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_k a b^k + {}^{k+1}C_{k+1} b^{k+1}$ સાબિત કરીશું.

હવે, $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$= (a+b)({}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2 a^{k-2} b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1} a b^{k-1} + {}^kC_k b^k)$ [(1) પરથી]

$= {}^kC_0 a^{k+1} + {}^kC_1 a^k b + {}^kC_2 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1} a^2 b^{k-1} + {}^kC_k a b^k$

$+ {}^kC_0 a^k b + {}^kC_1 a^{k-1} b^2 + {}^kC_2 a^{k-2} b^3 + \ldots + {}^kC_{k-1} a b^k + {}^kC_k b^{k+1}$ [ગુણાકાર કરતાં]

$= {}^kC_0 a^{k+1} + ({}^kC_1 + {}^kC_0) a^k b + ({}^kC_2 + {}^kC_1) a^{k-1} b^2 + \ldots$

$+ ({}^kC_k + {}^kC_{k-1}) a b^k + {}^kC_k b^{k+1}$ [સમાન પદોનું જૂથ]

$= {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k b + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_k a b^k + {}^{k+1}C_{k+1} b^{k+1}$

(${}^kC_0 = {}^{k+1}C_0 = 1$, ${}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$ અને ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$ ના ઉપયોગથી)

આમ, જો P(k) સત્ય હોય, તો P (k + 1) પણ સત્ય છે.

આથી ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી, પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે P(n) સત્ય છે.

આપણે $(x + 2)^6$ ના વિસ્તરણ વડે આ પ્રમેય સમજીએ.

$$(x+2)^6 = {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5\cdot 2 + {}^6C_2x^4 2^2 + {}^6C_3x^3\cdot 2^3 + {}^6C_4x^2\cdot 2^4 + {}^6C_5x\cdot 2^5 + {}^6C_6\cdot 2^6$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

આમ, $(x+2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

અવલોકનો :

1. સંકેત $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k}b^k$ એ

${}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + ... + {}^nC_ra^{n-r}b^r + ... + {}^nC_na^{n-n}b^n$ માટે વપરાય છે, જ્યાં $b^0 = 1 = a^{n-n}$

આથી આ પ્રમેયને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k}b^k$$

2. દ્વિપદી પ્રમેયમાં આવતા સહગુણકો ${}^nC_r$ દ્વિપદી સહગુણકો તરીકે જાણીતા છે.

3. $(a+b)^n$ના વિસ્તરણમાં $(n+1)$ પદો છે, એટલે કે ઘાતાંક કરતાં એક પદ વધારે છે.

4. વિસ્તરણમાં ક્રમાનુસાર આવતાં પદોમાં a નો ઘાતાંક એક જેટલો ઘટે છે. પ્રથમ પદમાં n, બીજા પદમાં $(n-1)$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ જતાં અંતે છેલ્લા પદમાં શૂન્ય થાય છે. સાથે સાથે b નો ઘાતાંક એક જેટલો વધે છે, શરૂઆતના પ્રથમ પદમાં શૂન્ય, બીજામાં 1 અને આ જ પ્રમાણે આગળ વધતાં છેલ્લા પદમાં ઘાતાંકનો n થી અંત થાય છે.

5. $(a+b)^n$ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ પદમાં a અને b ના ઘાતાંકનો સરવાળો $n + 0 = n$ છે, બીજા પદમાં આ સરવાળો $(n-1) + 1 = n$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ વધતાં અંતિમ પદમાં તે સરવાળો $0 + n = n$ છે. આમ, વિસ્તરણના દરેક પદમાં a અને b ના ઘાતાંકનો સરવાળો n છે.

8.2.2 $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણના કેટલાક વિશિષ્ટ વિકલ્પો :

(i) $a = x$ અને $b = -y$ લેતાં, આપણને

$$(x-y)^n = [x + (-y)]^n$$

$$= {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}(-y) + {}^nC_2x^{n-2}(-y)^2 + {}^nC_3x^{n-3}(-y)^3 + ... + {}^nC_n(-y)^n$$

$$= {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - {}^nC_3x^{n-3}y^3 + ... + (-1)^n\ {}^nC_ny^n$$ મળે.

આમ, $(x-y)^n = {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - {}^nC_3x^{n-3}y^3 + ... + (-1)^n\ {}^nC_ny^n$

આ પરિણામનો ઉપયોગ કરતાં,

$$(x-2y)^5 = {}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4(2y) + {}^5C_2x^3(2y)^2 - {}^5C_3x^2(2y)^3 + {}^5C_4x(2y)^4 - {}^5C_5(2y)^5$$

$$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5.$$

(ii) $a = 1$ અને $b = x$ લેતાં,

$$(1+x)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}x + {}^nC_2(1)^{n-2}x^2 + ... + {}^nC_nx^n$$

$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$$

આમ, $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$

વિશિષ્ટ રૂપે, $x = 1$ લેતાં,

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n.$$

(iii) $a = 1$ અને $b = -x$ લેતાં,

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - ... + (-1)^n\ {}^nC_nx^n$$

વિશિષ્ટ રૂપે, $x = 1$ લેતાં,

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - ... + (-1)^n\ {}^nC_n$$

ઉદાહરણ 1 : $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ નું વિસ્તરણ કરો.

ઉકેલ : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4 \cdot x^6 \cdot \frac{3}{x} + 6 \cdot x^4 \cdot \frac{9}{x^2} + 4 \cdot x^2 \cdot \frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}.$$

ઉદાહરણ 2 : $(98)^5$ ની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : જે બે સંખ્યાઓના ઘાતની ગણતરી સરળ હોય, તેવી બે સંખ્યાઓના સરવાળા અથવા તફાવત સ્વરૂપે 98 ને લઈને દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ.

$98 = 100 - 2$ લઈશું.

આથી, $(98)^5 = (100-2)^5$

$$= {}^5C_0(100)^5 - {}^5C_1(100)^4\,2 + {}^5C_2(100)^3 2^2 - {}^5C_3(100)^2(2)^3 + {}^5C_4(100)(2)^4 - {}^5C_5(2)^5$$

$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$

$= 10040008000 - 1000800032 = 9039207968.$

ઉદાહરણ 3 : $(1.01)^{1000000}$ અથવા 10,000 માંથી કોણ વધારે છે?

ઉકેલ : 1.01 ના બે ભાગ કરી દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શરૂઆતનાં કેટલાંક પદો લખીશું.

$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$

$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01)$ + અન્ય ધન પદો

$= 1 + 1000000 \times 0.01$ + અન્ય ધન પદો

$= 1 + 10000$ + અન્ય ધન પદો

> 10000

આથી $(1.01)^{1000000} > 10000$

ઉદાહરણ 4 : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, સાબિત કરો કે $6^n–5n$ ને 25 વડે ભાગતાં શેષ હંમેશાં 1 રહે છે. $n \in N$

ઉકેલ : જો પૂર્ણાંક a અને શૂન્યેતર પૂર્ણાંક b માટે પૂર્ણાંકો q તથા r મળે, જેથી $a = bq + r$ જ્યાં, $0 \le r < |b|$ તો q ને ભાગફળ તથા r ને શેષ કહે છે. આમ, $6^n - 5n$ ને 25 વડે ભાગતાં શેષ 1 રહે તેમ બતાવવા માટે, આપણે સાબિત કરીશું કે $6^n - 5n = 25k + 1$, જ્યાં k કોઈક અનૃણ પૂર્ણાંક છે.

$n = 1$ માટે $6^n - 5n = 6 - 5 = 1 = (25)\cdot 0 + 1$. આથી $n = 1$ માટે પરિણામ સત્ય છે.

હવે, $n \ge 2$ લઈએ.

હવે, $(1 + a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 a + {}^nC_2 a^2 + ... + {}^nC_n a^n$ માં $a = 5$ લેતાં,

$(1 + 5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 5 + {}^nC_2 5^2 + ... + {}^nC_n 5^n$

એટલે કે, $6^n = 1 + 5n + 5^2 \cdot {}^nC_2 + 5^3 \cdot {}^nC_3 + ... + 5^n$

એટલે કે, $6^n - 5n = 1 + 5^2 ({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + ... + 5^{n-2})$ $(n \ge 2)$

અથવા $6^n - 5n = 1 + 25 ({}^nC_2 + 5 \cdot {}^nC_3 + ... + 5^{n-2})$

અથવા $6^n - 5n = 25k + 1$ જ્યાં $k = {}^nC_2 + 5 \cdot {}^nC_3 + ... + 5^{n-2}$.

આ દર્શાવે છે કે જો $6^n - 5n$ ને 25 વડે ભાગીએ તો શેષ 1 રહે છે.

સ્વાધ્યાય 8.1

પ્રશ્ન 1 થી 5 ની અભિવ્યક્તિઓનું વિસ્તરણ કરો.

1. $(1–2x)^5$

2. $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$

3. $(2x - 3)^6$

4. $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$

5. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, નીચેનાની કિંમત શોધો : (પ્રશ્ન 6 થી 9)

6. $(96)^3$ **7.** $(102)^5$ **8.** $(101)^4$ **9.** $(99)^5$

10. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, $(1.1)^{10000}$ અથવા 1000 પૈકી કઈ સંખ્યા મોટી છે તે નક્કી કરો.

11. $(a+b)^4-(a-b)^4$ શોધો. તે પરથી $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$નું મૂલ્ય શોધો.

12. $(x+1)^6+(x-1)^6$ શોધો. તે પરથી અથવા અન્ય રીતે$(\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6$ મેળવો.

13. બતાવો કે, ધન પૂર્ણાંક n માટે $9^{n+1}-8n-9$ એ 64 વડે વિભાજ્ય છે.

14. સાબિત કરો : $\sum_{r=0}^{n} 3^r \times {}^nC_r = 4^n$

8.3 વ્યાપક અને મધ્યમ પદો

1. અવલોકન કરતાં દ્વિપદી પ્રમેયમાં $(a+b)^n$ના વિસ્તરણમાં, પ્રથમ પદ ${}^nC_0a^n$, બીજું પદ ${}^nC_1a^{n-1}b$, ત્રીજું પદ ${}^nC_2a^{n-2}b^2$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ મળે. ક્રમિક પદોની તરાહ જોતાં $(r+1)$મું પદ ${}^nC_ra^{n-r}b^r$ છે એમ કહી શકાય. $(r+1)$મા પદને આપણે$(a+b)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ કહીએ છીએ. તેને T_{r+1} વડે દર્શાવીશું.

આમ $T_{r+1}={}^nC_r\,a^{n-r}b^r$.

2. $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદના સંદર્ભમાં,

(i) જો n યુગ્મ હોય તો વિસ્તરણમાં $(n+1)$ પદો મળે. n યુગ્મ હોવાથી $n+1$ અયુગ્મ છે. આથી$\left(\frac{n+1+1}{2}\right)$મું, એટલે કે, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મું પદ મધ્યમ પદ થશે.

ઉદાહરણ તરીકે, $(x+2y)^8$ ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ $\left(\frac{8}{2}+1\right)$મું એટલે કે 5મું પદ

(ii) જો n અયુગ્મ હોય, તો $n+1$ યુગ્મ થશે, માટે વિસ્તરણને બે મધ્યમપદ મળશે. અર્થાત્ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$મું અને $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$મું પદ. તેથી $(2x-y)^7$ ના વિસ્તરણમાં $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ મું, એટલે કે ચોથું અને $\left(\frac{7+1}{2}+1\right)$ મું એટલે કે 5મું પદ મધ્યમ પદ છે.

3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$, જ્યાં $x\neq 0$ ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ$\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)$મું, એટલે કે $(n+1)$ મું પદ થશે, કારણ કે $2n$ યુગ્મ છે.

તેનું મધ્યમ પદ ${}^{2n}C_nx^n\left(\frac{1}{x}\right)^n={}^{2n}C_n$ (અચળ) થશે.

આ પદને x થી સ્વતંત્ર પદ અથવા અચળ પદ કહે છે.

ઉદાહરણ 5 : જો $(2 + a)^{50}$ નું 17મું અને 18મું પદ સમાન હોય, તો a શોધો.

ઉકેલ: $(x + y)^n$ ના વિસ્તરણનું $(r + 1)$મું પદ $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$ છે.

આથી, 17મા પદ માટે $r + 1 = 17$ એટલે કે $r = 16$ થશે.

આથી, $T_{17} = T_{16+1} = {}^{50}C_{16}\ (2)^{50-16}\ a^{16}$

$= {}^{50}C_{16}\ 2^{34}\ a^{16}$.

તે જ પ્રમાણે, $T_{18} = {}^{50}C_{17}\ 2^{33}\ a^{17}$

હવે $T_{17} = T_{18}$ આપેલું છે.

તેથી ${}^{50}C_{16}\ (2)^{34}\ a^{16} = {}^{50}C_{17}\ (2)^{33}\ a^{17}$

$$\therefore \frac{{}^{50}C_{16}\cdot 2^{34}}{{}^{50}C_{17}\cdot 2^{33}} = \frac{a^{17}}{a^{16}}$$

એટલે કે $a = \dfrac{{}^{50}C_{16} \times 2}{{}^{50}C_{17}} = \dfrac{50!}{16!\,34!} \times \dfrac{17!\ 33!}{50!} \times 2 = 1$

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે $(1+x)^{2n}$ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ $\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{n!}\ 2^n x^n$ છે, જ્યાં n ધન પૂર્ણાંક છે.

ઉકેલ : $2n$ યુગ્મ હોવાથી, $(1 + x)^{2n}$ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ $\left(\dfrac{2n}{2}+1\right)$મું, એટલે કે $(n + 1)$ મું પદ થશે.

$T_{n+1} = {}^{2n}C_n (1)^{2n-n} (x)^n = {}^{2n}C_n x^n$

$$= \frac{(2n)!}{n!\ n!}\ x^n$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)\ \ (2n-2)\ \ ...4.3.2.1}{n!\ n!}\ x^n$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4...(2n-2)(2n-1)(2n)}{n!n!}\ x^n$$

$$= \frac{[1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)][2\cdot 4\cdot 6...(2n)]}{n!n!}\ x^n$$

$$= \frac{[1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)]2^n[1\cdot 2\cdot 3...n]}{n!n!}\ x^n$$

$$= \frac{[1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)]\ n!}{n!\ n!}\ 2^n\cdot x^n$$

$$= \frac{1\cdot3\cdot5...(2n-1)}{n!}\,2^n x^n$$

ઉદાહરણ 7 : $(x + 2y)^9$ના વિસ્તરણમાં x^6y^3 નો સહગુણક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $(x + 2y)^9$ ના વિસ્તરણમાં $(r + 1)$ મું પદ x^6y^3 વાળું પદ છે.

હવે, $T_{r+1} = {}^9C_r x^{9-r}(2y)^r = {}^9C_r 2^r \cdot x^{9-r} \cdot y^r$.

x^6y^3માં x ની ઘાત તથા y ની ઘાતની સરખામણી T_{r+1}માં તેમની ઘાત સાથે કરતાં $r = 3$ મળે.

આમ, x^6y^3 નો સહગુણક

$${}^9C_3\,2^3 = \frac{9!}{3!\,6!}\cdot 2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}\cdot 2^3 = 672.$$

ઉદાહરણ 8 : $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણમાં બીજું, ત્રીજું અને ચોથું પદ અનુક્રમે 240, 720 અને 1080 છે. x, a અને n શોધો.

ઉકેલ : બીજું પદ $T_2 = 240$ છે.

$T_2 = {}^nC_1 x^{n-1}.\ a$ હોવાથી,

$${}^nC_1 x^{n-1}.\ a = 240 \qquad ...(1)$$

તે જ પ્રમાણે

$${}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720 \qquad ...(2)$$

અને

$${}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080 \qquad ...(3)$$

(2) ને (1) વડે ભાગતાં,

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240} \text{ એટલે કે, } \frac{(n-1)!}{(n-2)!}\cdot\frac{a}{x} = 6$$

$$\therefore \frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \qquad ...(4)$$

(3)ને (2) વડે ભાગતાં,

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad ...(5)$$

(4) અને (5) પરથી,

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}.\ \text{આમ, } n = 5$$

આથી (1) પરથી $5x^4a = 240$ અને (4) પરથી, $\frac{a}{x} = \frac{3}{2}$

આ સમીકરણનું a અને x માટે સમાધાન કરતાં, $x = 2$ અને $a = 3$ મળે.

ઉદાહરણ 9 : $(1 + a)^n$ ના વિસ્તરણનાં ત્રણ ક્રમિક પદોના સહગુણકોનો ગુણોત્તર 1: 7 : 42 છે. n શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $(1 + a)^n$ ના વિસ્તરણનાં ત્રણ ક્રમિક પદો $(r - 1)$મું, rમું અને $(r + 1)$મું પદ છે.

$(r-1)$ મું પદ ${}^nC_{r-2}a^{r-2}$ છે અને તેનો સહગુણક ${}^nC_{r-2}$ છે. આ જ પ્રમાણે, r અને $(r+1)$મા પદના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^nC_{r-1}$ અને ${}^nC_r$ છે.

સહગુણકોનો ગુણોત્તર 1 : 7 : 42 હોવાથી,

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}, \text{ એટલે કે, } n-8r+9=0 \quad \text{... (1)}$$

અને
$$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42}, \text{ એટલે કે, } n-7r+1=0 \text{ મળે.} \quad \text{... (2)}$$

સમીકરણો (1) અને (2) ઉકેલતાં $n = 55$ મળશે.

સ્વાધ્યાય 8.2

સહગુણકો શોધો : (પ્રશ્ન 1 તથા 2)

1. $(x+3)^8$ માં x^5નો
2. $(a-2b)^{12}$ માં a^5b^7 નો

નીચેના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ લખો : (પ્રશ્ન 3 તથા 4)

3. $(x^2-y)^6$
4. $(x^2-yx)^{12}, x \neq 0$
5. $(x-2y)^{12}$ના વિસ્તરણનું ચોથું પદ શોધો.
6. $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$, $x \neq 0$ ના વિસ્તરણનું 13મું પદ શોધો.

નીચેના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ શોધો :

7. $\left(3-\frac{x^3}{6}\right)^7$
8. $\left(\frac{x}{3}+9y\right)^{10}$
9. $(1+a)^{m+n}$ ના વિસ્તરણમાં a^m અને a^n ના સહગુણકો સમાન છે તેમ સાબિત કરો.
10. $(x+1)^n$ના વિસ્તરણમાં $(r-1)$મા, r મા અને $(r+1)$ મા પદોના સહગુણકોનો ગુણોત્તર 1 : 3 : 5 હોય, તો n અને r શોધો.
11. સાબિત કરો કે $(1+x)^{2n}$ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક, $(1+x)^{2n-1}$ ના વિસ્તરણના x^n ના સહગુણક કરતાં બે ગણો છે.
12. જો $(1+x)^m$ના વિસ્તરણમાં x^2 નો સહગુણક 6 હોય, તો m નું ધન મૂલ્ય શોધો.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 10 : $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^6$ ના વિસ્તરણનું અચળ પદ શોધો.

ઉકેલ : $T_{r+1} = {}^6C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$

$$= {}^6C_r \left(\frac{3}{2}\right)^{6-r} \left(x^2\right)^{6-r} (-1)^r \left(\frac{1}{x}\right)^r \left(\frac{1}{3^r}\right)$$

$$= (-1)^r \;\; {}^6C_r \frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}} \;\; x^{12-3r}$$

જો x નો ઘાતાંક શૂન્ય હોય, તો તે અચળ પદ થાય, એટલે કે, $12 - 3r = 0$. આમ, $r = 4$

આથી 5 મું પદ અચળ પદ થશે અને તે $(-1)^4 \;\; {}^6C_4 \dfrac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}} = \dfrac{5}{12}$.

ઉદાહરણ 11 : જો $(1 + a)^n$ ના વિસ્તરણમાં a^{r-1}, a^r અને a^{r+1} ના સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો સાબિત કરો કે $n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$.

ઉકેલ : આપેલ વિસ્તરણનું $(r + 1)$ મું પદ ${}^nC_r a^r$. આમ a^r એ $(r + 1)$મા પદમાં મળે છે અને તેનો સહગુણક ${}^nC_r$ છે. આથી, a^{r-1}, a^r અને a^{r+1} ના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$ અને ${}^nC_{r+1}$ છે. આ સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી, ${}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1} = 2 \cdot {}^nC_r$ થાય.

તે પરથી, $\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 2 \times \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ મળે.

એટલે કે,
$$\frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!} + \frac{1}{(r+1)(r)(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$= 2 \times \frac{1}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}$$

$$\therefore \frac{1}{(r-1)! \;\; (n-r-1)!} \left[\frac{1}{(n-r)(n-r+1)} + \frac{1}{(r+1) \;\; (r)}\right]$$

$$= 2 \times \frac{1}{(r-1)! \;\; (n-r-1)![r(n-r)]}$$

$$\therefore \frac{1}{(n-r+1)(n-r)} + \frac{1}{r(r+1)} = \frac{2}{r(n-r)},$$

$$\therefore \frac{r(r+1) + (n-r)(n-r+1)}{(n-r)(n-r+1)r(r+1)} = \frac{2}{r(n-r)}$$

$$\therefore \quad r(r + 1) + (n - r)(n - r + 1) = 2(r + 1)(n - r + 1)$$

$$\therefore \quad r^2 + r + n^2 - nr + n - nr + r^2 - r = 2(nr - r^2 + r + n - r + 1)$$

$$\therefore \quad n^2 - 4nr - n + 4r^2 - 2 = 0$$

$$\therefore \quad n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$$

ઉદાહરણ 12 : બતાવો કે $(1 + x)^{2n}$ના વિસ્તરણના મધ્યમ પદનો સહગુણક એ $(1 + x)^{2n-1}$ના વિસ્તરણનાં મધ્યમ પદોના સહગુણકોના સરવાળા જેટલો છે.

ઉકેલ : $2n$ યુગ્મ હોવાથી $(1 + x)^{2n}$ના વિસ્તરણમાં માત્ર એક જ મધ્યમ પદ છે અને તે $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ મું, એટલે કે $(n + 1)$ મું પદ. $(n + 1)$ મું પદ ${}^{2n}C_n x^n$ છે. x^n નો સહગુણક ${}^{2n}C_n$ છે.

તે જ પ્રમાણે, $(2n - 1)$ અયુગ્મ છે, આથી બીજા વિસ્તરણમાં બે મધ્યમ પદ મળશે.

$\left(\frac{2n-1+1}{2}\right)$ મું અને $\left(\frac{2n-1+1}{2}+1\right)$ મું પદ એટલે કે nમું અને $(n + 1)$મું પદ. આ પદના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^{2n-1}C_{n-1}$ અને ${}^{2n-1}C_n$ થશે.

હવે, ${}^{2n-1}C_{n-1} + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n}C_n$ છે જ. $[{}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r$ના ઉપયોગથી$]$

ઉદાહરણ 13 : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$ ના ગુણાકારમાં a^4નો સહગુણક શોધો.

ઉકેલ : આપણે આપેલ ગુણાકારના દરેક અવયવનું દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી વિસ્તરણ કરીએ.

$$(1 + 2a)^4 = {}^4C_0 + {}^4C_1 (2a) + {}^4C_2 (2a)^2 + {}^4C_3 (2a)^3 + {}^4C_4 (2a)^4$$

$$= 1 + 4 (2a) + 6(4a^2) + 4 (8a^3) + 16a^4$$

$$= 1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4$$

અને $(2 - a)^5 = {}^5C_0 (2)^5 - {}^5C_1 (2)^4 (a) + {}^5C_2 (2)^3 (a)^2 - {}^5C_3 (2)^2 (a)^3 + {}^5C_4 (2) (a)^4 - {}^5C_5 (a)^5$

$$= 32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5$$

આમ $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$

$$= (1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4) (32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5)$$

બંને કૌંસનો પૂરેપૂરો ગુણાકાર કરીશું નહિ. આપણે a^4 આવે તેવાં જ પદો લખીશું. આમ કરવા માટે આપણે નોંધીશું કે $a^r. a^{4-r} = a^4$.

જેમાંથી a^4 મળે તેવાં પદો $1 (10a^4) + (8a) (-40a^3) + (24a^2) (80a^2) + (32a^3) (-80a) + (16a^4) (32) = -438a^4$

આમ, આપેલા ગુણાકારમાં a^4 નો સહગુણક -438 છે.

ઉદાહરણ 14 : $(x + a)^n$ના વિસ્તરણમાં છેલ્લેથી r મું પદ શોધો.

ઉકેલ : $(x + a)^n$ના વિસ્તરણમાં $(n + 1)$ પદો છે. પદોનું અવલોકન કરતાં અંતિમ પદથી પ્રથમ પદ એ છેલ્લું પદ થશે, એટલે કે, વિસ્તરણનું $(n + 1)$ મું પદ થશે તેમ લાગે છે અને $n + 1 = (n + 1) - (1 - 1)$. વિસ્તરણનું અંતિમ પદથી બીજું પદ એ n મું પદ થશે અને $n = (n + 1) - (2 - 1)$. અંતિમ પદથી ત્રીજું પદ એ વિસ્તરણનું $(n - 1)$મું પદ થશે અને $n - 1 = (n + 1) - (3 - 1)$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ, આમ છેલ્લેથી r માં પદનો ક્રમ એ $(n + 1) - (r - 1) = (n - r + 2)$ થશે અને $(n - r + 2)$મું પદ ${}^nC_{n-r+1} x^{r-1} a^{n-r+1}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$ ના વિસ્તરણનું x થી સ્વતંત્ર પદ(અચળ પદ) શોધો. $x > 0$

ઉકેલ : $T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r}\left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r$

$$= {}^{18}C_r\, x^{\frac{18-r}{3}} . \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}}$$

$$= {}^{18}C_r \frac{1}{2^r} . x^{\frac{18-2r}{3}}$$

આપણે x થી સ્વતંત્ર પદ એટલે કે જે પદમાં x ન હોય એવું પદ મેળવવું છે.

આથી $\dfrac{18-2r}{3} = 0$ લઈશું. આથી $r = 9$ મળશે.

$\therefore$ જરૂરી પદ ${}^{18}C_9 \dfrac{1}{2^9}$

ઉદાહરણ 16 : $\left(x-\dfrac{3}{x^2}\right)^m$ ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 559 છે. વિસ્તરણમાં x^3 હોય તેવું પદ શોધો. m એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

ઉકેલ : $\left(x-\dfrac{3}{x^2}\right)^m$ ના વિસ્તરણનાં પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^mC_0$, $(-3)\,{}^mC_1$ અને $9\,{}^mC_2$ છે.

આથી આપેલ શરત પ્રમાણે,

${}^mC_0 - 3\,{}^mC_1 + 9\,{}^mC_2 = 559$, એટલે કે $1 - 3m + \dfrac{9m(m-1)}{2} = 559$

તે પરથી $m = 12$ મળશે. (m એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે)

હવે $T_{r+1} = {}^{12}C_r x^{12-r}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r (-3)^r \cdot x^{12-3r}$

આપણને x^3 વાળું પદ જોઈએ છે. આથી $12 - 3r = 3$ મૂકતાં, $r = 3$ મળશે.

આમ, માગેલું પદ ${}^{12}C_3 (-3)^3\, x^3$, એટલે કે, $-5940\, x^3$ છે.

ઉદાહરણ 17 : જો $(1 + x)^{34}$ ના વિસ્તરણના $(r - 5)$માં પદ અને $(2r - 1)$માં પદના સહગુણકો સમાન હોય, તો r શોધો.

ઉકેલ : $(1 + x)^{34}$ ના વિસ્તરણના $(r - 5)$માં પદ અને $(2r - 1)$માં પદના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^{34}C_{r-6}$ અને ${}^{34}C_{2r-2}$ છે.

તેઓ સમાન હોવાથી ${}^{34}C_{r-6} = {}^{34}C_{2r-2}$

આથી $r - 6 = 2r - 2$ અથવા $r - 6 = 34 - (2r - 2)$ થશે.

[જો ${}^nC_r = {}^nC_p$ તો $r = p$ અથવા $r = n - p$ એ સત્યનો ઉપયોગ કરતાં]

આથી, $r = -4$ અથવા $r = 14$ મળશે. r એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોવાથી $r = -4$ શક્ય નથી, આથી, $r = 14$.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 8

1. જો $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણનાં પ્રથમ ત્રણ પદો અનુક્રમે 729, 7290 અને 30375 હોય, તો a, b અને n શોધો.
2. જો $(3+ax)^9$ના વિસ્તરણમાં x^2 અને x^3 ના સહગુણકો સમાન હોય, તો a શોધો.
3. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, $(1+2x)^6(1-x)^7$ ના ગુણાકારમાં x^5 નો સહગુણક શોધો.
4. જો a અને b ભિન્ન પૂર્ણાંક હોય, તો સાબિત કરો કે a^n-b^nનો એક અવયવ $a-b$ છે, જ્યાં n એ ધન પૂર્ણાંક છે.

   [**સૂચનઃ** $a^n=(a-b+b)^n$ લઈ વિસ્તરણ કરો.]
5. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$ ની કિંમત શોધો.
6. $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4+\left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$ ની કિંમત શોધો.
7. વિસ્તરણનાં પ્રથમ ત્રણ પદોનો ઉપયોગ કરી $(0.99)^5$ ની આશરે કિંમત શોધો.
8. જો $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ના વિસ્તરણના શરૂઆતથી પાંચમા પદ અને છેલ્લેથી પાંચમા પદનો ગુણોત્તર $\sqrt{6}:1$ હોય, તો n શોધો.
9. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x\neq 0$ નું વિસ્તરણ કરો.
10. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $(3x^2-2ax+3a^2)^3$ નું વિસ્તરણ શોધો.

સારાંશ

- કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n માટે દ્વિપદીનું વિસ્તરણ દ્વિપદી પ્રમેયથી કરી શકાય છે,

  તે $(a+b)^n={}^nC_0a^n+{}^nC_1a^{n-1}b+{}^nC_2a^{n-2}b^2+...+{}^nC_{n-1}a\ b^{n-1}+{}^nC_nb^n$ છે.
- વિસ્તરણનાં સહગુણકો નિશ્ચિત ગોઠવણીમાં ગોઠવાય, તો આ ગોઠવણને પાસ્કલનો ત્રિકોણ કહે છે.
- $(a+b)^n$ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ $T_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}b^r$ છે.
- $(a+b)^n$ ના વિસ્તરણમાં, જો n યુગ્મ હોય, તો મધ્યમ પદ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મું પદ થશે. જો n અયુગ્મ હોય, તો મધ્યમ પદો $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અને $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$મું થશે.

Historical Note

The ancient Indian mathematicians knew about the coefficients in the expansions of $(x+y)^n$, $0 \le n \le 7$. The arrangement of these coefficients was in the form of a diagram called *Meru-Prastara*, provided by Pingla in his book *Chhanda shastra* (200B.C.). This triangular arrangement is also found in the work of Chinese mathematician Chu-shi-kie in 1303. The term binomial coefficients was first introduced by the German mathematician, Michael Stipel (1486-1567) in approximately 1544. Bombelli (1572) also gave the coefficients in the expansion of $(a+b)^n$, for $n=1,2\ ...,7$ and Oughtred (1631) gave them for $n=1, 2,..., 10$. The arithmetic triangle, popularly known as *Pascal's triangle* and similar to the *Meru-Prastara* of Pingla was constructed by the French mathematician Blaise Pascal (1623-1662) in 1665.

The present form of the binomial theorem for integral values of n appeared in *Trate du triange arithmetic*, written by Pascal and published posthumously in 1665.

— ❖ —