પ્રકરણ 9

# શ્રેણી અને શ્રેઢી

❖ *Natural numbers are the product of human spirit. – DEDEKIND* ❖

## 9.1 પ્રાસ્તાવિક

સાહિત્યમાં અને ગણિતશાસ્ત્રમાં શ્રેણી શબ્દ એક જ અર્થમાં વાપરવામાં આવે છે. જ્યારે આપણે કહીએ છીએ કે વસ્તુનો જથ્થો શ્રેણીમાં રહેલ છે, ત્યારે સામાન્ય રીતે એવું માનીએ છીએ કે જથ્થામાં રહેલ વસ્તુઓ પ્રથમ સભ્ય, દ્વિતીય સભ્ય, તૃતીય સભ્ય સ્વરૂપે છે, વગેરે. ઉદાહરણ તરીકે, જુદા જુદા સમયે માનવ વસતી કે બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા શ્રેણી રચે છે. બૅંકમાં જમા કરાવેલા પૈસા દ્વારા દરેક વર્ષ પછીની મળતી રકમ શ્રેણી બનાવે છે. વસ્તુના ઘસારાની કિંમત શ્રેણી બનાવે છે. શ્રેણી એ માનવ પ્રવૃત્તિનાં વિવિધ ક્ષેત્રમાં મહત્ત્વપૂર્ણ મનાય છે.

**Fibonacci**
**(1175-1250)**

નિશ્ચિત પદ્ધતિને અનુસરતા અનુક્રમને ***શ્રેણી*** કહે છે. અગાઉના ધોરણમાં આપણે ***સમાંતર શ્રેણી*** વિશે શીખી ગયાં છીએ. આ પ્રકરણમાં હવે પછી સમાંતર શ્રેણી વિશે વધુ શીખીશું તથા ***સમાંતર મધ્યક*** *(arithmetic mean)* ***સમગુણોત્તર મધ્યક*** *(geometric mean)*, સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યક વચ્ચેનો સંબંધ, **$n$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો**, **$n$ ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો** અને **$n$ ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાના ઘનના સરવાળા** વિશે શીખીશું.

## 9.2 શ્રેણીઓ

નીચેનાં ઉદાહરણો જોઈએ :

માની લઈએ કે બે પેઢી વચ્ચેનું અંતર 30 વર્ષનું છે, તો છેલ્લાં 300 વર્ષમાં કેટલા પૂર્વજો અર્થાત્ માતા-પિતા, દાદા-દાદી, વડદાદા-વડદાદી વગેરે મળે ?

અહીં, પેઢીની કુલ સંખ્યા $= \frac{300}{30} = 10$

માણસના પૂર્વજોની સંખ્યા પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય,.... દસમી પેઢીએ 2, 4, 8, 16, 32, …, 1024 જેટલી હશે. આ સંખ્યા દ્વારા ***શ્રેણી*** બને છે તેમ આપણે કહીશું.

10 ને 3 વડે ભાગતાં ક્રમિક સોપાનથી મળતા ભાગફળ 3,3.3,3.33,3.333, ... વગેરે છે. આ ભાગફળ પણ શ્રેણી રચે છે. શ્રેણીમાં આવતી જુદી જુદી સંખ્યાને **પદ** કહીશું. આપણે શ્રેણીનાં પદોને $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, વગેરે દ્વારા દર્શાવીશું, તેમાં અનુગ *(Suffix)* પદનો ક્રમાંક દર્શાવે છે. શ્રેણીમાં $n$ મું પદ એ $n$ મા સ્થાને રહેલી સંખ્યા છે અને તેને $a_n$ વડે દર્શાવાય. શ્રેણીના $n$ મા પદને ***વ્યાપક પદ*** તરીકે ઓળખાય છે.

આમ, ઉપર દર્શાવેલ વ્યક્તિના પૂર્વજોથી બનતી શ્રેણીનાં પદ :

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ ...,\ a_{10} = 1024 \text{ છે.}$$

આ જ રીતે ભાગફળના ઉદાહરણમાં,

$$a_1 = 3,\ a_2 = 3.3,\ a_3 = 3.33,\ ...,\ a_6 = 3.33333, \text{ વગેરે.}$$

જે શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી હોય તેને ***સાન્ત શ્રેણી*** કહેવાય. ઉદાહરણ તરીકે, પૂર્વજોથી બનતી શ્રેણી સાન્ત છે. કેમ કે તેમાં 10 પદ (નિશ્ચિત સંખ્યા) રહેલ છે.

જે શ્રેણી સાન્ત નથી, તેને ***અનંત શ્રેણી*** કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, ઉપર દર્શાવેલ ક્રમિક ભાગફળવાળા દાખલામાં ***અનંત શ્રેણી*** મળે છે. અનંતનો અર્થ 'ક્યારેય અંત ના હોય' તેવો થાય.

ઘણી વખત એવું શક્ય બને કે, શ્રેણીના અલગ અલગ પદથી શ્રેણીનું બૈજિક સૂત્ર શક્ય બને. ઉદાહરણ તરીકે, યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા દ્વારા બનતી શ્રેણી 2, 4, 6, …લઈએ.

અહીં,

$$a_1 = 2 = 2 \times 1,\quad a_2 = 4 = 2 \times 2$$

$$a_3 = 6 = 2 \times 3,\quad a_4 = 8 = 2 \times 4$$

.... .... .... .... .... ....

.... .... .... .... .... ....

$$a_{23} = 46 = 2 \times 23,\ a_{24} = 48 = 2 \times 24 \text{ વગેરે.}$$

અલબત્ત આપણે જોઈ શકીએ કે આ શ્રેણીનું $n$ મું પદ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n$ માટે $a_n = 2n$ એમ લખી શકાય. આ જ રીતે, અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ 1, 3, 5, …, નું $n$ મું પદ $a_n = 2n - 1$, સૂત્રથી દર્શાવી શકાય. $n$ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

ઘણા કિસ્સાઓમાં આંકડાની ગોઠવણી દ્વારા કોઈ તરાહ જોઈ શકાતી નથી. ઉદાહરણ તરીકે, 1, 1, 2, 3, 5, 8,... પરંતુ આ શ્રેણી આવૃત્ત સંબંધ દ્વારા સર્જાય છે.

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ n > 2$$

આ શ્રેણીને ***ફિબોનાકી શ્રેણી*** *(Fibonacci Sequence)* કહેવાય છે.

અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની શ્રેણી 2, 3, 5, 7,...માં આપણે $n$ મું અવિભાજ્ય પદ મેળવવાનું સૂત્ર શોધી શકતા નથી. આવી શ્રેણીની સમજ શાબ્દિક રીતે જ આપી શકાય.

આપણે, દરેક શ્રેણીમાં તેનાં તમામ પદોનો સમાવેશ કરે તેવા કોઇ ચોક્કસ સૂત્રની અપેક્ષા રાખતા નથી.

આમ છતાં આપણે $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ નું ક્રમમાં સર્જન કરી શકાય તેવા કોઈ સૈદ્ધાંતિક નિયમ કે સૈદ્ધાંતિક તારણની અપેક્ષા રાખીએ છીએ.

*ઉપરની માહિતી પરથી કહી શકાય કે, જેનો પ્રદેશ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો ગણ અથવા તેનો કોઈ ઉપગણ $\{1, 2, 3...k\}$ જેવો હોય તેને શ્રેણી કહેવાય. કેટલીક વખત $a_n$ માટે વિધેયનો સંકેત $a(n)$ ઉપયોગમાં લેવાય છે.*

## 9.3 શ્રેઢી

ધારો કે $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ આપેલ શ્રેણી છે. તો પદાવલિ

$$a_1 + a_2 + a_3 +, ... + a_n + ...$$

ને આપેલ શ્રેણીને *સંગત શ્રેઢી* કહેવાય. જો શ્રેણી સાન્ત કે અનંત હોય તો અનુરૂપ શ્રેઢી પણ સાન્ત કે અનંત થાય. શ્રેઢીને ટૂંકમાં ગ્રીક મૂળાક્ષર $\sum$ (સિગ્મા) સંકેત દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. તેનો અર્થ સરવાળો થાય છે. આમ, શ્રેઢી $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ને ટૂંકમાં $\sum_{k=1}^{n} a_k$ એમ લખાય.

**નોંધ :** જ્યારે શ્રેઢી શબ્દનો ઉપયોગ કરવામાં આવે ત્યારે તે રજૂઆત સરવાળો જ દર્શાવે છે. ઉદાહરણ તરીકે $1 + 3 + 5 + 7$ એ એક ચાર પદોવાળી સાન્ત શ્રેઢી છે. જ્યારે આપણે "શ્રેઢીનો સરવાળો" એવો શબ્દસમૂહ વાપરીએ ત્યારે તેનાં પદોનો સરવાળો કરવો એટલે કે સરવાળાનું મૂલ્ય મેળવવું તેવો અર્થ કરીશું. આમ, આપેલ શ્રેઢીનો સરવાળો 16 છે. હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

**ઉદાહરણ 1 :** નીચે વ્યાખ્યાયિત શ્રેણીઓનાં પ્રથમ ત્રણ પદો લખો.

(i) $a_n = 2n + 5$ (ii) $a_n = \frac{n-3}{4}$.

**ઉકેલ :** (i) અહીં $a_n = 2n + 5$

$n = 1, 2, 3,$ લેતાં,

$a_1 = 2(1) + 5 = 7,\ a_2 = 9,\ a_3 = 11$

આથી, માંગેલ પદો 7, 9, 11 છે.

(ii) અહીં $a_n = \frac{n-3}{4}$. આથી,

$$a_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{4},\ a_3 = 0$$

આમ, માંગેલ પ્રથમ ત્રણ પદ $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$ અને 0 છે.

**ઉદાહરણ 2 :** શ્રેણી $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ નું 20 મું પદ કયું હશે ?

**ઉકેલ :** $n = 20$ મૂકતાં,

$$a_{20} = (20-1)(2-20)(3+20)$$

$$= 19 \times (-18) \times (23)$$

$$= -7866$$

**ઉદાહરણ 3 :** શ્રેણી $a_n$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

$$a_1 = 1,\ n \geq 2 \text{ માટે } a_n = a_{n-1} + 2.$$

આ શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદ લખો અને સંબંધિત શ્રેઢી લખો :

**ઉકેલ :** અહીં,

$$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7,$$

$$a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9.$$

આમ, શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદ 1,3,5,7 અને 9 છે અને સંબંધિત શ્રેઢી $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ...$ છે.

## સ્વાધ્યાય 9.1

પ્રશ્ન 1 થી 6 માં જેનું $n$ મું પદ આપેલ છે તે શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદ લખો :

**1.** $a_n = n(n+2)$ **2.** $a_n = \frac{n}{n+1}$ **3.** $a_n = 2^n$

**4.** $a_n = \frac{2n-3}{6}$ **5.** $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$ **6.** $a_n = \frac{n(n^2+5)}{4}$

પ્રશ્ન 7 થી 10 માં જેનું $n$ મું પદ આપેલ છે તે શ્રેણીનાં નિર્દેશિત પદ શોધો :

**7.** $a_n = 4n - 3;\ a_{17},\ a_{24}$ **8.** $a_n = \frac{n^2}{2^n};\ a_7$

**9.** $a_n = (-1)^{n-1}n^3;\ a_9$ **10.** $a_n = \dfrac{n(n-2)}{n+3};a_{20}$

પ્રશ્ન 11 થી 13 માં આપેલ શ્રેણીઓનાં પ્રથમ પાંચ પદ શોધો અને સંબંધિત શ્રેઢી મેળવો :

**11.** $a_1 = 3,\ n > 1$ માટે $a_n = 3a_{n-1} + 2$ **12.** $a_1 = -1,\ n \geq 2$ માટે $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$

**13.** $a_1 = a_2 = 2, n > 2$ માટે $a_n = a_{n-1} - 1$

**14.** ફિબોનાકી શ્રેણી,

$1 = a_1 = a_2$ અને $n > 2$ માટે $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ માટે $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ મેળવો.

## 9.4 સમાંતર શ્રેણી (A.P.)

આપણે અગાઉ અભ્યાસ કર્યો હોય તેવાં કેટલાંક સૂત્રો અને ગુણધર્મો યાદ કરીએ.

જો શ્રેણી $a_1, a_2, a_3, ..., a_n ...$ માટે $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbf{N}$, હોય તો તેને ***સમાંતર શ્રેણી*** કહીશું. અત્રે $a_1$ ને આ સમાંતર શ્રેણીનું ***પ્રથમ પદ*** અને $d$ ને ***સામાન્ય તફાવત*** કહીશું.

પ્રથમ પદ $a$ હોય અને સામાન્ય તફાવત $d$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, ...$ લો.

આ સમાંતર શ્રેણીનું $n$ મું (વ્યાપક) પદ $a_n = a + (n - 1)\ d$ છે.

સમાંતર શ્રેણીના કેટલાક સરળ ગુણધર્મો નીચે આપેલ છે તે આપણે ચકાસીએ :

(i) જો સમાંતર શ્રેણીનાં બધાં જ પદમાં કોઈ અચળ ઉમેરવામાં આવે તો બનતી નવી શ્રેણી પણ સમાંતર શ્રેણી જ હોય.

(ii) જો સમાંતર શ્રેણીનાં બધાં જ પદમાંથી કોઈ અચળ બાદ કરવામાં તો બનતી નવી શ્રેણી પણ સમાંતર શ્રેણી જ હોય.

(iii) જો સમાંતર શ્રેણીનાં બધાં જ પદને કોઈ અચળ વડે ગુણવામાં આવે તો બનતી નવી શ્રેણી પણ સમાંતર શ્રેણી જ હોય.

(iv) જો સમાંતર શ્રેણીનાં બધાં જ પદને કોઈ શૂન્યેતર અચળથી ભાગવામાં આવે તો પણ બનતી નવી શ્રેણી પણ સમાંતર શ્રેણી જ હોય.

અહીં સમાંતર શ્રેણી માટે આપણે નીચેના સંકેતો ઉપયોગમાં લઈશું :

$a =$ પ્રથમ પદ, $l =$ છેલ્લું પદ, $d =$ સામાન્ય તફાવત,

$n =$ પદની સંખ્યા

$S_n =$ સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો

ધારો કે, $a, a + d, a + 2d, ..., a + (n - 1)\ d$ સમાંતર શ્રેણી છે. તો

$$l = a + (n - 1)\ d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

તેને આપણે, $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$ તરીકે પણ લખી શકીએ.

નીચેનાં ઉદાહરણો સમજીએ :

**ઉદાહરણ 4 :** $m \neq n$ માટે કોઈક સમાંતર શ્રેણીનું $m$ મું પદ $n$ અને $n$ મું પદ $m$ હોય, તો તેનું $p$ મું પદ શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં, $a_m = a + (m-1)\,d = n,$ ... (1)

$a_n = a + (n-1)\,d = m$ ... (2)

(1) અને (2) ને ઉકેલતાં,

$(m-n)\,d = n - m$, એટલે કે $d = -1$ અને ... (3)

$a = n + m - 1$ ... (4)

આથી, $a_p = a + (p-1)d$

$\therefore\ a_p = n + m - 1 + (p-1)(-1) = n + m - p$

આમ, $p$ મું પદ $n + m - p$ થાય.

**ઉદાહરણ 5 :** અચળ P અને Q માટે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો $nP+\frac{1}{2}n(n-1)Q$ છે. તો સામાન્ય તફાવત શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે $a_1, a_2, \ldots a_n$ આપેલ સમાંતર શ્રેણી છે.

આથી, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$= nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$

$\therefore\ S_1 = a_1 = P$

$S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q$

આથી, $a_2 = S_2 - S_1 = P + Q$

આથી, સામાન્ય તફાવત $d = a_2 - a_1 = (P+Q) - P = Q.$

**ઉદાહરણ 6 :** પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n$ માટે બે સમાંતર શ્રેણીઓનાં પ્રથમ $n$ પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર $(3n+8):(7n+15)$ હોય, તો તેમનાં 12 માં પદનો ગુણોત્તર શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે પ્રથમ અને દ્વિતીય સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ પદ અનુક્રમે $a_1$ અને $a_2$ તથા સામાન્ય તફાવત $d_1$ અને $d_2$ છે. આપેલ શરત પ્રમાણે,

$$\therefore\ \frac{\text{પ્રથમ શ્રેણીનાં પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}}{\text{દ્વિતીય શ્રેણીનાં પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$\therefore\ \frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$\therefore\ \frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15} \quad \ldots (1)$$

હવે, $\dfrac{\text{પ્રથમ શ્રેણીનું 12 મું પદ}}{\text{દ્વિતિય શ્રેણીનું 12 મું પદ}} = \dfrac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$

$$= \frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2} = \frac{3\times 23+8}{7\times 23+15} \quad [(1)\text{માં } n = 23 \text{ મૂકતાં}]$$

આમ, $\dfrac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2} = \dfrac{\text{પ્રથમ શ્રેણીનું 12 મું પદ}}{\text{દ્વિતીય શ્રેણીનું 12 મું પદ}}$

$$= \frac{7}{16}$$

આથી, માંગેલ ગુણોત્તર 7 : 16 છે.

**ઉદાહરણ 7 :** એક વ્યક્તિના પ્રથમ વર્ષની આવક ₹ 3,00,000 છે. તેની આવકમાં પછીનાં 19 વર્ષ સુધી પ્રતિ વર્ષ ₹ 10,000 નો વધારો થાય છે. તો તે 20 વર્ષમાં કુલ કેટલી રકમ મેળવશે ?

**ઉકેલ :** અહીં, આપણી પાસે સમાંતર શ્રેણી છે.

$a = 3{,}00{,}000$, $d = 10{,}000$ અને $n = 20$.

સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$S_{20} = \frac{20}{2}[600000+19\times 10000]$$

$$= 10\ (790000) = 79{,}00{,}000$$

આમ, 20 વર્ષના અંતે તે વ્યક્તિ કુલ ₹ 79,00,000 મેળવશે.

### 9.4.1 સમાંતર મધ્યક

$a$ અને $b$ આપેલ સંખ્યાઓ છે. આપણે આ સંખ્યાઓ વચ્ચે સંખ્યા A ઉમેરી શકીએ કે જેથી $a$, A, $b$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો આવી સંખ્યા Aને આપેલ સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ નો ***સમાંતર મધ્યક*** કહેવાય. આપણે નોંધીએ કે,

$$A - a = b - A, \text{ એટલે કે, } \quad A = \frac{a+b}{2}$$

આમ, બે સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ ના સમાંતર મધ્યકનું અર્થઘટન એટલે કે તેની સરેરાશ $\dfrac{a+b}{2}$ છે એમ પણ કહી શકાય. દાખલા તરીકે, બે સંખ્યાઓ 4 અને 16 નો સમાંતર મધ્યક 10 છે. આમ, આપણે 4 અને 16 ની વચ્ચે 10 મૂકી, 4, 10 અને 16 ને સમાંતર શ્રેણીનાં પદ રચ્યાં. હવે આ સ્વાભાવિક પ્રશ્ન ઉદ્ભવશે. આપણે બે સંખ્યાઓ વચ્ચે બે કે તેથી વધુ સંખ્યાઓ ઉમેરી શકીએ કે જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી હોય ? જુઓ કે આપેલ સંખ્યાઓ 4 અને 16 વચ્ચે 8 અને 12 ઉમેરતાં બનતી શ્રેણી 4, 8, 12, 16 પણ સમાંતર શ્રેણી છે.

વ્યાપક રીતે આપેલ બે સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ વચ્ચે આપણે ઇચ્છીએ તેટલી સંખ્યાઓ ઉમેરી શકીએ જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી હોય.

ધારો કે $a$ અને $b$ વચ્ચે $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ એવી $n$ સંખ્યાઓ છે કે જેથી $a, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, b$ સમાંતર શ્રેણી બને. અહીં, $b$ એ $(n + 2)$મું પદ છે. આથી, $b = a + [(n + 2) - 1]d = a + (n + 1)\,d$.

આથી, $$d = \frac{b-a}{n+1}.$$

આમ, $a$ અને $b$ વચ્ચેની $n$ સંખ્યાઓ નીચે પ્રમાણે હશે :

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

..... ..... ..... .....

..... ..... ..... .....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

**ઉદાહરણ 8 :** જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી બને તે રીતે 3 અને 24 વચ્ચે 6 સંખ્યાઓ ઉમેરો.

**ઉકેલ :** ધારો કે આપણે 3 અને 24 વચ્ચે $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ અને $A_6$ એ 6 સંખ્યાઓ એ રીતે ઉમેરીએ છીએ કે જેથી,

$3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, 24$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

અહીં $a = 3, b = 24, n = 8.$

આથી, $24 = 3 + (8 - 1) d,$

$\therefore\ d = 3.$

આમ, $A_1 = a + d = 3 + 3 = 6;$ $A_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 3 = 9;$

$A_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 3 = 12;$ $A_4 = a + 4d = 3 + 4 \times 3 = 15;$

$A_5 = a + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18;$ $A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21.$

આથી 3 અને 24 વચ્ચેની માંગેલ પ્રમાણેની 6 સંખ્યાઓ 6, 9, 12, 15, 18 અને 21 છે.

## સ્વાધ્યાય 9.2

1. 1 થી 2001 સુધીના અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.
2. 100 અને 1000 વચ્ચેની 5 ની ગુણિત પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
3. એક સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 2 છે અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો પછીનાં પાંચ પદના સરવાળાના એક ચતુર્થાંશ ભાગનો છે, તો સાબિત કરો કે 20 મું પદ –112 છે.
4. $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ સમાંતર શ્રેણીનાં કેટલાં પ્રથમ પદનો સરવાળો –25 થાય ?

**5.** એક સમાંતર શ્રેણીનું $p$ મું પદ $\frac{1}{q}$ અને $q$ મું પદ $\frac{1}{p}$ છે. $p \neq q$ માટે સાબિત કરો કે પ્રથમ $pq$ પદનો સરવાળો $\frac{1}{2}(pq+1)$ થાય.

**6.** સમાંતર શ્રેણી 25, 22, 19, ... નાં નિશ્ચિત સંખ્યાના શરૂઆતના પદનો સરવાળો 116 હોય તો છેલ્લું પદ શોધો.

**7.** જે સમાંતર શ્રેણીનું $k$ મું પદ $5k + 1$ હોય તેનાં પ્રથમ $n$ પદનો સરવાળો શોધો.

**8.** અચળ $p, q$ માટે જે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો $(pn + qn^2)$ હોય, તેનો સામાન્ય તફાવત શોધો.

**9.** પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n$ માટે બે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર $(5n+4):(9n+6)$ છે. તેમનાં 18 માં પદનો ગુણોત્તર મેળવો.

**10.** સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ $p$ પદોનો સરવાળો, પ્રથમ $q$ પદોના સરવાળા જેટલો થાય છે, તો પ્રથમ $(p + q)$ પદોનો સરવાળો શોધો.

**11.** એક સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ $p$, $q$ અને $r$ પદોના સરવાળા અનુક્રમે $a$, $b$ અને $c$ છે. સાબિત કરો કે $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$.

**12.** એક સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ $m$ અને $n$ પદોના સરવાળાના ગુણોત્તર $m^2 : n^2$ છે. સાબિત કરો કે $m$ માં તથા $n$ માં પદોનો ગુણોત્તર $(2m - 1) : (2n - 1)$ થાય.

**13.** એક સમાંતર શ્રેણીનાં $n$ પદોનો સરવાળો $3n^2 + 5n$ અને $m$ મું પદ 164 છે, તો $m$ નું મૂલ્ય શોધો.

**14.** જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી હોય તે રીતે 8 અને 26 વચ્ચે 5 સંખ્યાઓ ઉમેરો.

**15.** જો $a$ અને $b$ વચ્ચેનો સમાંતર મધ્યક $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ હોય, તો $n$ નું મૂલ્ય શોધો.

**16.** 1 અને 31 વચ્ચે $m$ સંખ્યાઓ એવી રીતે મૂકવામાં આવે છે કે જેથી બનતી શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી હોય અને 7મી અને $(m-1)$મી સંખ્યાનો ગુણોત્તર 5 : 9 હોય, તો $m$ નું મૂલ્ય શોધો.

**17.** એક વ્યક્તિ તેની લોનની ચુકવણી માટે પ્રથમ હપતામાં ₹ 100 ભરે છે. જો તે દર મહિને હપતાની રકમમાં ₹ 5 વધારે ભરે, તો તેના 30 માં હપતામાં કેટલી રકમ ચૂકવશે ?

**18.** એક બહુકોણમાં બે ક્રમિક અંતઃકોણોનો તફાવત 5° છે. જો સૌથી નાનો ખૂણો 120° નો હોય, તો તે બહુકોણની બાજુઓની સંખ્યા શોધો.

## 9.5 સમગુણોત્તર શ્રેણી

આપણે નીચેની શ્રેણીઓ વિચારીએ :

$$\text{(i) } 2,4,8,16,\ldots, \quad \text{(ii) } \frac{1}{9},\frac{-1}{27},\frac{1}{81},\frac{-1}{243}\ldots \quad \text{(iii) } 0.01,0.0001,0.000001,\ldots$$

આ બધી જ શ્રેણીઓમાં દરેક પદ કેવી રીતે વધે છે ? આપણે નોંધીએ કે પ્રથમ પદ સિવાયનું દરેક પદ કોઈક ચોક્કસ ભાતમાં આગળ વધે છે.

(i) માં આપણી પાસે $a_1 = 2, \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2$ એમ ચાલ્યા કરે છે.

(ii) માં જોઈ શકાય છે કે $a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{3}$ એમ ચાલ્યા કરે છે.

આ જ રીતે (iii) માં પદ કેવી રીતે વધે છે તે કહો.

આમ, જોઈ શકાય છે કે પ્રથમ પદ સિવાયના દરેક પદનો તેની આગળના પદ સાથેનો ગુણોત્તર અચળ છે. (i)માં અચળ ગુણોત્તર 2 છે; (ii)માં $-\frac{1}{3}$ અને (iii) માં અચળ ગુણોત્તર 0.01 છે. આવી શ્રેણીને ***સમગુણોત્તર શ્રેણી*** કહેવાય અને તેને ટૂંકમાં G. P. (*Geometric Progression*) લખાય.

જો શ્રેણી $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ માં પ્રત્યેક પદ શૂન્યેતર હોય અને $k \ge 1$ માટે, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (અચળ) હોય તો તે શ્રેણીને ***સમગુણોત્તર શ્રેણી*** કહેવાય.

$a_1 = a$ લેતાં, સમગુણોત્તર શ્રેણી $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$, મળે. $a$ ને ***પ્રથમ પદ*** અને $r$ ને સમગુણોત્તર શ્રેણીનો ***સામાન્ય ગુણોત્તર*** કહેવાય. સમગુણોત્તર શ્રેણીઓ (i), (ii) અને (iii) માટે સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 2, $-\frac{1}{3}$ અને 0.01 છે.

સમાંતર શ્રેણીની જેમ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં પણ પદોની સંખ્યા ખૂબ વધારે હોય ત્યારે $n$ મું પદ અથવા $n$ પદોનો સરવાળો, સૂત્રના ઉપયોગ વગર મુશ્કેલ બને. આથી તે આપણે આ પછીના વિભાગમાં તારવીશું. આ સૂત્રો માટે આપણે નીચેના સંકેતો ઉપયોગમાં લઈશું :

$a$ = પ્રથમ પદ, $r$ = સામાન્ય ગુણોત્તર, $l$ = છેલ્લું પદ,

$n$ = પદની સંખ્યા,

$S_n$ = પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો.

### 9.5.1 સમગુણોત્તર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ :

પ્રથમ પદ શૂન્યેતર સંખ્યા '$a$' હોય અને સામાન્ય ગુણોત્તર '$r$' હોય તેવી સમગુણોત્તર શ્રેણી વિશે વિચારીએ. તેનાં કેટલાંક પદ લખીએ. દ્વિતીય પદ મેળવવા પ્રથમ પદ $a$ ને $r$ વડે ગુણો આથી $a_2 = ar$. આ જ રીતે ત્રીજું પદ મેળવવા $a_2$ ને $r$ વડે ગુણો. આથી $a_3 = a_2r = ar^2$ અને એ જ રીતે.

નીચે આપણે આ અને કેટલાંક બીજાં વધારે પદ લખીએ :

$$\text{પ્રથમ પદ} = a_1 = a = ar^{1-1},$$

$$\text{દ્વિતીય પદ} = a_2 = ar = ar^{2-1},$$

$$\text{તૃતીય પદ} = a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$$

$$\text{ચોથું પદ} = a_4 = ar^3 = ar^{4-1},$$

$$\text{પાંચમું પદ} = a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$$

શું તમને કોઈ તરાહ દેખાય છે ? 16 મું પદ શું હશે ?

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

આમ, આ તરાહ દર્શાવે છે કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું $n$ મું પદ $a_n = ar^{n-1}$ થાય.

જેના પદની સંખ્યા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી કે અનંત હોય તે સમગુણોત્તર શ્રેણીને અનુક્રમે $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$; $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \ldots$ એમ લખી શકાય.

સંગત શ્રેઢી $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ અથવા $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$ સાંત અથવા અનંત સમગુણોત્તર શ્રેઢી કહેવાય.

### 9.5.2 સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો :

ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r$ છે. ધારો કે $S_n$ આ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો દર્શાવે છે.

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \qquad ... (1)$$

**વિકલ્પ 1** જો $r = 1$, તો $S_n = a + a + a + ... + a$ ($n$ વખત) $= na$

**વિકલ્પ 2** જો $r \neq 1$, તો (1) ને $r$ વડે ગુણતાં,

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \qquad ... (2)$$

(1) માંથી (2) બાદ કરતાં,

$(1 - r) S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$

આથી, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ અથવા $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

**ઉદાહરણ 9 :** સમગુણોત્તર શ્રેણી 5, 25,125,... માટે 10 મું પદ અને $n$ મું પદ શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં, $a = 5$ અને $r = 5$.

આથી, $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5(5)^9 = 5^{10}$

અને $a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n$.

**ઉદાહરણ 10 :** સમગુણોત્તર શ્રેણી 2,8,32, ... $n$ પદ સુધી, માટે કયું પદ 131072 હશે ?

**ઉકેલ :** ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું $n$ મું પદ 131072 છે.

અહીં, $a = 2$ અને $r = 4$.

આથી, $131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$

$\therefore 65536 = 4^{n-1}$

$\therefore 4^8 = 4^{n-1}$

આથી, $n - 1 = 8$, અર્થાત્ $n = 9$.

આમ, સમગુણોત્તર શ્રેણીનું 9 મું પદ 131072 થાય.

**ઉદાહરણ 11 :** એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ 24 અને છઠ્ઠું પદ 192 છે તો તેનું 10 મું પદ શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં, $a_3 = ar^2 = 24$ અને ... (1)

$a_6 = ar^5 = 192$ ... (2)

(2) અને (1) નો ગુણોત્તર લેતાં, $r = 2$ મળે.

(1) માં $r = 2$ મૂકતાં $a = 6$ મળે.

આમ, $a_{10} = 6 (2)^9 = 3072$.

**ઉદાહરણ 12 :** સમગુણોત્તર શ્રેણી $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+...$ નાં પ્રથમ $n$ પદોનો અને પ્રથમ 5 પદોનો સરવાળો શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં, $a = 1$ અને $r = \frac{2}{3}$. આથી,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

તથા $S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\frac{211}{243} = \frac{211}{81}$.

**ઉદાહરણ 13 :** સમગુણોત્તર શ્રેણી $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, ....$ ના પ્રથમ કેટલાં પદોનો સરવાળો $\frac{3069}{512}$ થાય ?

**ઉકેલ :** ધારો કે જરૂરી પદોની સંખ્યા $n$ છે.

આપેલ છે કે, $a = 3, r = \frac{1}{2}$ અને $S_n = \frac{3069}{512}$

વળી, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

આથી, $\frac{3069}{512} = \frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

$\therefore \quad \frac{3069}{3072} = 1-\frac{1}{2^n}$

$\therefore \quad \frac{1}{2^n} = 1-\frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$

$\therefore \quad 2^n = 1024 = 2^{10}$. આથી $n = 10$

**ઉદાહરણ 14 :** સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો $\frac{13}{12}$ છે અને તેમનો ગુણાકાર $-1$ છે તો સામાન્ય ગુણોત્તર અને તે પદો શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદ $\frac{a}{r}, a, ar$ છે.

આથી, $\frac{a}{r} + ar + a = \frac{13}{12}$ ... (1)

અને $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$ ... (2)

(2) પરથી આપણને $a^3 = -1$ અર્થાત્ $a = -1$ મળે. (માત્ર વાસ્તવિક બીજ લેતાં)

(1) માં $a = -1$ મૂકતાં,

$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12}$ અથવા $12r^2 + 25r + 12 = 0$.

આ $r$ નું દ્વિઘાત સમીકરણ છે. તેને ઉકેલતાં $r = -\frac{3}{4}$ અથવા $-\frac{4}{3}$ મળે.

$r = \frac{-3}{4}$ માટે પદો $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ અને $r = \frac{-4}{3}$ માટે પદો $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$ મળે.

**ઉદાહરણ 15 :** 7, 77, 777, 7777, ... નાં $n$ પદોનો સરવાળો શોધો.

**ઉકેલ :** આ એક સમગુણોત્તર શ્રેણી નથી, પરંતુ તેનાં પદો નીચે પ્રમાણે લખી સમગુણોત્તર શ્રેણી મેળવી શકાય :

$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots$ $n$ પદ સુધી

$= \frac{7}{9}[9 + 99 + 999 + 9999 + \dots$ $n$ પદ સુધી$]$

$= \frac{7}{9}[(10-1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \dots$ $n$ પદ$]$

$= \frac{7}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \dots$ $n$ પદ સુધી$) - (1 + 1 + 1 + \dots$ $n$ પદ$)]$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right].$$

**ઉદાહરણ 16 :** એક માણસને 2 માતા-પિતા, 4 દાદા-દાદી, 8 વડદાદા-વડદાદી વગેરે છે તો તેની 10 મી પેઢી સુધીના પૂર્વજોની સંખ્યા શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં, $a = 2$, $r = 2$ અને $n = 10$

સરવાળાના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

આથી, $S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$

આમ, એ માણસના 10 મી પેઢી સુધીના પૂર્વજોની સંખ્યા 2046 હશે.

### 9.5.3 સમગુણોત્તર મધ્યક :

બે ધન સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક $\sqrt{ab}$ છે. આથી 2 અને 8 નો સમગુણોત્તર મધ્યક 4 થાય. આપણે જોઈ શકીએ કે 2, 4, 8 સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદ છે. આ રીતે આગળ વધીએ તો વ્યાપક રીતે બે સંખ્યાઓના સમગુણોત્તર મધ્યકની સંકલ્પના મળે છે.

જેથી બનતી શ્રેણી સમગુણોત્તર હોય એ રીતે આપેલ બે ધન સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ વચ્ચે આપણી ઇચ્છાનુસાર સંખ્યાઓ ઉમેરી શકીએ.

ધારો કે એવી ધન સંખ્યાઓ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ એ $a$ અને $b$ વચ્ચે છે જેથી $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય. આમ, $(n+2)$મું પદ $b$ હોવાથી,

$$b = ar^{n+1} \quad \text{અથવા} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

આથી,
$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}},$$

$$G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}},$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

**ઉદાહરણ 17 :** સમગુણોત્તર શ્રેણી બને તે રીતે 1 અને 256 વચ્ચે ત્રણ સંખ્યાઓ ઉમેરો.

**ઉકેલ :** ધારો કે $1, G_1, G_2, G_3, 256$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તે રીતે $G_1, G_2, G_3$ એ 1 અને 256 વચ્ચે છે.

આથી, $256 = r^4$ આથી, $r = \pm 4$ (માત્ર વાસ્તવિક બીજ લેતાં,)

$r = 4$ માટે $G_1 = ar = 4$, $G_2 = ar^2 = 16$, $G_3 = ar^3 = 64$

આ જ રીતે, $r = -4$, માટે સંખ્યાઓ $-4$, 16 અને $-64$ મળે.

આમ, 1 અને 256 વચ્ચે 4, 16, 64 અથવા $-4, 16, -64$ મૂકતાં મળતી શ્રેણી સમગુણોત્તર શ્રેણી બને.

## 9.6 સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક વચ્ચેનો સંબંધ

ધારો કે A અને G બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અનુક્રમે $a$ અને $b$ ના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યકો છે.

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{અને} \quad G = \sqrt{ab}$$

આમ,

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \quad \ldots (1)$$

(1), પરથી તારવી શકાય કે $A \geq G$.

**ઉદાહરણ 18 :** બે ધન સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ ના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે 10 અને 8 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

**ઉકેલ :** આપેલ છે કે સમાંતર મધ્યક $\frac{a+b}{2} = 10$ ... (1)

અને સમગુણોત્તર મધ્યક $\sqrt{ab} = 8$ ... (2)

(1) અને (2) પરથી,

$$a + b = 20 \quad \text{... (3)}$$

$$ab = 64 \quad \text{... (4)}$$

(3) અને (4) ની કિંમતો, નિત્યસમ $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ માં મૂકતાં,

$$(a-b)^2 = 400 - 256 = 144$$

અથવા $a - b = \pm 12$ ...(5)

(3) અને (5) ને ઉકેલતાં,

$$a = 4, b = 16 \text{ અથવા } a = 16, b = 4$$

આમ, સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ એ 4, 16 અથવા 16, 4 છે.

## સ્વાધ્યાય 9.3

1. સમગુણોત્તર શ્રેણી $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ નું 20 મું પદ તથા $n$ મું પદ શોધો.

2. એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું 8 મું પદ 192 છે અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 છે, તો તેનું 12 મું પદ શોધો.

3. સમગુણોત્તર શ્રેણીના પાંચમાં, આઠમાં અને અગિયારમાં પદ અનુક્રમે $p$, $q$ અને $s$ હોય, તો બતાવો કે $q^2 = ps$.

4. એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ચોથું પદ બીજા પદના વર્ગ જેટલું છે અને પ્રથમ પદ -3 છે, તો તેનું 7 મું પદ શોધો.

5. (a) શ્રેણી $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$ નું કેટલામું પદ 128 થાય ?

   (b) શ્રેણી $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$ નું કેટલામું પદ 729 થાય ?

   (c) શ્રેણી $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ નું કેટલામું પદ $\frac{1}{19683}$ થાય ?

6. $x$ ની કઈ કિંમત માટે $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં થાય ?

નીચેની સમગુણોત્તર શ્રેણીઓમાં નિર્દેશિત પદોનો સરવાળો શોધો : પ્રશ્ન નંબર 7 થી 10 :

7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... પ્રથમ 20 પદ

8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots$ પ્રથમ $n$ પદ

9. $1, -a, a^2, -a^3, \ldots$ પ્રથમ $n$ પદ (જ્યાં $a \neq -1$).

10. $x^3, x^5, x^7, \ldots$ પ્રથમ $n$ પદ (જ્યાં $x \neq \pm 1$).

11. $\sum_{k=1}^{11} (2 + 3^k)$ ની કિંમત શોધો.

**12.** સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ 3 પદોનો સરવાળો $\frac{39}{10}$ છે અને તેમનો ગુણાકાર 1 છે, તો સામાન્ય ગુણોત્તર અને તે પદો શોધો.

**13.** સમગુણોત્તર શ્રેણી $3, 3^2, 3^3, \ldots$ નાં પ્રથમ કેટલાં પદોનો સરવાળો 120 થાય ?

**14.** સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ 3 પદોનો સરવાળો 16 છે અને પછીનાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 128 છે, તો આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ, સામાન્ય ગુણોત્તર અને $n$ પદોનો સરવાળો શોધો.

**15.** આપેલ ધન પદોવાળી સમગુણોત્તર શ્રેણી માટે $a = 729$ અને 7 મું પદ 64 હોય તો $S_7$ શોધો.

**16.** જેનાં પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો – 4 હોય અને પાંચમું પદ ત્રીજા પદથી ચાર ગણુ હોય એવી સમગુણોત્તર શ્રેણી શોધો.

**17.** જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ચોથા, દસમાં અને સોળમાં પદ અનુક્રમે $x$, $y$ અને $z$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x$, $y$, $z$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

**18.** 8, 88, 888, 8888... શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો શોધો.

**19.** શ્રેણીઓ 2, 4, 8, 16, 32 અને 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ નાં સંગત પદોના ગુણાકારનો સરવાળો શોધો.

**20.** શ્રેણીઓ $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ અને $A, AR, AR^2, \ldots AR^{n-1}$ નાં સંગત પદોના ગુણાકાર દ્વારા મળતાં પદો સમગુણોત્તર શ્રેણી બનાવે છે તેમ સાબિત કરો અને તેનો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

**21.** જેમાં ત્રીજું પદ, પ્રથમ પદથી 9 જેટલું વધારે હોય અને બીજું પદ ચોથા પદથી 18 જેટલું વધારે હોય તેવી સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદ શોધો.

**22.** સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં $p$, $q$, $r$ માં પદો અનુક્રમે $a$, $b$, $c$ હોય તો સાબિત કરો કે,

$$a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1.$$

**23.** સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a$ અને $n$ મું પદ $b$ છે. જો $n$ પદોનો ગુણાકાર P હોય, તો સાબિત કરો કે $P^2 = (ab)^n$.

**24.** સાબિત કરો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોના સરવાળાનો $(n + 1)$ પદથી $(2n)$ માં પદ સુધીના સરવાળા સાથેનો ગુણોત્તર $\frac{1}{r^n}$ થાય.

**25.** જો $a$, $b$, $c$, $d$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો બતાવો કે

$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

**26.** 3 અને 81 વચ્ચે બે સંખ્યાઓ ઉમેરો કે જેથી બનતી શ્રેણી સમગુણોત્તર હોય.

**27.** જો $a$ અને $b$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ હોય, તો $n$ નું મૂલ્ય શોધો.

**28.** બે સંખ્યાઓનો સરવાળો તેમના સમગુણોત્તર મધ્યક કરતાં છ ગણો હોય, તો બતાવો કે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર $\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ થાય.

**29.** બે ધન સંખ્યાઓના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યકો અનુક્રમે A અને G હોય, તો સાબિત કરો કે તે સંખ્યાઓ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ છે.

**30.** બૅક્ટેરિયાના ઉછેરમાં તેની સંખ્યા દર કલાકે બમણી થાય છે. જો શરૂઆતમાં બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા 30 હોય, તો 2 કલાક, 4 કલાક, અને $n$ માં કલાકે બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા શોધો.

**31.** બૅંકમાં ₹ 500, 10% ના વાર્ષિક ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે મૂકીએ, તો 10 વર્ષને અંતે કેટલી રકમ મળે ?

**32.** જો દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજોના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે 8 અને 5 હોય, તો તે દ્વિઘાત સમીકરણ મેળવો.

## 9.7 વિશિષ્ટ શ્રેણીઓનાં $n$ પદોના સરવાળા

આપણે કેટલીક વિશિષ્ટ શ્રેણીઓનાં પ્રથમ $n$ પદોના સરવાળા શોધીશું, જેમ કે ;

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (પ્રથમ $n$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો)

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ (પ્રથમ $n$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો)

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ (પ્રથમ $n$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાના ઘનનો સરવાળો)

આપણે તેને એક પછી એક વિચારીએ.

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, તેથી $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (વિભાગ 9.4 જુઓ.)

(ii) અહીં, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

આપણે નિત્યસમ, $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ લઈએ.

$k = 1, 2, \ldots, n$ ક્રમાનુસાર મૂકતાં,

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$

..........................................

..........................................

..........................................

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

બંને બાજુનાં પદોનો સરવાળો કરતાં,

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$\therefore \quad n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

(i) પરથી કહી શકાય કે $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

આથી, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n\right]$

$$= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) અહીં, $S_n = 1^3 + 2^3 + ...+n^3$

આપણે નિત્યસમ $(k + 1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ લઈએ.

$k = 1, 2, 3\ldots n$, લેતાં,

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$

..................................................

..................................................

..................................................

$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$

$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

બંને બાજુનાં પદોનો સરવાળો કરતાં,

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2) + 4(1 + 2 + 3 + ...+ n) + n$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n \quad \text{... (1)}$$

(i) અને (ii) પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ અને } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

આ કિંમતો (1) માં મૂકતાં,

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} - n$$

$$\therefore \quad 4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n+1) - n$$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$= n^2(n+1)^2$$

આથી, $$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

**ઉદાહરણ 19 :** 5 + 11 + 19 + 29 + 41… નાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે, $S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

અથવા $S_n = 5 + 11 + 19 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = 5 + 11 + 19 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$S_n = \quad 5 + 11 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

બાદબાકી કરતાં, $0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + \ldots (n-1)$ પદો$] - a_n$ મળે.

$$\therefore \quad a_n = 5 + \frac{(n-1)[12+(n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$$

આથી,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{1}^{n} k + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(n+2)(n+4)}{3}.$$

નોંધ : અત્રે આપણે $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ નો ઉપયોગ કર્યો છે.

**ઉદાહરણ 20 :** જે શ્રેણીનું $n$ મું પદ $n(n+3)$ હોય તેનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો શોધો.

**ઉકેલ :** આપેલ છે કે $a_n = n(n+3) \quad = n^2 + 3n$

આથી, $n$ પદોનો સરવાળો,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

## સ્વાધ્યાય 9.4

પ્રશ્ન 1 થી 7 માં આપેલ શ્રેઢીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો શોધો :

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + ...$

2. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + ...$

3. $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + ...$

4. $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + ...$

5. $5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 20^2$

6. $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + ...$

7. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + ...$

પ્રશ્ન નંબર 8 થી 10 માં જે શ્રેઢીનું $n$ મું પદ આપેલ હોય, તેનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો શોધો :

8. $n\,(n+1)\,(n+4)$.

9. $n^2 + 2^n$

10. $(2n - 1)^2$

## 9.8 અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણી અને તેનો સરવાળો

$a, ar, ar^2, ar^3, ...$ પ્રકારની સમગુણોત્તર શ્રેણીને અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણી કહે છે. હવે અનંત સમગુણોત્તર શ્રેણીના સરવાળાનું સૂત્ર શોધવા આપણે એક ઉદાહરણથી શરૂઆત કરીશું.

સમગુણોત્તર શ્રેણી, $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, ...$ લો.

અહીં, $a = 1,\ r = \frac{2}{3}$.

આથી, $S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

$n$ ની કિંમત મોટી અને વધુ મોટી લઈને આપણે $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ની વર્તણૂંકનો અભ્યાસ કરીએ.

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ | 0.6667 | 0.1316872428 | 0.01734152992 | 0.00030072866 |

આપણે અનુભવીશું કે જેમ $n$ ની કિંમતો મોટી અને મોટી થતી જાય છે તેમ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ની કિંમત શૂન્યની નજીક અને નજીક જાય છે. ગાણિતિક રીતે આપણે કહીશું કે $n$ ની કિંમત ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ નું મૂલ્ય ખૂબ જ નાનું થતું જાય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, જેમ $n \to \infty$, તેમ $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$. એટલા માટે આપણને, અનંત પદોનો સરવાળો $S_\infty = 3$ મળે છે.

હવે, જો સમગુણોત્તર શ્રેણી $a, ar, ar^2, ...$,ના સામાન્ય ગુણોત્તર $r$ નું નિરપેક્ષ મૂલ્ય 1 કરતાં ઓછું હોય તો,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

આ વિકલ્પમાં, $|r| < 1$ હોવાથી જેમ, $n \to \infty$, તેમ $r^n \to 0$

માટે $$S_n \to \frac{a}{1-r}$$

સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં અનંત પદોનો સરવાળાને $S_\infty$ અથવા S વડે દર્શાવાય છે.

આમ, આપણે $S = \frac{a}{1-r}$ મેળવીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે,

(i) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

(ii) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

## સ્વાધ્યાય 9.5

નીચેની દરેક સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં અનંત પદોનો સરવાળો શોધો : (પ્રશ્ન 1 થી 4)

**1.** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

**2.** 6, 1.2, 0.24, ...

**3.** $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, \ldots$

**4.** $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \ldots$

**5.** સાબિત કરો કે : $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \ldots = 3$

**6.** $|a| < 1$ તથા $|b| < 1$ માટે $x = 1 + a + a^2 + \ldots$ અને $y = 1 + b + b^2 + \ldots$, સાબિત કરો કે

$$1 + ab + a^2b^2 + \ldots = \frac{xy}{x+y-1}$$

## પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

**ઉદાહરણ 21 :** જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનાં $p, q, r$ અને $s$ માં પદો સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો બતાવો કે $(p-q)$, $(q-r)$ અને $(r-s)$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

**ઉકેલ :** અહીં,

$$a_p = a + (p-1)d \quad \ldots (1)$$
$$a_q = a + (q-1)d \quad \ldots (2)$$
$$a_r = a + (r-1)d \quad \ldots (3)$$
$$a_s = a + (s-1)d \quad \ldots (4)$$

આપેલ છે કે, $a_p, a_q, a_r$ અને $a_s$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

આથી, $$\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q-r}{p-q}$$ (કેમ ?) ... (5)

આ જ રીતે, $$\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r-s}{q-r}$$ (કેમ ?) ... (6)

આમ, (5) અને (6) પરથી,

$\frac{q-r}{p-q} = \frac{r-s}{q-r}$, અર્થાત્, $p-q$, $q-r$ અને $r-s$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

**ઉદાહરણ 22 :** જો $a, b, c$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ તો સાબિત કરો કે $x, y, z$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

**ઉકેલ :** ધારો કે $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$

આથી, $a = k^x$, $b = k^y$ અને $c = k^z$. ... (1)

$a, b, c$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી, $b^2 = ac$ ... (2)

(1) અને (2) પરથી, $k^{2y} = k^{x+z}$

$\therefore 2y = x + z.$

આથી $x, y$ અને $z$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

**ઉદાહરણ 23 :** જો $a, b, c, d$ અને $p$ ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય અને $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$, તો બતાવો કે $a, b, c$ અને $d$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

**ઉકેલ :** આપેલ છે કે,

$(a^2 + b^2 + c^2)\,p^2 - 2\,(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$ ... (1)

પરંતુ ડા.બા. $= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2)$,

આથી, $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \le 0$ ... (2)

પરંતુ વાસ્તવિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો અનૃણ હોય. આથી (1) અને (2) પરથી,

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$$

અર્થાત્ $ap - b = 0$, $bp - c = 0$, $cp - d = 0$

$$\therefore \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = p$$

આથી, $a, b, c$ અને $d$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

**ઉદાહરણ 24 :** જો $p, q, r$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને સમીકરણો $px^2 + 2qx + r = 0$ અને $dx^2 + 2ex + f = 0$ નું એક બીજ સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

**ઉકેલ :** સમીકરણ $px^2 + 2qx + r = 0$ નાં બીજ

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

$p, q, r$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોવાથી $q^2 = pr$.

આમ, $x = \frac{-q}{p}$. પરંતુ $\frac{-q}{p}$ એ $dx^2 + 2ex + f = 0$ નું પણ બીજ છે. (કેમ ?)

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0,$$

$$\therefore \quad dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

(1) ને $pq^2$ વડે ભાગતાં અને $q^2 = pr$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{fp}{pr} = 0,$$

$$\therefore \quad \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

આથી, $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

## પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 9

1. સાબિત કરો કે સમાંતર શ્રેણીમાં $(m + n)$ માં તથા $(m - n)$ માં પદોનો સરવાળો $m$ માં પદ કરતાં બમણો થાય છે.
2. જો સમાંતર શ્રેણીમાં આવેલી ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો 24 અને તેમનો ગુણાકાર 440 હોય તો આ સંખ્યાઓ શોધો.
3. જો સમાંતર શ્રેણીમાં આવેલાં પ્રથમ $n$, $2n$, $3n$ પદોનાં સરવાળા અનુક્રમે $S_1$, $S_2$ અને $S_3$ હોય, તો બતાવો કે $S_3 = 3(S_2 - S_1)$.
4. 200 અને 400 વચ્ચેની 7 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
5. 1 થી 100 સુધીની 2 અથવા 5 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
6. જેને 4 વડે ભાગતાં શેષ 1 વધે તેવી બે આંકડાની સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
7. જો વિધેય $f(x + y) = f(x) f(y)$ $(x, y \in \mathbf{N})$ એવી રીતે વ્યાખ્યાયિત હોય કે જેથી, $f(1) = 3$ અને $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$, તો $n$ નું મૂલ્ય શોધો.
8. સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં કેટલાંક પદોનો સરવાળો 315 છે. તેનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 5 અને 2 છે. તેનું છેલ્લું પદ અને પદોની સંખ્યા શોધો.

**9.** સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 1 છે. તેના ત્રીજા અને પાંચમાં પદોનો સરવાળો 90 છે. આ સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

**10.** સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં આવેલી ત્રણ સંખ્યાઓનો સરવાળો 56 છે. જો આ સંખ્યાઓમાંથી અનુક્રમે 1, 7 અને 21 બાદ કરવામાં આવે, તો આપણને સમાંતર શ્રેણી મળે છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

**11.** એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પદોની સંખ્યા યુગ્મ છે. જો બધાં જ પદોનો સરવાળો, અયુગ્મ સ્થાને રહેલ પદોના સરવાળા કરતાં 5 ગણો હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

**12.** સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો 56 છે. તેનાં છેલ્લાં ચાર પદોનો સરવાળો 112 છે. તેનું પ્રથમ પદ 11 છે, તો પદોની સંખ્યા શોધો.

**13.** જો $\dfrac{a+bx}{a-bx}=\dfrac{b+cx}{b-cx}=\dfrac{c+dx}{c-dx}(x\neq 0)$, તો સાબિત કરો કે $a, b, c$ અને $d$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

**14.** જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો S, ગુણાકાર P અને પ્રથમ $n$ પદોનાં વ્યસ્ત પદોનો સરવાળો R હોય, તો સાબિત કરો કે $P^2R^n = S^n$.

**15.** જો સમાંતર શ્રેણીનાં $p, q$ અને $r$ માં પદો અનુક્રમે $a, b, c$ હોય તો બતાવો કે,

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$$

**16.** જો $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right), b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right), c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો સાબિત કરો કે $a, b, c$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

**17.** જો $a, b, c, d$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો સાબિત કરો કે $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

**18.** જો $a, b, c, d$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય અને જો $a$ અને $b$, $x^2-3x+p=0$ નાં બીજ હોય અને $c, d$, $x^2-12x+q=0$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે $(q+p):(q-p)=17:15$.

**19.** બે સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ ના સમાંતર અને સમગુણોત્તર મધ્યકોનો ગુણોત્તર $m : n$ છે. બતાવો કે,

$$a:b=\left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right).$$

**20.** જો $a, b, c$ સમાંતર શ્રેણીમાં; $b, c, d$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં અને $\dfrac{1}{c},\dfrac{1}{d},\dfrac{1}{e}$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો સાબિત કરો કે, $a, c, e$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

**21.** નીચેની શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો શોધો :

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $0.6 + 0.66 + 0.666 + \ldots$

**22.** શ્રેઢી $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + \ldots$ ($n$ પદો)નું 20 મું પદ શોધો.

**23.** શ્રેઢી $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \ldots$ નાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો શોધો.

**24.** જો $S_1$, $S_2$, $S_3$ અનુક્રમે પ્રથમ $n$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ સરવાળો, તેમના વર્ગોનો સરવાળો અને તેમના ઘનનો સરવાળો દર્શાવે, તો સાબિત કરો કે, $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$.

**25.** નીચેની શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો શોધો.

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+...$$

**26.** સાબિત કરો કે $\dfrac{1\times2^2+2\times3^2+...+n\times(n+1)^2}{1^2\times2+2^2\times3+...+n^2\times(n+1)}=\dfrac{3n+5}{3n+1}$.

**27.** એક ખેડૂત પુનઃવેચાણનું ટ્રેક્ટર ₹ 12,000 માં ખરીદે છે. તે ₹ 6000 રોકડા ચૂકવે છે અને બાકીની રકમ ₹ 500 ના વાર્ષિક હપતામાં અને 12 % વ્યાજે ચૂકવે છે, તો તેણે ટ્રેક્ટરની શું કિંમત ચૂકવી હશે ?

**28.** શમશાદ અલી એક સ્કૂટર ₹ 22,000 માં ખરીદે છે. તે ₹ 4000 રોકડા ચૂકવે છે અને બાકીની રકમ ₹ 1000 ના વાર્ષિક હપતાથી અને 10 % વ્યાજે ચૂકવે છે, તો તેણે સ્કૂટરની શું કિંમત ચૂકવી હશે ?

**29.** એક માણસ તેના ચાર મિત્રોને પત્ર લખે છે. તે દરેકને સૂચના આપે છે કે આ પત્ર તેમના અન્ય ચાર મિત્રોને મોકલે અને તેમને પણ આ જ પ્રમાણેની સાંકળ આગળ વધારવાની છે. માની લઈએ કે આ સાંકળ તૂટતી નથી અને દરેક પત્ર મોકલવાનો ખર્ચ 50 પૈસા આવે છે, તો 8 વખત પત્ર મોકલવાનો ખર્ચ શોધો.

**30.** એક માણસ વાર્ષિક 5% ના સાદા વ્યાજે બૅંકમાં ₹ 10,000 જમા કરાવે છે, તો તેણે જમા કરાવેલ રકમથી 15માં વર્ષમાં જમા રકમ અને 20 વર્ષ પછીની કુલ રકમ શોધો.

**31.** એક વેપારી ગણતરી કરે છે કે એક મશીન તેને ₹ 15,625 માં મળે છે અને દર વર્ષે તેનો ઘસારો 20 % છે, તો પાંચ વર્ષ પછી આ મશીનની અંદાજિત કિંમત કેટલી હશે ?

**32.** એક કામ અમુક દિવસમાં પૂરું કરવા 150 માણસો રોકાયેલા હતા. બીજા દિવસે 4 માણસ કામ છોડી દે છે, ત્રીજા દિવસે બીજા 4 માણસો કામ છોડી દે છે અને આમ ચાલ્યા કરે છે. આવું થવાથી કામ પૂરું થવામાં 8 દિવસ વધુ લાગે છે તો કામ કેટલા દિવસમાં પૂરું થાય તે શોધો.

## સારાંશ

- શ્રેણીનો અર્થ કોઈક નિયમને અનુસરતાં નિશ્ચિત ક્રમમાં ગોઠવાતી સંખ્યાઓ. વળી, આપણે શ્રેણીને એક વિધેય તરીકે લઈશું. તેનો પ્રદેશ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ અથવા $\{1, 2, 3, ....k\}$ પ્રકારનો ઉપગણ હોય. જે શ્રેણીમાં પદોની સંખ્યા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી હોય તેને સાન્ત શ્રેણી કહેવાય. પદોની સંખ્યા સાન્ત ના હોય તેવી શ્રેણી અનંત શ્રેણી કહેવાય.
- ધારો કે $a_1, a_2, a_3, ...$ શ્રેણી છે, તો તેના સરવાળા $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ ને શ્રેઢી કહેવાય.

  જે શ્રેઢીમાં પદની સંખ્યા નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી હોય તેને સાન્ત શ્રેઢી કહેવાય.
- જ્યાં, પદો એક નિશ્ચિત અચળ જેટલાં વધે અથવા ઘટે એ સમાંતર શ્રેણી (A.P.) કહેવાય છે. આ અચળને સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત કહે છે. સામાન્ય રીતે, સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a$, સામાન્ય તફાવત $d$ અને છેલ્લું પદ $l$ દ્વારા દર્શાવાય છે. સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ અથવા $n$ મું પદ $a_n = a + (n - 1)d$ છે. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો $S_n$ છે. તે $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=\frac{n}{2}(a+l)$ દ્વારા મેળવાય.
- બે સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ નો સમાંતર મધ્યક $\frac{a+b}{2}$ છે. અર્થાત્, $a$, A, $b$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

◆ જો આપેલ શ્રેણીમાં કોઈપણ પદનો તેની આગળના શૂન્યેતર પદ સાથેનો ગુણોત્તર સમાન હોય તો તે શ્રેણી સમગુણોત્તર શ્રેણી કહેવાય. આ અચળ કિંમતને સામાન્ય ગુણોત્તર કહેવાય. સામાન્ય રીતે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r$ વડે દર્શાવાય. સમગુણોત્તર શ્રેણીનું વ્યાપક પદ અથવા $n$ મું પદ $a_n = ar^{n-1}$ છે.

સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ $n$ પદોનો સરવાળો,

$$\text{જો } r \neq 1 \text{ હોય એ માટે } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ અથવા } \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

◆ બે ધન સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ નો સમગુણોત્તર મધ્યક $\sqrt{ab}$ છે. અર્થાત્ $a$, G, $b$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

### *Historical Note*

Evidence is found that Babylonians, some 4000 years ago, knew of arithmetic and geometric sequences. According to Boethius (510), arithmetic and geometric sequences were known to early Greek writers. Among the Indian mathematician, Aryabhatta (476) was the first to give the formula for the sum of squares and cubes of natural numbers in his famous work *Aryabhatiyam*, written around 499. He also gave the formula for finding the sum to $n$ terms of an arithmetic sequence starting with $p^{th}$ term. Noted Indian mathematicians Brahmgupta (598), Mahavira (850) and Bhaskara (1114-1185) also considered the sum of squares and cubes. Another specific type of sequence having important applications in mathematics, called *Fibonacci sequence*, was discovered by Italian mathematician Leonardo Fibonacci (1170-1250). Seventeenth century witnessed the classification of series into specific forms. In 1671 James Gregory used the term infinite series in connection with infinite sequence. It was only through the rigorous development of algebraic and set theoretic tools that the concepts related to sequence and series could be formulated suitably.