પ્રકરણ 10

રેખાઓ

❖ *Geometry, as a logical system, is a means and even the most powerful means to make children feel the strength of the human spirit that is of their own spirit. – H. FREUDENTHAL* ❖

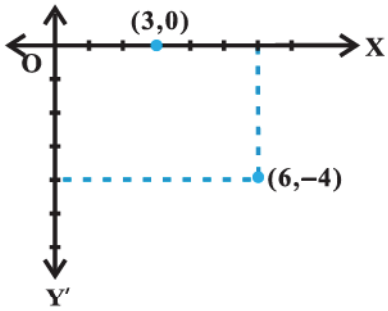
10.1 પ્રાસ્તાવિક

René Descartés
(1596 -1650)

આપણે આગળના વર્ગોમાં દ્વિ-પરિમાણ યામભૂમિતિથી પરિચિત થયાં છીએ. મુખ્યત્વે તે બીજગણિત અને ભૂમિતિનો સમન્વય છે. બીજગણિતના ઉપયોગથી ભૂમિતિનો વ્યવસ્થિત અભ્યાસ પ્રતિષ્ઠિત તત્ત્વચિંતક અને ગણિતશાસ્ત્રી ***René Descartes*** એ પોતાના ઈ.સ.1637 માં પ્રકાશિત પુસ્તક *'La Géométry'* માં સૌપ્રથમ વખત કર્યો હતો. આ પુસ્તકમાં વક્રના સમીકરણની સંકલ્પના રજૂ થઈ અને આ રીતે ભૂમિતિના અભ્યાસમાં વિશ્લેષણ-પદ્ધતિ દાખલ થઈ. વિશ્લેષણ અને ભૂમિતિના સમન્વયથી વિશ્લેષણાત્મક ભૂમિતિ બને છે. આગળના વર્ગોમાં આપણે યામાક્ષો, યામ-સમતલ, યામ-સમતલમાં બિંદુનું નિરૂપણ, બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર, વિભાજન-સૂત્ર વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો તે યામ-ભૂમિતિનો અભ્યાસ છે. આ બધી યામ-ભૂમિતિની પાયાની સંકલ્પનાઓ છે.

ચાલો હવે આપણે આગળના વર્ગોમાં અભ્યાસ કરેલ યામ-ભૂમિતિનું ટૂંકમાં પુનરાવર્તન કરીએ. આકૃતિ 10.1 એ બિંદુઓ (6, – 4) અને (3, 0) નું XY-સમતલમાં નિરૂપણ દર્શાવે છે.

અહીં આપણે નોંધીએ કે બિંદુ (6, – 4) એ x-અક્ષની ધન દિશામાં y-અક્ષથી 6 એકમ અંતરે અને y-અક્ષની ઋણ દિશામાં x-અક્ષથી 4 એકમ અંતરે છે. તે જ રીતે (3, 0) એ x-અક્ષની ધન દિશામાં y-અક્ષથી 3 એકમ અંતરે અને x-અક્ષથી શૂન્ય અંતરે છે.



આકૃતિ 10.1

આ ઉપરાંત આપણે નીચે દર્શાવેલ કેટલાંક અગત્યનાં સૂત્રો પણ શીખી ગયાં :

I. બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ઉદાહરણ તરીકે, (6, – 4) અને (3, 0) વચ્ચેનું અંતર

$$\sqrt{(3-6)^2+(0+4)^2}=\sqrt{9+16}=5 \text{ એકમ.}$$

II. બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2)ને જોડતા રેખાખંડનું $m : n$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુના યામ

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right).$$

ઉદાહરણ તરીકે, A(1, –3) અને B (–3, 9) બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું 1: 3 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતાં બિંદુના યામ

$$x=\frac{1\cdot(-3)+3\cdot 1}{1+3}=0 \text{ અને } y=\frac{1\cdot 9+3\cdot(-3)}{1+3}=0.$$

III. વિશિષ્ટ કિસ્સા તરીકે જો $m = n$ હોય, તો બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ મળે.}$$

IV. (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$\frac{1}{2}\left| x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

ઉદાહરણ તરીકે, (4, 4), (3, – 2) અને (– 3, 16) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$\frac{1}{2}\left|4(-2-16)+3(16-4)+(-3)(4+2)\right|=\frac{|-54|}{2}=27.$$

નોંધ : જો ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ શૂન્ય થાય, તો ત્રણ બિંદુઓ A, B, C એક જ રેખા પર હોય. આમ તે સમરેખ થાય.

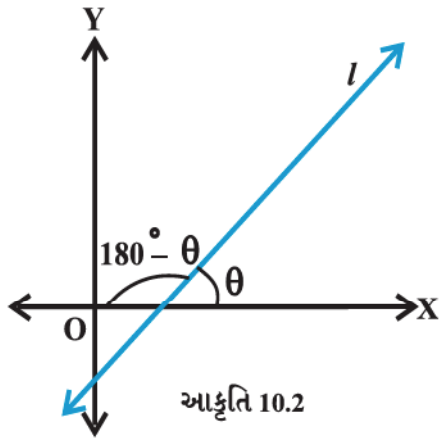
આ પ્રકરણમાં આપણે યામ-ભૂમિતિનો વધુ અભ્યાસ કરીશું. તેમાં યામ-ભૂમિતિની સૌથી સરળ આકૃતિ રેખાના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું. રેખા સાદામાં સાદી આકૃતિ હોવા છતાં ભૂમિતિમાં તેની સંકલ્પના ઘણી મહત્ત્વની છે. તેના રોજિંદા અનુભવો તો ઘણા રસપ્રદ અને ઉપયોગી રીતે દૃશ્યમાન થતા હોય છે. આપણે રેખાને બૈજિક રીતે દર્શાવવા પર અને તેના ઢાળ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીશું.

10.2 રેખાનો ઢાળ

યામ સમતલમાં કોઈપણ રેખા x-અક્ષ સાથે એકબીજાના પૂરકકોણ હોય તેવા બે ખૂણા બનાવે.

યામ-સમતલમાં આપેલી એક રેખા x-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાની વિરુધ્ધ દિશામાં જે ખૂણો બનાવે તેનું માપ θ હોય, તો તેને રેખા l નો ઝોક કહે છે. સ્પષ્ટ છે કે $0° \leq \theta \leq 180°$ (આકૃતિ 10.2).

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, જો રેખા x-અક્ષને સમાંતર કે તેની સાથે સંપાતી હોય તો તેનો ઝોક 0° છે અને જો તે શિરોલંબ રેખા હોય (y-અક્ષને સમાંતર કે સંપાતી)નો તેનો ઝોક 90° છે.



આકૃતિ 10.2

વ્યાખ્યા 1 : *જો θ એ રેખા l નો ઝોક હોય તો tan θ ને રેખા l નો **ઢાળ** કહે છે.*

જો રેખાનો ઝોક 90° હોય તો તેનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત ન બને. રેખાના ઢાળને સંકેતમાં m વડે દર્શાવાય છે.

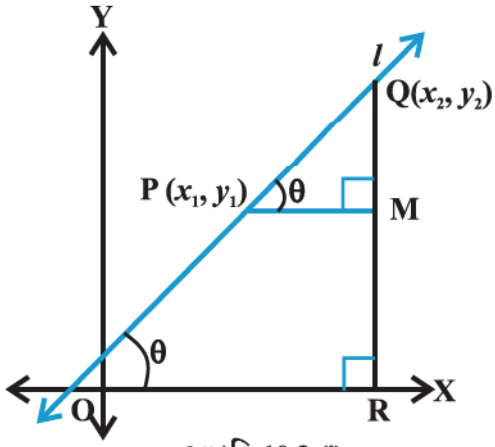
આમ, $m = tan\ \theta,\ \theta \neq 90°$

સ્પષ્ટ છે કે x-અક્ષનો ઢાળ શૂન્ય છે અને y-અક્ષનો ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત છે.

10.2.1 જો રેખા પર કોઈ પણ બે બિંદુઓ આપ્યાં હોય, તો તે રેખાનો ઢાળ.

આપણે જાણીએ છીએ કે બે બિંદુઓ એક રેખા સુનિશ્ચિત કરે છે. તેથી આપણે રેખાના ઢાળને તેની પર આવેલાં બે બિંદુને જોડતા રેખાખંડના ઢાળનો ઉપયોગ કરી મેળવીશું.

ધારો કે $P(x_1, y_1)$ અને $Q(x_2, y_2)$ શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખા l પરનાં બે બિંદુઓ છે. તેનો ઝોક θ છે. સ્પષ્ટ છે કે $x_1 \neq x_2$, નહિ તો રેખા x-અક્ષને લંબ થશે અને તેનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી. રેખા l નો ઝોક લઘુકોણ કે ગુરુકોણ હોઈ શકે. આપણે બંને વિકલ્પોનો વિચાર કરીશું.



આકૃતિ 10.3 (i)

આકૃતિ 10.3 (i) અને (ii) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે x-અક્ષને લંબ QR અને RQ ને લંબ PM દોરો.

વિકલ્પ 1 જ્યારે θ લઘુકોણ હોય :

આકૃતિ 10.3 (i) માં $\angle MPQ = \theta$.

$\therefore$ રેખા l નો ઢાળ $= m = tan\ \theta$. ... (1)

પરંતુ ΔMPQ માં, $tan\ \theta = \dfrac{MQ}{MP} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. ... (2)

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ મળશે.

વિકલ્પ II જ્યારે θ ગુરુકોણ હોય :

આકૃતિ 10.3 (ii) માં

$\angle MPQ = 180° - \theta$

$\therefore \quad \theta = 180° - \angle MPQ$

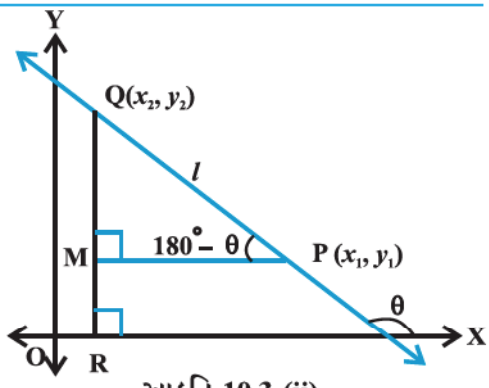
હવે, રેખા l નો ઢાળ

$$m = \tan\theta$$

$$= \tan(180° - \angle MPQ)$$

$$= -\tan \angle MPQ$$

$$= -\frac{MQ}{MP} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



આકૃતિ 10.3 (ii)

આમ, બંને વિકલ્પમાં જોઈ શકાય છે કે બિંદુઓ A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2)માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

10.2.2 બે રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર કે લંબ હોય તે માટેની ઢાળના સંદર્ભમાં શરત

ધારો કે યામ-સમતલમાં શિરોલંબ ન હોય તેવી બે રેખાઓ l_1 અને l_2 છે. રેખાઓ l_1 અને l_2 ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે. ધારો કે તેમના ઝોક અનુક્રમે α અને β છે.

હવે, જો રેખા l_1 એ રેખા l_2 ને સમાંતર હોય, તો તેમના ઝોક સમાન થશે (આકૃતિ 10.4.)

આમ, $\alpha = \beta$. તેથી $\tan\alpha = \tan\beta$.

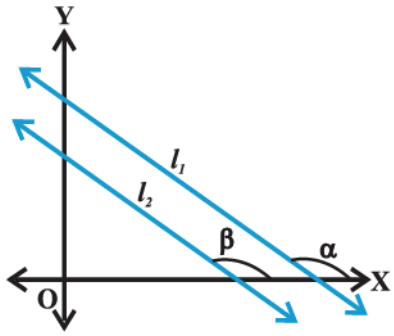
$\therefore \quad m_1 = m_2$ એટલે કે તેમના ઢાળ સમાન છે.

એથી, ઊલટું, ધારો કે બે રેખાઓ l_1 અને l_2 ના ઢાળ સરખા છે. એટલે કે $m_1 = m_2$

$\therefore \quad \tan\alpha = \tan\beta$

$\tan$ વિધેયના ગુણધર્મ પ્રમાણે $\alpha = \beta$ (α તથા β એ 0° થી 180° વચ્ચે).

$\therefore$ રેખાઓ સમાંતર થાય.



આકૃતિ 10.4

આમ, શિરોલંબ ના હોય તેવી બે રેખાઓ સમાંતર હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત એ છે કે તેમના ઢાળ સમાન થાય.

હવે જો રેખાઓ l_1 અને l_2 પરસ્પર લંબ હોય (આકૃતિ 10.5), તો $\beta = \alpha + 90°$.

$$\therefore \tan\beta = \tan(\alpha + 90°) = -\cot\alpha = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

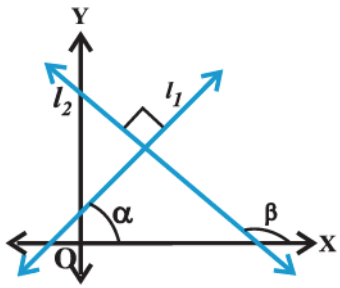
એટલે કે $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ અથવા $m_1 m_2 = -1$

આથી, ઊલટું જો $m_1 m_2 = -1$, તો $\tan\alpha \tan\beta = -1$.

$\therefore \quad \tan\alpha = -\cot\beta = \tan(\beta + 90°)$ અથવા $\tan(\beta - 90°)$

$\therefore$ α અને β નો તફાવત 90° છે.

આથી, રેખાઓ l_1 અને l_2 પરસ્પર લંબ છે.



આકૃતિ 10.5

આમ, શિરોલંબ ન હોય તેવી બે રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત એ છે કે તેમના ઢાળ

એકબીજાના ઋણ વ્યસ્ત હોય.

આમ, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ અથવા, $m_1 m_2 = -1$.

હવે, નીચેનાં ઉદાહરણોને સમજીએ.

ઉદાહરણ 1 : રેખાઓના ઢાળ શોધો.

(a) $(3, -2)$ અને $(-1, 4)$ માંથી પસાર થતી,

(b) $(3, -2)$ અને $(7, -2)$ માંથી પસાર થતી,

(c) $(3, -2)$ અને $(3, 4)$ માંથી પસાર થતી,

(d) x-અક્ષની ધન દિશા સાથે $60°$નો ખૂણો બનાવતી.

ઉકેલ : (a) $(3, -2)$ અને $(-1, 4)$ માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}.$$

(b) $(3, -2)$ અને $(7, -2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m = \frac{-2-(-2)}{7-3} = \frac{0}{4} = 0.$$

(c) $(3, -2)$ અને $(3, 4)$ માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ $m = \frac{4-(-2)}{3-3} = \frac{6}{0}$ વ્યાખ્યાયિત નથી.

(d) અહીં, રેખાનો ઝોક $\alpha = 60°$.

તેથી, રેખાનો ઢાળ $m = \tan 60° = \sqrt{3}$.

10.2.3 બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો

જ્યારે એક સમતલમાં આવેલી એક કરતાં વધુ રેખાઓનો વિચાર કરીએ ત્યારે તે પરસ્પર સમાંતર હોય અથવા પરસ્પર છેદતી રેખાઓ હોઈ શકે. અહીં, આપણે બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનો તેમના ઢાળ સંદર્ભે વિચાર કરીશું.

ધારો કે L_1 અને L_2 શિરોલંબ રેખાઓ નથી. તેમના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે.

ધારો કે રેખાઓ પરસ્પર લંબ નથી. આથી $m_1 m_2 \neq -1$. જો તે પરસ્પર લંબ હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો $90°$નો હોય. હવે, જો L_1 અને L_2 ના ઝોક અનુક્રમે α_1 અને α_2 હોય, તો

$$m_1 = \tan \alpha_1 \text{ અને } m_2 = \tan \alpha_2.$$

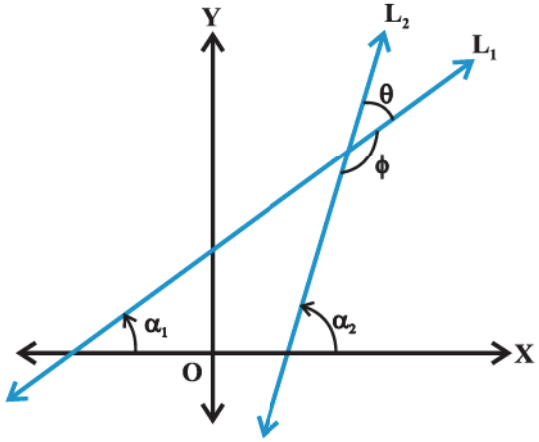
આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે બે રેખાઓ એકબીજીને છેદે ત્યારે છેદબિંદુ આગળ એકરૂપ અભિકોણની બે જોડ રચાય છે. તેમાં બે પાસપાસેના ખૂણાનાં માપનો સરવાળો $180°$ છે. ધારો કે રેખાઓ L_1 અને L_2માં છેદબિંદુ આગળ બનતા પાસપાસેના ખૂણાઓ θ અને ϕ છે. (આકૃતિ 10.6).

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \text{ અને } \alpha_1, \alpha_2 \neq 90°.$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$ (કારણ કે $1 + m_1 m_2 \neq 0$)

અને $\phi = 180° - \theta$

આથી $\tan\phi = \tan(180° - \theta) = -\tan\theta = -\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, કારણ કે $1 + m_1 m_2 \neq 0$



આકૃતિ 10.6

હવે, બે વિકલ્પોનું નિર્માણ થાય છે.

વિકલ્પ I જો $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ધન હોય, તો $\tan\theta$ ધન અને $\tan\phi$ ઋણ થશે. તેનો અર્થ એ કે θ લઘુકોણ અને ϕ ગુરુકોણ હશે.

વિકલ્પ II જો $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ઋણ હોય, તો $\tan\theta$ ઋણ અને $\tan\phi$ ધન થશે, તેનો અર્થ θ ગુરુકોણ અને ϕ લઘુકોણ હશે.

આમ, બે રેખાઓ L_1 અને L_2 ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 હોય અને તેમની વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ θ હોય તો,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, \qquad \text{(કારણ કે } 1 + m_1 m_2 \neq 0) \quad ...(1)$$

ગુરુકોણ ϕ નું માપ $\phi = 180^0 - \theta$ નો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\dfrac{\pi}{4}$ હોય અને તે પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ $\dfrac{1}{2}$ હોય, તો બીજી રેખાનો ઢાળ શોધો.

ઉકેલ : બે રેખાઓ વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ θ હોય અને તેમના ઢાળ m_1 અને m_2 હોય, તો

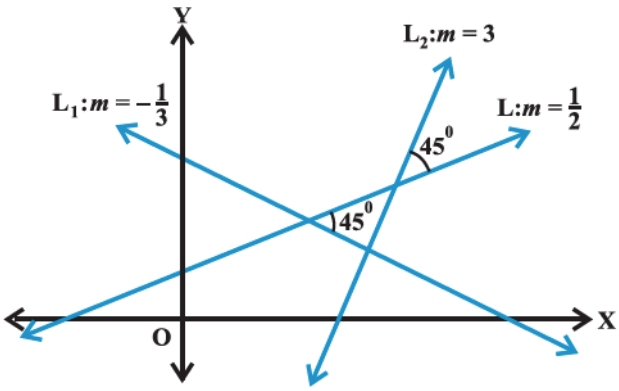
$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad ... (1)$$

હવે, $m_1 = \dfrac{1}{2}$, $m_2 = m$ અને $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

હવે, આ કિંમતોને (1) માં મૂકતાં,

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \quad \text{એટલે કે} \quad 1 = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right|$$

આ પરથી, $\dfrac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = 1$ અથવા $\dfrac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = -1.$



આકૃતિ 10.7

$\therefore\ m = 3$ અથવા $m = -\frac{1}{3}$.

આમ, બીજી રેખાનો ઢાળ 3 અથવા $-\frac{1}{3}$ થશે. આકૃતિ 10.7 બે જવાબનું કારણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 3 : (–2, 6) અને (4, 8) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા અને (8, 12) અને (x, 24) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા પરસ્પર લંબ હોય, તો x ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : (– 2, 6) અને (4, 8) માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(8, 12) અને (x, 24) માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ

$$m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$$

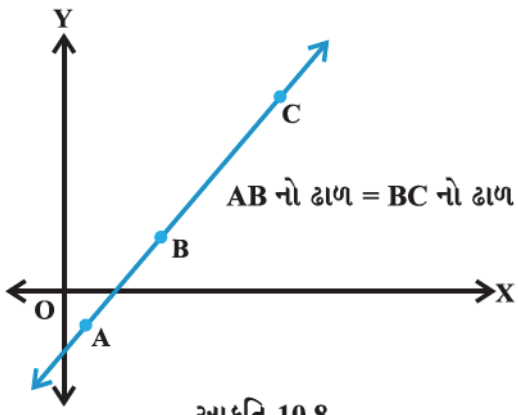
આ બે રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore\ m_1 m_2 = -1$

$\therefore\ \frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1$ એટલે કે $x = 4$.

10.2.4 ત્રણ બિંદુઓની સમરેખતા

આપણે જાણીએ છીએ કે બે સમાંતર રેખાઓના ઢાળ સમાન હોય છે. હવે જો સમાન ઢાળવાળી બે રેખાઓ એક જ બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તો અવશ્ય જ તે રેખાઓ સંપાતી હોય. આથી સમતલ XYમાં આપેલ ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C માટે જો રેખા AB નો ઢાળ = રેખા BC નો ઢાળ થાય તો અને તો જ આ બિંદુઓ સમરેખ થાય.



આકૃતિ 10.8

ઉદાહરણ 4 : જો P (h, k), Q (x_1, y_1) અને R (x_2, y_2) ત્રણ સમરેખ બિંદુઓ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1).$$

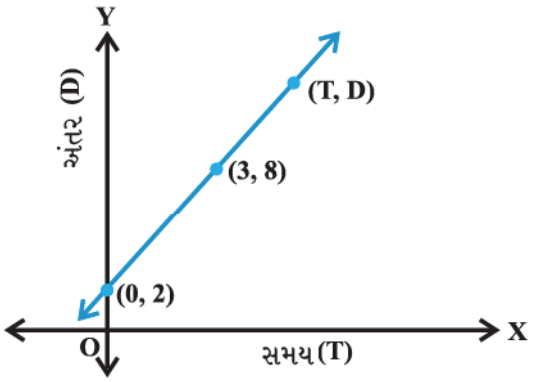
ઉકેલ : અહીં, P, Q અને R સમરેખ બિંદુઓ છે. તેથી,

PQ નો ઢાળ = QR નો ઢાળ, આથી $\frac{y_1 - k}{x_1 - h} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\therefore\ \frac{k - y_1}{h - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$\therefore \quad (h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1).$

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 10.9 માં રેખીય ગતિનો સમય અને અંતરનો આલેખ આપેલ છે. સમય અને અંતરનાં બે સ્થાન, જ્યારે T = 0 ત્યારે D = 2 અને જ્યારે T = 3 ત્યારે D = 8 આપેલ છે. તો ઢાળનો ઉપયોગ કરી ગતિનો નિયમ મેળવો. એટલે કે અંતર એ સમય પર કઈ રીતે આધારિત છે તે બતાવો.



આકૃતિ 10.9

ઉકેલ : ધારો કે (T, D) એ રેખા પરનું કોઈ બિંદુ છે. T સમયે અંતર D છે. આમ, બિંદુઓ (0, 2), (3, 8) અને (T, D) સમરેખ થશે.

$$\frac{8-2}{3-0} = \frac{D-8}{T-3} \quad \text{અથવા} \quad 6(T-3) = 3(D-8)$$

અથવા $D = 2(T + 1)$, માંગેલ સંબંધ છે.

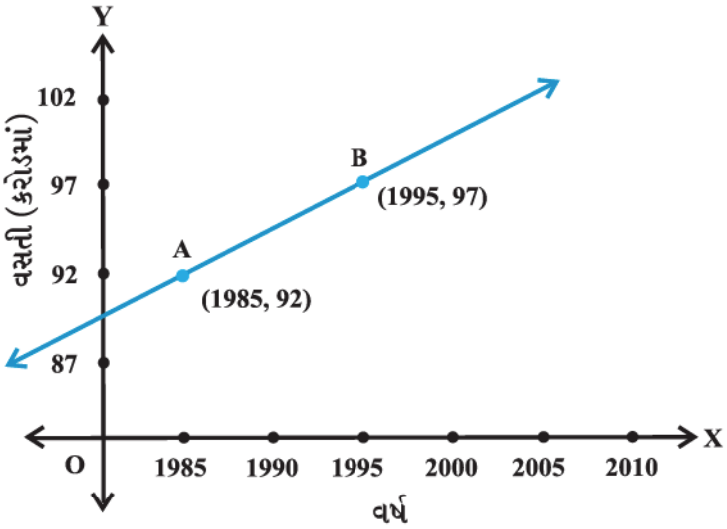
સ્વાધ્યાય 10.1

1. યામ-સમતલમાં (– 4, 5), (0, 7), (5, – 5) અને (– 4, –2) શિરોબિંદુઓવાળો ચતુષ્કોણ દોરો અને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. એક સમબાજુ ત્રિકોણનો પાયો y-અક્ષ પર એવી રીતે આવેલો છે કે તેનું મધ્યબિંદુ ઊગમબિંદુ છે. આ સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુ $2a$ હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુઓ શોધો.
3. જ્યારે (i) PQ, y-અક્ષને સમાંતર હોય (ii) PQ, x-અક્ષને સમાંતર હોય ત્યારે બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર શોધો.
4. (7, 6) અને (3, 4) થી સમાન અંતરે હોય એવું x-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.
5. P (0, – 4) અને B (8, 0) ને જોડતાં રેખાખંડના મધ્યબિંદુ અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ શોધો.
6. પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યા વગર બતાવો કે (4, 4), (3, 5) અને (–1, –1) કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.
7. એક રેખા y-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાથી વિરુધ્ધ દિશામાં 30° નો ખૂણો બનાવે, તો તે રેખાનો ઢાળ શોધો.
8. જો બિંદુઓ $(x, -1)$, (2, 1) અને (4, 5) સમરેખ હોય, તો x ની કિંમત શોધો.
9. અંતર સૂત્રનો ઉપયોગ કર્યા વગર બતાવો કે (– 2, – 1), (4, 0), (3, 3) અને (–3, 2) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.
10. (3,–1) અને (4,–2) ને જોડતી રેખા અને x-અક્ષ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.
11. જો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય અને $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ હોય અને બે રેખાઓ પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ બીજી રેખાના ઢાળ કરતાં બે ગણો હોય તો તે બે રેખાઓના ઢાળ શોધો.

12. એક રેખા (x_1, y_1) અને (h, k)માંથી પસાર થાય છે. જો આ રેખાનો ઢાળ m હોય તો, સાબિત કરો કે $k - y_1 = m(h - x_1)$.

13. જો ત્રણ બિંદુઓ $(h, 0)$, (a, b) અને $(0, k)$ એક રેખા પર આપેલાં હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$.

14. વસતી અને સંગત વર્ષનો એક આલેખ નીચે (આકૃતિ 10.10)માં આપેલ છે. રેખા AB નો ઢાળ શોધો અને તેનો ઉપયોગ કરી વર્ષ 2010માં વસતી કેટલી હશે તે શોધો.



આકૃતિ 10.10

10.3 રેખાના સમીકરણનાં વિવિધ સ્વરૂપ

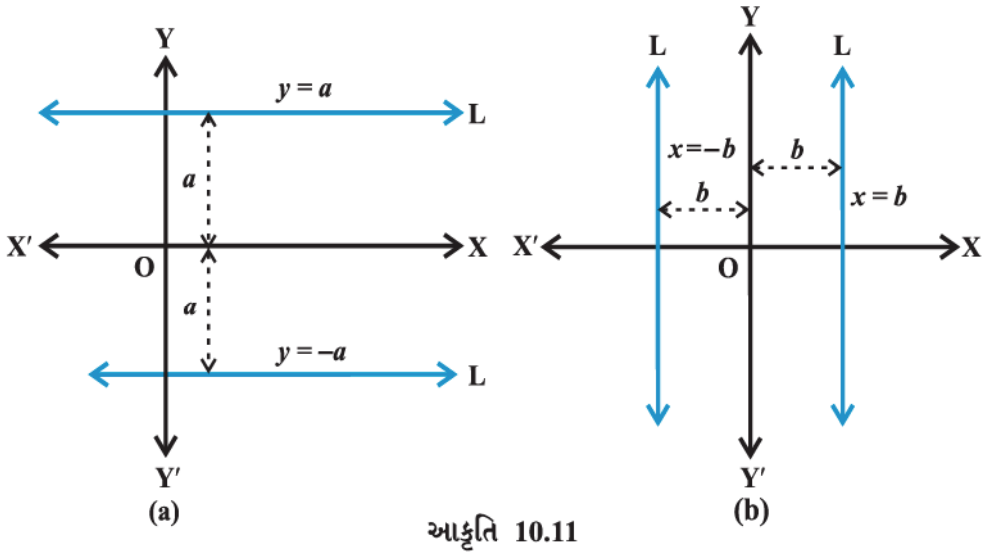
આપણે જાણીએ છીએ કે સમતલમાં આવેલી દરેક રેખા પર અસંખ્ય બિંદુઓ હોય છે. રેખા અને બિંદુ વચ્ચેનો સંબંધ આપણને નીચેની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવામાં મદદરૂપ થશે.

આપણે એવું કઈ રીતે કહી શકીએ કે આપેલ બિંદુ એ આપેલ રેખા પર છે ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર એ હોઈ શકે કે આપણને બિંદુનો રેખા પર હોવા અંગેનો નિશ્ચિત સંબંધ જ્ઞાત હોય તો કહી શકાય. ધારો કે P (x, y) એ XY-સમતલમાં આવેલું એક બિંદુ છે અને L એ કોઈ આપેલી રેખા છે. હવે L ના સમીકરણ માટે આપણે એક એવું વિધાન કે શરતની રચના કરીએ કે જે બિંદુ P, રેખા L પર હોય તો જ સત્ય થાય, નહિ તો અસત્ય થાય. ખરેખર આ વિધાન ચલ x અને y માં એક બૈજિક સમીકરણ છે.

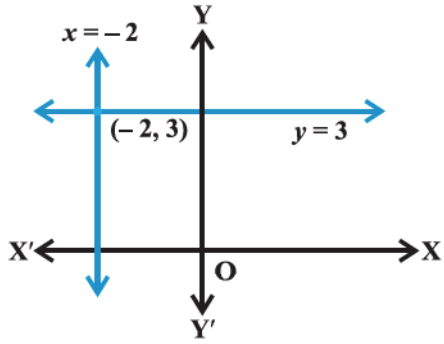
હવે, આપણે રેખાના સમીકરણનાં વિવિધ સ્વરૂપોની ચર્ચા કરીશું.

10.3.1 સમક્ષિતિજ અને શિરોલંબ રેખાઓ

જો સમક્ષિતિજ રેખા L એ x-અક્ષથી a એકમ અંતરે આવેલી હોય તો તેના પરનાં તમામ બિંદુઓનો y-યામ a અથવા $-a$ છે. [આકૃતિ 10.11 (a)]. તેથી રેખા L નું સમીકરણ $y = a$ અથવા $y = -a$. ચિહ્ન ધન કે ઋણ હશે તે રેખાની સ્થિતિ ઉપર એટલે કે તે x-અક્ષની ઉપર છે કે નીચે તે પર નિર્ભર કરે છે. તે જ પ્રમાણે શિરોલંબ રેખા L એ y-અક્ષથી b એકમ અંતરે આવેલ હોય તો તેનું સમીકરણ $x = b$ અથવા $x = -b$ થાય. [આકૃતિ 10.11(b)].



આકૃતિ 10.11



આકૃતિ 10.12

ઉદાહરણ 6 : (– 2, 3)માંથી પસાર થતી અને અક્ષોને સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણ મેળવો.

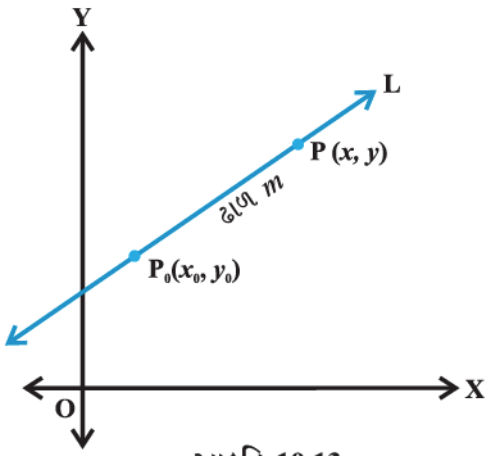
ઉકેલ : આકૃતિ 10.12 માં રેખાઓની સ્થિતિ બતાવેલ છે. x-અક્ષને સમાંતર રેખા પરનાં તમામ બિંદુઓનો y-યામ 3 છે. આમ, x-અક્ષને સમાંતર અને (– 2, 3)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $y = 3$ છે. તે જ રીતે y-અક્ષને સમાંતર અને (– 2, 3) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $x = -2$ છે.

10.3.2 બિંદુ-ઢાળ સ્વરૂપ *(Point-slope form)*

ધારો કે $P_0(x_0, y_0)$ એ શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખા L પરનું એક બિંદુ છે. તે રેખાનો ઢાળ m છે. ધારો કે $P(x, y)$ એ રેખા પરનું કોઈપણ બિંદુ છે (આકૃતિ 10.13). આથી ઢાળની વ્યાખ્યા પ્રમાણે રેખા L નો ઢાળ,

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0}, \text{ એટલે કે}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad ...(1)$$



આકૃતિ 10.13

વળી, બિંદુ $P_0(x_0, y_0)$ પણ રેખાના પ્રત્યેક બિંદુ (x, y) ની સાથે સમીકરણ (1)નું સમાધાન કરે છે અને સમતલનું અન્ય કોઈ બિંદુ (1) નું સમાધાન કરતું નથી. તેથી સમીકરણ (1) વાસ્તવમાં આપેલી રેખા L નું સમીકરણ છે.

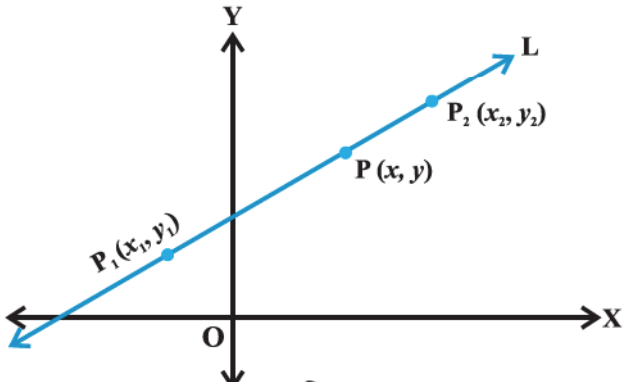
આમ, જો $P(x, y)$ એ $y - y_0 = m(x - x_0)$ નું સમાધાન કરે તો ને તો જ બિંદુ (x, y) એ નિશ્ચિત બિંદુ (x_0, y_0) માંથી પસાર થતી અને m ઢાળવાળી રેખા પર હોય.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુ (– 2, 3) માંથી પસાર થતી અને જેનો ઢાળ – 4 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $m = -4$ અને આપેલ બિંદુ $(x_0, y_0) = (-2, 3)$.

આમ, બિંદુ-ઢાળ સ્વરૂપથી ઉપરના રેખાના સમીકરણ (1) પરથી માંગેલ રેખાનું સમીકરણ

$y - 3 = -4(x + 2)$ અથવા $4x + y + 5 = 0$, માંગેલ રેખાનું સમીકરણ છે.



આકૃતિ 10.14

10.3.3 બે બિંદુ-સ્વરૂપ *(Two Point form)*

ધારો કે રેખા L એ બિંદુઓ $P_1(x_1, y_1)$ અને $P_2(x_2, y_2)$ માંથી પસાર થાય છે. ધારો કે P (x, y) એ રેખા L પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે (આકૃતિ 10.14).

ત્રણે બિંદુઓ P_1, P_2 અને P સમરેખ છે. તેથી,

P_1Pનો ઢાળ = P_1P_2નો ઢાળ

$$\therefore \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{અથવા} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \qquad \ldots (2)$$

વળી (x_1, y_1) પણ સમીકરણ (2) નું સમાધાન કરે છે. સમતલનું કોઈપણ બિંદુ સમીકરણ (2) નું સમાધાન કરે તો તે રેખા L પર હોય.

આમ, (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ઉદાહરણ 8 : બિંદુઓ (1, –1) અને (3, 5) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $x_1 = 1, y_1 = -1, x_2 = 3$ અને $y_2 = 5$

રેખાના ઉપરના બે બિંદુ સ્વરૂપના સમીકરણ (2) પરથી,

$$y - (-1) = \frac{5 - (-1)}{3 - 1}(x - 1)$$

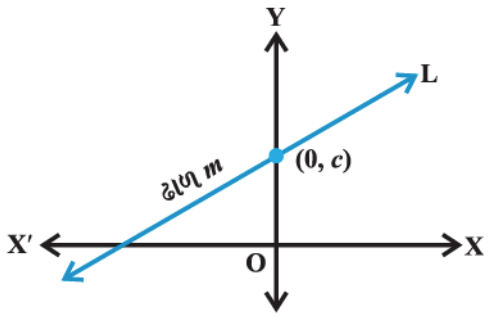
$\therefore \; -3x + y + 4 = 0$ માંગેલ સમીકરણ છે.

10.3.4 ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપ *(Slope-intercept Form)*

કોઈ વખત આપણને રેખાની માહિતી ઢાળ અને તેના કોઈ એક અક્ષ પરના અંતઃખંડ દ્વારા આપેલી હોય, તો આ સ્વરૂપમાં આપેલી રેખાનું સમીકરણ આપણે શોધીએ.

વિકલ્પ I : ધારો કે રેખા L નો ઢાળ m છે અને તે y-અક્ષને $(0, c)$ માં છેદે છે (આકૃતિ 10.15). c ને રેખા Lનો y-અંતઃખંડ કહે છે.

આમ, રેખા Lનો ઢાળ m છે અને તે $(0, c)$ માંથી પસાર થાય છે. તેથી રેખા L નું



આકૃતિ 10.15

ઢાળબિંદુ સ્વરૂપનું સમીકરણ

$$y-c=m(x-0) \text{ અથવા } y=mx+c \quad ...(3)$$

બિંદુ (x, y) એ $y=mx+c$ નું સમાધાન કરે તો તે જેનો y-અંતઃખંડ c હોય અને ઢાળ m હોય તેવી રેખા પર હોય.

આપણે નોંધીશું કે c નું મૂલ્ય ધન કે ઋણ હોય તે પ્રમાણે y-અંતઃખંડ અનુક્રમે y-અક્ષની ધન કે ઋણ બાજુ સાથે બને તે પરથી નક્કી થાય છે.

વિકલ્પ II ધારો કે રેખા L નો ઢાળ m અને x-અંતઃખંડ d છે, તો રેખા L નું સમીકરણ,

$$y=m(x-d) \text{ થાય.} \quad ...(4)$$

વિદ્યાર્થીઓ વિકલ્પ (I)માં દર્શાવેલ રીતનો ઉપયોગ કરી સ્વપ્રયત્ને આ સમીકરણ મેળવી શકે છે.

ઉદાહરણ 9 : θ ઝોક વાળી રેખા માટે $\tan\theta = \frac{1}{2}$ હોય તથા જેનો (i) y - અંતઃખંડ $= -\frac{3}{2}$ (ii) x - અંતઃખંડ $= 4$ હોય તેવી રેખાઓનાં સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : (i) અહીં રેખાનો ઢાળ $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ છે અને y - અંતઃખંડ $c = -\frac{3}{2}$ છે.

તેથી, રેખાના ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપના સમીકરણ (3) પરથી રેખાનું સમીકરણ

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \text{ અથવા } 2y-x+3=0$$

આ માંગેલ સમીકરણ છે.

(ii) અહીં, $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ અને $d = 4$ આપેલ છે.

તેથી, રેખાના ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપ સમીકરણ (4) પરથી રેખાનું સમીકરણ

$$y=\frac{1}{2}(x-4) \text{ અથવા } 2y-x+4=0 \text{ મળે.}$$

આ માંગેલ સમીકરણ છે.

10.3.5 રેખાનું અંતઃખંડ સ્વરૂપ *(Intercept Form of the Equation of a Line)*

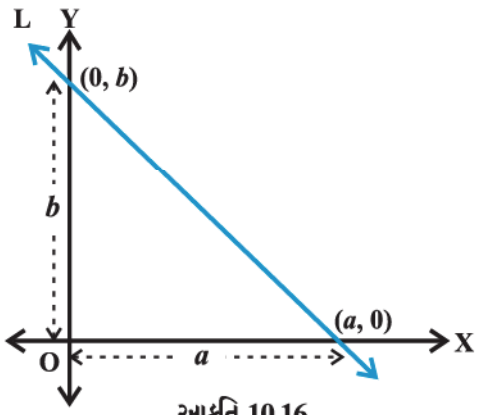
ધારો કે રેખા L એ x-અક્ષ પર a અને y-અક્ષ પર b અંતઃખંડ કાપે છે.

$(a \neq 0,\ b \neq 0)$

∴ રેખા L એ બિંદુ $(a, 0)$ અને $(0, b)$માંથી પસાર થાય છે. (આકૃતિ 10.16). રેખાના બે બિંદુ સ્વરૂપ સમીકરણ પરથી,

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a) \text{ અથવા } ay=-bx+ab,$$

અથવા $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$



આકૃતિ 10.16

અક્ષો પર a અને b અંતઃખંડો કાપતી રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ છે.} \quad ... (5)$$

ઉદાહરણ 10 : x-અક્ષ અને y-અક્ષ પર અનુક્રમે –3 અને 2 અંતઃખંડો બનાવતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = -3$ અને $b = 2$.

ઉપરના અંતઃખંડ સ્વરૂપ સમીકરણ (5) પરથી,

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{અથવા} \quad 2x - 3y + 6 = 0.$$

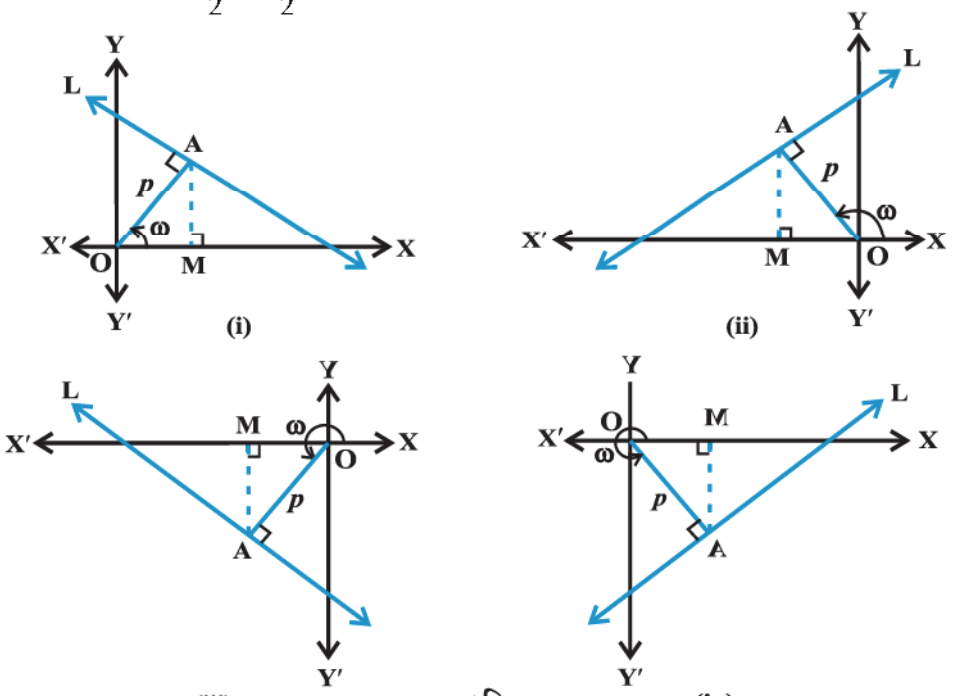
10.3.6 અભિલંબ સ્વરૂપ *(Normal Form)*

શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખા માટે નીચેની માહિતી પ્રાપ્ત છે :

(i) ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ.

(ii) લંબ દ્વારા x-અક્ષની ધન દિશામાં બનાવેલા ખૂણાનું માપ.

ધારો કે રેખા L પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ OA = p અને OA x-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\angle XOA = \omega$ માપનો ખૂણો બનાવે છે. રેખા L ના યામ-સમતલમાં બધા જ શક્ય સ્થાન આકૃતિ 10.17માં દર્શાવ્યા છે. હવે, આપણો ઉદ્દેશ રેખા L નો ઢાળ અને તેના પર એક બિંદુ શોધવાનો છે. હવે દરેક સ્થિતિમાં x-અક્ષ પર લંબ AM દોરો. ધારો કે $\omega \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$



આકૃતિ 10.17

પ્રત્યેક સ્થિતિમાં OM = $p \cos \omega$ અને AM = $p \sin \omega$. આમ બિંદુ A ના યામ $(p \cos \omega, p \sin \omega)$ થશે.

અહીં, રેખા L એ OA ને લંબ છે.

$$\therefore \text{ રેખા L નો ઢાળ} = -\frac{1}{\text{OA નો ઢાળ}} = -\frac{1}{\tan \omega} = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega}.$$

આમ, રેખા L નો ઢાળ $-\frac{\cos \omega}{\sin \omega}$ અને એ બિંદુ A $(p \cos \omega, p \sin \omega)$ માંથી પસાર થાય છે. આથી બિંદુ ઢાળ સ્વરૂપ પરથી રેખા L નું સમીકરણ

$$y - p \sin \omega = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega}(x - p \cos \omega) \text{ એ ટલે કે } x \cos \omega + y \sin \omega = p(\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)$$

$\therefore x \cos \omega + y \sin \omega = p.$

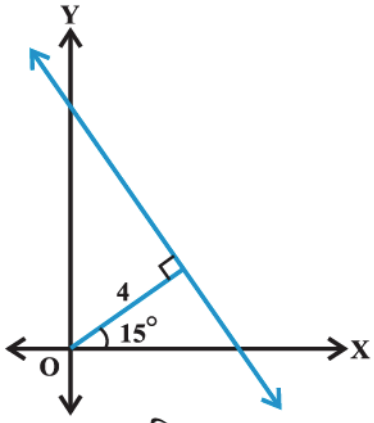
આમ, ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય અને લંબ એ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે ω માપનો ખૂણો બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p \qquad \ldots (6)$$

આ સમીકરણને રેખાનું અભિલંબ સ્વરૂપે સમીકરણ કહે છે.

નોંધ : $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ હોય તો રેખાનાં સમીકરણ અનુક્રમે $x = p, y = p, x = -p, y = -p$ થાય તે આકૃતિ દોરીને જોઈ શકાય.

ઉદાહરણ 11 : ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનું માપ 4 હોય તથા લંબરેખાખંડ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે 15° માપનો ખૂણો બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ શોધો.



આકૃતિ 10.18

ઉકેલ : અહીં, $p = 4$ અને $\omega = 15^\circ$ આપેલ છે. (આકૃતિ 10.18)

હવે, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ અને $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (કેમ ?)

હવે, રેખાના અભિલંબ સ્વરૂપ (6) પરથી, રેખાનું સમીકરણ

$x \cos 15^\circ + y \sin 15^\circ = 4$ અથવા $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4$ અથવા

$(\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 8\sqrt{2}$ માંગેલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 12 : ફેરનહિટ તાપમાન F અને નિરપેક્ષ તાપમાન K એક સુરેખ સમીકરણને સંતોષે છે. જ્યારે F = 32 ત્યારે K = 273 અને જ્યારે F = 212 ત્યારે K = 373 આપેલ છે. તો K ને F ના સ્વરૂપમાં દર્શાવો તથા જ્યારે K = 0 હોય ત્યારે F ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે F એ x-અક્ષ પર અને K એ y-અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. આપણી પાસે બે બિંદુઓ (32, 273) અને (212, 373) એ XY-સમતલમાં છે. તો બિંદુ (F, K) બે બિંદુ સ્વરૂપ સમીકરણનું સમાધાન કરશે.

$$K - 273 = \frac{373-273}{212-32}(F-32)$$

$$\therefore K - 273 = \frac{100}{180}(F-32)$$

$$\therefore K = \frac{5}{9}(F-32) + 273 \qquad \ldots (1)$$

આ માંગેલ સંબંધ છે.

હવે, સમીકરણમાં K = 0 લેતાં,

$0 = \frac{5}{9}(F-32) + 273$ અથવા $F - 32 = -\frac{273 \times 9}{5} = -491.4$ અથવા $F = -459.4$.

બીજી રીત : આપણે જાણીએ છીએ કે રેખાના સમીકરણનું સરળતમ સ્વરૂપ $y = mx + c$ છે. ફરી ધારો કે F, x-અક્ષ

પર અને K, y-અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. તો સમીકરણ નીચે દર્શાવેલ સ્વરૂપમાં મળશે :

$$K = mF + c \quad \ldots (1)$$

હવે, (32, 273) અને (212, 373) સમીકરણ (1) નું સમાધાન કરશે. તેથી,

$$273 = 32m + c \quad \ldots (2)$$

અને $$373 = 212m + c \quad \ldots (3)$$

સમીકરણો (2) અને (3), ઉકેલતાં,

$$m = \frac{5}{9} \text{ અને } c = \frac{2297}{9} \text{ મળશે.}$$

(1) માં m અને c ની કિંમતો મૂકતાં,

$$K = \frac{5}{9}F + \frac{2297}{9} \quad \ldots (4)$$

માંગેલ સંબંધ છે. (4) માં K = 0 લેતાં, F = – 459.4 મળશે.

નોંધ આપણે જાણીએ છીએ કે સમીકરણ $y = mx + c$ માં અચળો m અને c આવેલા છે. આ બે અચળો શોધવા આ રેખાના સમીકરણ દ્વારા જેનું સમાધાન થતું હોય તેવી બે શરતોની જરૂર પડે. ઉપરનાં બધાં જ ઉદાહરણોમાં રેખાનું સમીકરણ શોધવા બે શરતો આપેલી છે.

સ્વાધ્યાય 10.2

પ્રશ્નો 1 થી 8 માં આપેલી શરતોનું સમાધાન કરે તેવી રેખાનું સમીકરણ મેળવો :

1. x-અક્ષ અને y-અક્ષનાં સમીકરણો મેળવો.
2. (– 4, 3) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને જેનો ઢાળ $\frac{1}{2}$ હોય.
3. (0, 0) માંથી પસાર થતી અને m ઢાળવાળી.
4. $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ માંથી પસાર થતી અને જેનો x-અક્ષ સાથે ઝોક 75° હોય.
5. x-અક્ષને ઊગમબિંદુથી 3 એકમના અંતરે ડાબી બાજુએ છેદતી અને જેનો ઢાળ –2 હોય.
6. y-અક્ષને ઊગમબિંદુની ઉપર 2 એકમ અંતરે છેદતી અને x-અક્ષની ધન દિશા સાથે 30°ના માપનો ખૂણો બનાવતી.
7. (–1, 1) અને (2, – 4) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી.
8. ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનું માપ 5 હોય તથા લંબરેખાખંડ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે 30° માપનો ખૂણો બનાવે.
9. Δ PQR નાં શિરોબિંદુઓ P (2, 1), Q (–2, 3) અને R (4, 5) હોય, તો શિરોબિંદુ R માંથી દોરેલ મધ્યગાનું સમીકરણ મેળવો.
10. (2, 5) અને (–3, 6) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાને લંબ અને (–3, 5) બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

11. (1, 0) અને (2, 3) ને જોડતા રેખાખંડને લંબ અને તેનું 1: n ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

12. (2, 3) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને યામાક્ષો પર સમાન અંતઃખંડો કાપતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

13. જેના અક્ષો પરના અંતઃખંડોનો સરવાળો 9 હોય અને જે બિંદુ (2, 2)માંથી પસાર થતી હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

14. (0, 2) માંથી પસાર થતી અને x-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{2\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો તથા તે રેખાને સમાંતર હોય અને y-અક્ષને ઊગમબિંદુથી નીચે 2 એકમ અંતરે છેદતી હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ પણ મેળવો.

15. ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ (–2, 9) હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

16. તાંબાના તારની લંબાઈ L (સેમીમાં) અને તેના સેલ્સિયસ તાપમાન C વચ્ચે સુરેખ સંબંધ છે. એક પ્રયોગમાં જ્યારે L = 124.942 હોય ત્યારે C = 20 અને જ્યારે L= 125.134 હોય ત્યારે C = 110, છે. તો L અને C વચ્ચેનો સુરેખ સંબંધ મેળવો.

17. એક દૂધના વેચાણકેન્દ્રનો માલિક પ્રત્યેક અઠવાડિયે 980 લિટર દૂધ ₹ 14 પ્રતિ લિટર અને 1220 લિટર દૂધ ₹ 16 પ્રતિ લિટર વેચે છે. હવે દૂધની વેચાણકિંમત અને માંગ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ છે તેમ માની લઈએ તો તે પ્રત્યેક અઠવાડિયે ₹ 17 પ્રતિ લિટરના ભાવે કેટલા લિટર દૂધ વેચી શકે ?

18. અક્ષો વચ્ચે બનતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ P (a, b) હોય, તો તે રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ છે તેમ બતાવો.

19. બિંદુ R(h, k), જે રેખાના અક્ષો વચ્ચે બનતા રેખાખંડનું બિંદુ 1 : 2 ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તે રેખાનું સમીકરણ શોધો.

20. રેખાના સમીકરણની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે (3, 0), (– 2, – 2) અને (8, 2) સમરેખ છે.

10.4 રેખાનું વ્યાપક સમીકરણ (*General Equation of a Line*)

આગળના વર્ગોમાં આપણે બે ચલવાળા એકઘાતી સમીકરણ $Ax + By + C = 0$ નો અભ્યાસ કર્યો છે. જ્યાં A, B અને C એવા વાસ્તવિક અચળ છે કે જેથી A અને B એકીસાથે શૂન્ય ન થાય તેવા સમીકરણ $Ax + By + C = 0$ નો આલેખ હંમેશાં રેખા દર્શાવે છે. તેથી જ્યારે A અને B એક સાથે શૂન્ય ન હોય ત્યારે $Ax + By + C = 0$ પ્રકારના કોઈ પણ સમીકરણને વ્યાપક સુરેખ સમીકરણ કે રેખાનું વ્યાપક સમીકરણ કહે છે.

10.4.1 $Ax + By + C = 0$ નાં વિવિધ સ્વરૂપ

રેખાના વ્યાપક સમીકરણને નીચે દર્શાવેલી પ્રક્રિયાઓ દ્વારા વિવિધ સ્વરૂપમાં ફેરવી શકાય છે :

(a) ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપ : જો $B \neq 0$, હોય તો $Ax + By + C = 0$ ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \quad \text{અથવા} \quad y=mx+c \qquad \ldots (1)$$

અહીં, $m=-\frac{A}{B}$ અને $c=-\frac{C}{B}$.

આપણે જાણીએ છીએ કે સમીકરણ (1) રેખાનું ઢાળ-અંતઃખંડ સ્વરૂપનું સમીકરણ છે. તેમાં ઢાળ $-\frac{A}{B}$ અને y-અંતઃખંડ $-\frac{C}{B}$ છે.

જો B = 0, તો $x = -\frac{C}{A}$. આ શિરોલંબ રેખા છે અને તેને ઢાળ નથી અને x - અંતઃખંડ $-\frac{C}{A}$ છે.

(b) અંતઃખંડ સ્વરૂપ : જો $A \neq 0, B \neq 0$ અને $C \neq 0$, હોય તો $Ax + By + C = 0$ ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \text{ અથવા } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{... (2)}$$

અહીં, $a = -\frac{C}{A}$ અને $b = -\frac{C}{B}$.

આપણે જાણીએ છીએ કે સમીકરણ (2) રેખાનું અંતઃખંડ સ્વરૂપનું રેખાનું સમીકરણ છે.

અહીં, x-અંતઃખંડ $= -\frac{C}{A}$ અને y-અંતઃખંડ $= -\frac{C}{B}$.

હવે, જો C = 0, હોય તો $Ax + By + C = 0$ ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$Ax + By = 0$. આ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા દર્શાવે છે. તેના અક્ષો પરના અંતઃખંડો શૂન્ય છે.

જો $B = 0$ તો $A \neq 0$. $Ax + C = 0$ એ $C \neq 0$ માટે શિરોલંબ રેખા દર્શાવે છે તથા તેનો $x-$અંતઃખંડ $-\frac{C}{A}$. જો $C = 0$ તો તે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

જો $A = 0$ તો $B \neq 0$, $By + C = 0$ સમક્ષિતિજ રેખા છે.

$C \neq 0$ માટે તેનો $y-$અંતઃખંડ $-\frac{C}{B}$ છે તથા $C = 0$ હોય, તો તે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

(c) અભિલંબ સ્વરૂપ :

ધારો કે $Ax + By + C = 0$ અથવા $Ax + By = -C$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાનું લંબ સ્વરૂપ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ છે.

આમ, બંને એક જ રેખાનાં સમીકરણો છે અને તે સમાન છે.

$$\therefore \frac{A}{\cos \omega} = \frac{B}{\sin \omega} = -\frac{C}{p}$$

$$\therefore \cos \omega = -\frac{Ap}{C} \text{ અને } \sin \omega = -\frac{Bp}{C}$$

$$\text{હવે, } \sin^2\omega + \cos^2\omega = \left(-\frac{Ap}{C}\right)^2 + \left(-\frac{Bp}{C}\right)^2 = 1$$

$$\text{અથવા } p^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2} \text{ અથવા } p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\therefore \cos\omega = \mp\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ અને } \sin\omega = \mp\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

આમ, સમીકરણ $Ax + By + C = 0$ નું લંબ સ્વરૂપ,

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p$$

$$\text{અહીં, } \cos \omega = \mp\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \omega = \mp\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ અને } p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

p ની કિંમત ધન રહે તે રીતે ચિહ્નની પસંદગી કરવી.

ઉદાહરણ 13 : જો રેખાનું સમીકરણ $3x - 4y + 10 = 0$ હોય તો તેનો (i) ઢાળ અને (ii) x-અંતઃખંડ અને y-અંતઃખંડ શોધો.

ઉકેલ : (i)અહીં આપેલ સમીકરણ $3x - 4y + 10 = 0$ ને

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \qquad \text{... (1)}$$

સ્વરૂપમાં લખી શકાય. હવે સમીકરણ (1) ને $y = mx + c$, સાથે સરખાવતાં ઢાળ $m = \frac{3}{4}$ મળે.

(ii) સમીકરણ $3x - 4y + 10 = 0$ ને

$$3x - 4y = -10 \quad \text{અથવા} \quad \frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1 \qquad \text{... (2)}$$

સ્વરૂપે લખી શકાય. હવે સમીકરણ (2) ને $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ સાથે સરખાવતાં x-અંતઃખંડ $a = -\frac{10}{3}$ અને y-અંતઃખંડ $b = \frac{5}{2}$ મળે.

ઉદાહરણ 14 : રેખા $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ સમીકરણનું અભિલંબ સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરો. તે પરથી p અને ω ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપેલ રેખાનું સમીકરણ છે,

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

(1) ને $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$ વડે ભાગતાં, આપણને

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4 \quad \text{અથવા} \quad x \cos 30° + y \sin 30° = 4 \quad \text{મળે.} \qquad \text{... (2)}$$

સમીકરણ (2) ને $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ સાથે સરખાવતાં $p = 4$ અને $\omega = 30°$ મળે.

ઉદાહરણ 15 : રેખાઓ $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ અને $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ અથવા $y = \sqrt{3}x + 5$ ... (1)

અને $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ અથવા $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3}$ ... (2)

આપેલી રેખાઓ છે.

રેખા (1) નો ઢાળ $m_1 = \sqrt{3}$ અને રેખા (2) નો ઢાળ $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

જો બે રેખાઓ વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ θ હોય, તો

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right| \qquad \text{... (3)}$$

m_1 અને m_2 ની કિંમતો (3) માં મૂકતાં,

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} \right| = \left| \frac{1-3}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{મળે.}$$

તેથી, $\theta = 30°$.

આમ, બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $30°$ અથવા $180° - 30° = 150°$.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે $b_1, b_2 \neq 0$ માટે રેખાઓ $a_1x+b_1y+c_1=0$ અને $a_2x+b_2y+c_2=0$ દ્વારા દર્શાવેલ હોય અને (i) રેખાઓ સમાંતર હોય તો $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ અને (ii) રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય તો $a_1a_2+b_1b_2=0$.

ઉકેલ : આપેલી રેખાઓ,

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1} \qquad \text{... (1)}$$

અને

$$y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2} \qquad \text{... (2)}$$

રેખાઓ (1) અને (2) ના ઢાળ અનુક્રમે $m_1=-\frac{a_1}{b_1}$ અને $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$ છે. હવે

(i) રેખાઓ સમાંતર હોય તો $m_1=m_2$,

$\therefore -\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}$ અથવા $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

(ii) રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય તો $m_1 \cdot m_2=-1$

$\therefore \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=-1$ અથવા $a_1a_2+b_1b_2=0$

ઉદાહરણ 17 : રેખા $x-2y+3=0$ ને લંબ અને $(1,-2)$ બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : $x-2y+3=0$ આપેલ રેખા છે. તેને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \qquad \text{...(1)}$$

રેખા (1) નો ઢાળ $m_1=\frac{1}{2}$ છે. તેથી રેખા (1) ને લંબરેખાનો ઢાળ $m_2=-\frac{1}{m_1}=-2$ થાય.

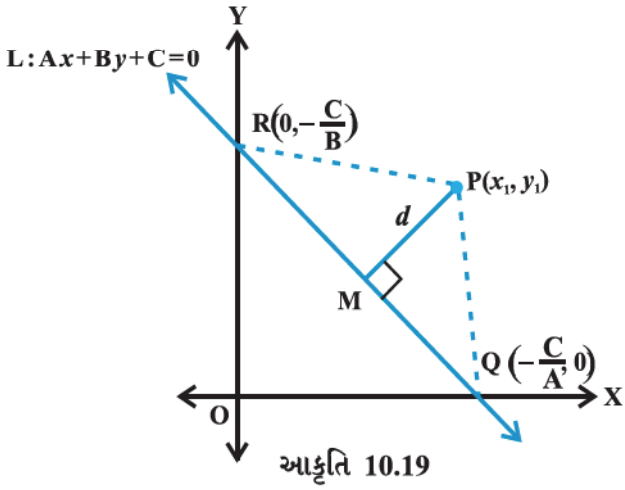
જેનો ઢાળ -2 હોય અને જે $(1,-2)$ માંથી પસાર થતી હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ

$y-(-2)=-2(x-1)$ એટલે કે $y=-2x$ માંગેલ સમીકરણ છે.

10.5 બિંદુથી રેખાનું લંબઅંતર

બિંદુથી રેખાનું અંતર એટલે બિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ. ધારો કે $L: Ax+By+C=0$ એક રેખા છે. તેનું બિંદુ $P(x_1, y_1)$ થી અંતર d છે. બિંદુ P માંથી રેખા L પર લંબ રેખાખંડ PM દોરો. (આકૃતિ 10.19)

રેખા x-અક્ષ અને y-અક્ષ ને અનુક્રમે Q અને R માં છેદે છે. તે બિંદુઓના યામ $Q\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ અને $R\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ થશે. હવે ત્રિકોણ PQR નું ક્ષેત્રફળ બે રીતે મેળવી શકાય :



આકૃતિ 10.19

ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} PM \cdot QR$, તેથી $PM = \frac{2\ (\Delta PQR\text{નું ક્ષેત્રફળ})}{QR}$ ... (1)

તથા ΔPQRનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left| x_1\left(0+\frac{C}{B}\right)+\left(-\frac{C}{A}\right)\left(-\frac{C}{B}-y_1\right)+0\left(y_1-0\right)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|x_1\frac{C}{B}+y_1\frac{C}{A}+\frac{C^2}{AB}\right|$$

$\therefore\ 2\,(\Delta PQR\text{નું ક્ષેત્રફળ}) = \left|\frac{C}{AB}\right| \cdot \left|Ax_1+By_1+C\right|$, અને

$$QR = \sqrt{\left(0+\frac{C}{A}\right)^2+\left(\frac{C}{B}-0\right)^2} = \left|\frac{C}{AB}\right| \sqrt{A^2+B^2}$$

ΔPQRનું ક્ષેત્રફળ અને QRની કિંમત (1) માં મૂકતાં,

$$PM = \frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

અથવા $d = \frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

આમ, રેખા $Ax + By + C = 0$ નું બિંદુ (x_1, y_1) થી લંબઅંતર

$$d = \frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

10.5.1 બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર

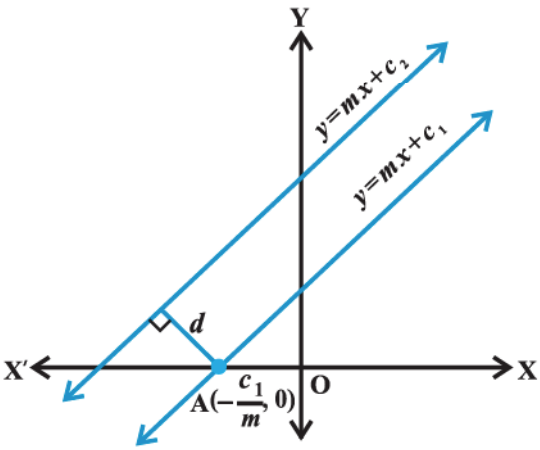
આપણે જાણીએ છીએ કે બે સમાંતર રેખાઓના ઢાળ સમાન હોય છે. તેથી બે સમાંતર રેખાઓ આ પ્રકારે લખી શકાય છે.

$y = mx + c_1$ ... (1)

અને $y = mx + c_2$ ... (2)

રેખા (1) x-અક્ષને બિંદુ $A\left(-\frac{c_1}{m},\ 0\right)$ માં છેદે છે. આકૃતિ 10.20 માં બે રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર એટલે બિંદુ A માંથી રેખા (2) પર દોરેલા લંબની લંબાઈ. આમ, રેખા (1) અને (2) વચ્ચેનું લંબઅંતર

$$\frac{\left|(-m)\left(-\frac{c_1}{m}\right)+(-c_2)\right|}{\sqrt{1+m^2}} \text{ અથવા } d = \frac{\left|c_1-c_2\right|}{\sqrt{1+m^2}} \text{ છે.}$$



આકૃતિ 10.20

આમ, બે સમાંતર રેખાઓ $y = mx + c_1$ અને $y = mx + c_2$ વચ્ચેનું અંતર

$$d = \frac{\left|c_1-c_2\right|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

હવે જો રેખાઓ વ્યાપક સ્વરૂપમાં અર્થાત્ $Ax + By + C_1 = 0$ અને $Ax + By + C_2 = 0$ તરીકે આપેલ હોય, તો ઉપર દર્શાવેલ સૂત્ર $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ રૂપ લે છે.

વિદ્યાર્થીઓ સ્વપ્રયત્ને આ મેળવી શકે છે.

નોંધ : રેખાઓ શિરોલંબ હોય તો ?

ઉદાહરણ 18 : બિંદુ (3, – 5) થી રેખા $3x - 4y - 26 = 0$ નું લંબઅંતર શોધો.

ઉકેલ : $3x - 4y - 26 = 0$ આપેલ રેખા છે. ... (1)

(1) ને રેખાના વ્યાપક સમીકરણ $Ax + By + C = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$A = 3, B = -4$ અને $C = -26$ મળે.

આપેલ બિંદુ $(x_1, y_1) = (3, -5)$ છે. આમ, આપેલ બિંદુથી રેખાનું અંતર

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + (-4)(-5) - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}.$$

ઉદાહરણ 19 : સમાંતર રેખાઓ $3x - 4y + 7 = 0$ અને $3x - 4y + 5 = 0$ વચ્ચેનું અંતર મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $A = 3, B = -4, C_1 = 7$ અને $C_2 = 5$. તેથી માંગેલ અંતર

$$d = \frac{|7 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}.$$

સ્વાધ્યાય 10.3

1. નીચે આપેલ સમીકરણોને ઢાળ- અંતઃખંડ સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને તેમના ઢાળ અને y - અંતઃખંડ શોધો.

   (i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$

2. નીચે આપેલ સમીકરણોને અંતઃખંડ સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને તેમના દ્વારા અક્ષો પર કપાતા અંતઃખંડો શોધો.

   (i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$ (iii) $3y + 2 = 0$

3. નીચે આપેલાં સમીકરણોને અભિલંબ સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ અને લંબ દ્વારા x-અક્ષની ધન દિશા સાથે બનતા ખૂણાનું માપ શોધો :

   (i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x - y = 4$

4. બિંદુ (–1, 1) નું રેખા $12(x + 6) = 5(y - 2)$ થી અંતર શોધો.

5. x-અક્ષ પરનું કયું બિંદુ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ રેખાથી 4 એકમ અંતરે આવેલ છે ?

6. નીચેની સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર શોધો :

   (i) $15x + 8y - 34 = 0$ અને $15x + 8y + 31 = 0$ (ii) $l(x + y) + p = 0$ અને $l(x + y) - r = 0$

7. બિંદુ (–2, 3)માંથી પસાર થતી અને $3x - 4y + 2 = 0$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ શોધો.

8. રેખા $x - 7y + 5 = 0$ ને લંબ અને જેનો x-અંતઃખંડ 3 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

9. રેખાઓ $\sqrt{3}x + y = 1$ અને $x + \sqrt{3}y = 1$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

10. બિંદુઓ $(h, 3)$ અને $(4, 1)$ માંથી પસાર થતી રેખા અને રેખા $7x - 9y - 19 = 0$ એકબીજાને કાટખૂણે છેદે, તો h શોધો.

11. સાબિત કરો કે બિંદુ (x_1, y_1) માંથી પસાર થતી અને $Ax + By + C = 0$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ છે.

12. બે રેખાઓ (2, 3) બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય અને તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 60° હોય તથા તે પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ 2 હોય, તો બીજી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

13. જેનાં અંત્યબિંદુઓ (3, 4) અને (–1, 2) હોય તેવા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકનું સમીકરણ શોધો.

14. બિંદુ (–1, 3)માંથી રેખા $3x - 4y - 16 = 0$ પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ શોધો.

15. ઊગમબિંદુમાંથી રેખા $y = mx + c$ પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ (–1, 2) હોય, તો m અને c શોધો.

16. રેખાઓ $x \cos\theta - y \sin\theta = k \cos 2\theta$ અને $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = k$ નાં ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર અનુક્રમે p અને q હોય, તો સાબિત કરો કે $p^2 + 4q^2 = k^2$.

17. A (2, 3), B (4, –1) અને C (1, 2) એ ΔABCનાં શિરોબિંદુઓ છે. ΔABCના શિરોબિંદુ Aમાંથી દોરેલા વેધની લંબાઈ અને તેનું સમીકરણ શોધો.

18. જે રેખાના અક્ષો પરના અંતઃખંડો a અને b હોય તેવી રેખા પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

10.6 બે રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા-સંહતિનું સમીકરણ

બે છેદતી રેખાઓ l_1 અને l_2

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

અને $$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (2)$$ આપેલ છે.

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી આપણે એક સમીકરણ,

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (3)$$ મેળવીએ.

અહીં k સ્વૈર અચળ છે અને તેને પ્રચલ કહીશું. k ની કોઈ પણ કિંમત માટે સમીકરણ (3) એ x અને y માં એક ઘાતવાળું સમીકરણ મળશે. તેથી તે એક રેખા-સંહતિ રજૂ કરે છે. આ સમીકરણ આપેલ બે રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાસંહતિ દર્શાવે છે તેમ આપણે સ્વીકારી લઈશું. વળી બે રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈપણ રેખા આ સંહતિનો સભ્ય છે જ તે પણ સ્વીકારી લઈશું. k ની કોઈક કિંમત પરથી આ સંહતિનો ચોક્કસ સભ્ય મળે છે. kની આ કિંમત બીજી શરતો પરથી મેળવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 20 : રેખાઓ $x - 7y + 5 = 0$ અને $3x + y - 7 = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને y-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપેલી રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈ પણ રેખાનું સમીકરણ

$$x-7y+5+k\,(3x+y-7)=0$$

એટલે કે $(1+3k)\,x+(k-7)\,y+5-7k=0$ (1)

જો આ રેખા y-અક્ષને સમાંતર હોય, તો y નો સહગુણક શૂન્ય થશે. એટલે કે,

$k-7=0$ આથી, $k=7$.

સમીકરણ (1) માં k નું મૂલ્ય મૂકતાં,

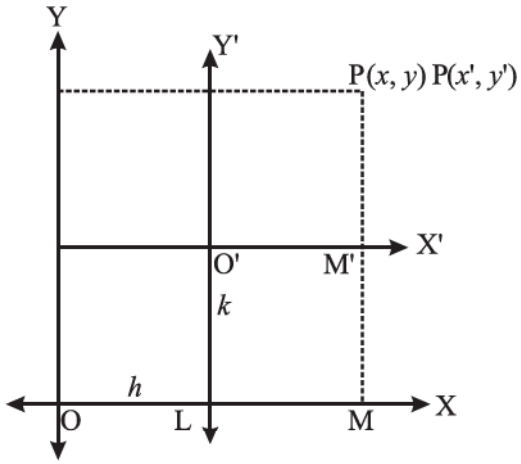
$22x-44=0$, એટલે કે $x-2=0$ માંગેલું સમીકરણ મળે છે.

સ્વાધ્યાય 10.4

1. રેખાઓ $3x+4y=7$ અને $x-y+2=0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને 5 ઢાળવાળી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.
2. રેખા $5x+4y-20=0$ ને સમાંતર અને રેખાઓ $x+2y-3=0$ અને $4x-y+7=0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.
3. રેખાઓ $2x+3y-4=0$ અને $x-5y=7$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી તથા જેનો x-અંતઃખંડ -4 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
4. રેખાઓ $5x-3y=1$ અને $2x+3y-23=0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી તથા $5x-3y-1=0$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ મેળવો.

10.7 ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર

પ્રચલિત યામાક્ષ-પદ્ધતિના સંદર્ભમાં બિંદુઓના ગણને અનુરૂપ સમીકરણને કોઈ જ ભૌમિતિક ગુણધર્મ બદલાય નહિ તે રીતે બીજી કોઈ યામ-પદ્ધતિના બિંદુઓનો ગણ લઈ સરળ બનાવી શકાય. ઊગમબિંદુનું નવા બિંદુએ સ્થાનાંતર કરી મૂળ અક્ષોને સમાંતર નવા અક્ષોમાં તેમને પરિવર્તિત કરવા તે એક આવું પરિવર્તન છે. આ પદ્ધતિના પરિવર્તનને ***અક્ષોનું સ્થાનાંતર*** (*translation of axes*) કહે છે.



આકૃતિ 10.21

અક્ષોના સ્થાનાંતરથી સમતલના દરેક બિંદુના યામ બદલાય છે. બિંદુઓના જૂના અને નવા યામ વચ્ચેનો સંબંધ જાણીને આપણે વિશ્લેષણાત્મક પ્રશ્નોના સંબંધ વિશેની પદ્ધતિના સંદર્ભમાં અભ્યાસ કરી શકીએ.

પરિવર્તિત અક્ષોને લીધે સમતલના બિંદુના યામ કેવી રીતે બદલાય છે તે જાણવા માટે આપણે અક્ષો OX અને OY ના સંદર્ભમાં એક બિંદુ P (x, y) લઈએ. ધારો કે OX અને OY ને સમાંતર નવા અક્ષો અનુક્રમે O′X′ અને O′Y′ છે. O′ એ નવું ઊગમબિંદુ છે. જૂના અક્ષોના સંદર્ભમાં O′ ના યામ (h, k) છે, એટલે કે OL = h અને LO′ = k. વળી, OM = x અને MP = y (જુઓ આકૃતિ 10.21.)

ધારો કે નવા અક્ષો O' X' અને O' Y' ના સંદર્ભમાં બિંદુ P ના x-યામ(કોટિ)(*abscissa*) અને y-યામ(ભુજ) (*ordinates*) અનુક્રમે આકૃતિ 10.21 માં O' M' $= x'$ અને M'P $= y'$ છે.

OM = OL + LM, એટલે કે, $x = h + x'$

અને MP = MM' + M' P, એટલે કે, $y = k + y'$

આથી, $x = x' + h, y = y' + k$

આ સૂત્રો જૂના અને નવા યામ વચ્ચેનો સંબંધ આપે છે.

ઉદાહરણ 21 : જો ઊગમબિંદુનું (1, 2) બિંદુએ સ્થાનાંતર કરવામાં આવે, તો બિંદુ (3, –4) ના નવા યામ શોધો.

ઉકેલ : નવા ઊગમબિંદુના યામ $h = 1, k = 2$, અને આપેલા બિંદુના મૂળ યામ $x = 3, y = -4$.

જૂના યામ (x, y) અને નવા યામ (x', y') વચ્ચેનો પરિવર્તન સંબંધ,

$x = x' + h$ એટલે કે, $x' = x - h$

અને $y = y' + k$ એટલે કે, $y' = y - k$

આપેલ કિંમતો મૂકતાં,

$x' = 3 - 1 = 2$ અને $y' = -4 - 2 = -6$

આથી નવી પદ્ધતિમાં બિંદુ (3, –4) ના યામ (2, –6) થાય.

ઉદાહરણ 22 : ઊગમબિંદુનું (3, –1) બિંદુએ સ્થાનાંતર કરી તે પ્રમાણે અક્ષોનું સ્થાનાંતર કરતાં રેખા $2x - 3y + 5 = 0$ નું પરિવર્તિત સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે P ના યામ (x, y) બદલાઈને નવા અક્ષોમાં (x', y') થાય છે. ઊગમબિંદુના જૂના યામ $h = 3$ અને $k = -1$ છે. આથી, આપણે પરિવર્તન સૂત્રો $x = x' + 3$ અને $y = y' - 1$ લખીશું. રેખાના આપેલા સમીકરણમાં આ મૂલ્યો મૂકતાં,

$$2(x' + 3) - 3(y' - 1) + 5 = 0$$

અથવા $2x' - 3y' + 14 = 0$ મળે.

આથી, નવી પદ્ધતિમાં રેખાનું સમીકરણ $2x - 3y + 14 = 0$ થશે.

સ્વાધ્યાય 10.5

1. જો ઊગમબિંદુનું (–3, –2) પર સ્થાનાંતર કરવામાં આવે, તો અક્ષોના સ્થાનાંતરના કારણે નીચે આપેલાં બિંદુઓના નવા યામ શોધો :

   (i) (1, 1) (ii) (0, 1) (iii) (5, 0) (iv) (–1, –2) (v) (3, –5)

2. ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (1, 1) બિંદુએ કરતાં નીચેના સમીકરણનું પરિવર્તિત સ્વરૂપ શું થશે તે શોધો :

   (i) $x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0$ (ii) $xy - y^2 - x + y = 0$

   (iii) $xy - x - y + 1 = 0$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 23 : જો રેખાઓ $2x+y-3=0$, $5x+ky-3=0$ અને $3x-y-2=0$ સંગામી હોય, તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : ત્રણ રેખાઓ અનન્ય બિંદુમાં છેદે, તો તેમને સંગામી રેખાઓ કહે છે. એટલે કે બે રેખાઓનું છેદબિંદુ ત્રીજી રેખા પર હોવું જોઈએ. અહીં, આપેલી રેખાઓ

$$2x+y-3=0 \quad \ldots (1)$$

$$5x+ky-3=0 \quad \ldots (2)$$

$$3x-y-2=0 \quad \ldots (3)$$

સમીકરણ (1) અને (3) ને ચોકડી ગુણાકારની રીતે ઉકેલતાં

$$\frac{x}{-2-3}=\frac{y}{-9+4}=\frac{1}{-2-3} \text{ અથવા } x=1,\ y=1$$

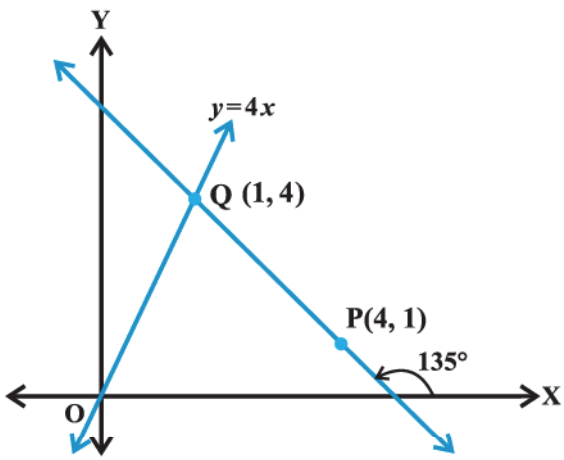
આમ, બે રેખાઓનું છેદબિંદુ (1, 1) છે. અહીં ત્રણ રેખાઓ સંગામી હોવાથી બિંદુ (1, 1) એ સમીકરણ (2)નું સમાધાન કરશે. તેથી $5\cdot1+k\cdot1-3=0$ એટલે કે $k=-2$.

ઉદાહરણ 24 : x-અક્ષની ધન દિશા સાથે 135°ના માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાને સાપેક્ષે બિંદુ P (4, 1) નું રેખા $4x-y=0$ થી અંતર શોધો.

ઉકેલ : $4x-y=0$ આપેલ રેખા છે. ... (1)

રેખા (1) નું બિંદુ P (4, 1) થી અંતર બીજી રેખાને સાપેક્ષ શોધવા પ્રથમ આપણે બે રેખાનું છેદબિંદુ શોધવું પડશે. તે માટે આપણે પહેલાં બીજી રેખાનું સમીકરણ શોધવું પડશે. (આકૃતિ 10.22) બીજી રેખાનો ઢાળ $\tan 135° = -1$. હવે -1 ઢાળવાળી અને P (4, 1) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$y-1=-1\,(x-4) \text{ એટલે કે } x+y-5=0 \quad \ldots (2)$$



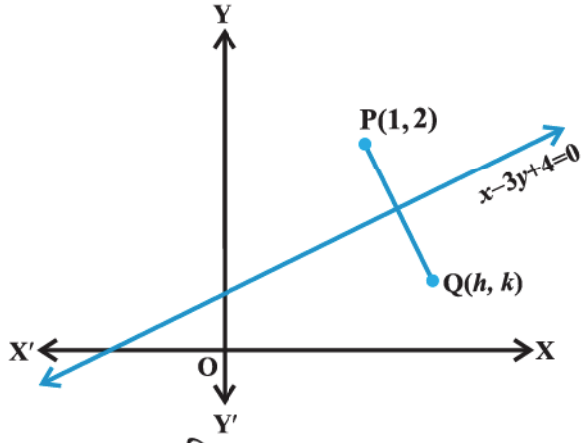
આકૃતિ 10.22

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં, $x=1$ અને $y=4$ મળે. આમ, બે રેખાઓનું છેદબિંદુ Q (1, 4) થશે. હવે, રેખા (1)નું બિંદુ P (4, 1)થી રેખા (2)ને સાપેક્ષ અંતર = બિંદુઓ P (4, 1) અને Q (1, 4) વચ્ચેનું અંતર

$$=\sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2} \text{ એકમ}$$

ઉદાહરણ 25 : આપણે એવી કલ્પના કરીએ કે એક રેખા એક સાદા અરીસાની જેમ કામ કરતી હોય, તો બિંદુ (1, 2) નું રેખા $x-3y+4=0$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $x - 3y + 4 = 0$ ને સાપેક્ષ બિંદુ P (1, 2) નું પ્રતિબિંબ Q (h, k) છે. માટે રેખા $x - 3y + 4 = 0$ એ રેખાખંડ PQ નો લંબદ્વિભાજક છે. (આકૃતિ 10.23)



આકૃતિ 10.23

આમ, રેખા PQ નો ઢાળ = $\dfrac{-1}{\text{રેખા } x-3y+4=0 \text{ નો ઢાળ}}$,

$$\frac{k-2}{h-1} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} \quad \text{અથવા} \quad 3h + k = 5 \qquad \ldots (2)$$

અને PQ નું મધ્યબિંદુ $\left(\dfrac{h+1}{2}, \dfrac{k+2}{2}\right)$ રેખા (1) પર છે. તેથી,

$$\frac{h+1}{2} - 3\left(\frac{k+2}{2}\right) + 4 = 0 \quad \text{એટલે કે,} \quad h - 3k = -3 \qquad \ldots (3)$$

(2) અને (3) ને ઉકેલતાં, $h = \dfrac{6}{5}$ અને $k = \dfrac{7}{5}$.

આમ, બિંદુ (1, 2) નું રેખા (1) ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$ છે.

ઉદાહરણ 26 : સાબિત કરો કે રેખાઓ $y = m_1x + c_1, y = m_2x + c_2$ અને $x = 0$ વડે રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$\dfrac{(c_1 - c_2)^2}{2|m_1 - m_2|}$ છે.

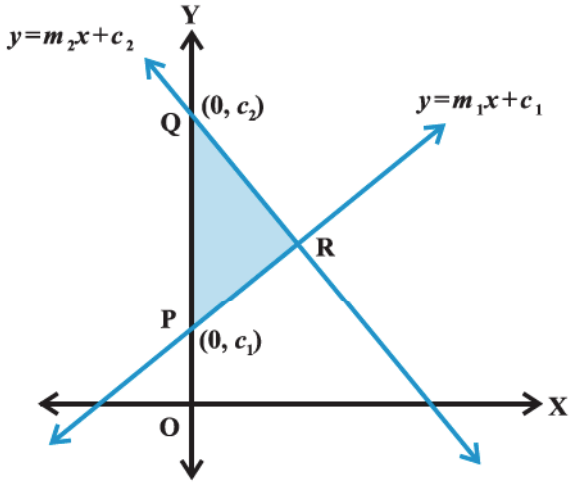
ઉકેલ : આપેલ રેખાઓ

$$y = m_1x + c_1 \qquad \ldots (1)$$

$$y = m_2x + c_2 \qquad \ldots (2)$$

$$x = 0 \qquad \ldots (3)$$

આપણે જાણીએ છીએ કે રેખા $y = mx + c$ એ રેખા $x = 0$ (y-અક્ષ) ને $(0, c)$ બિંદુમાં મળે છે. આમ, રેખાઓ (1) અને (3) દ્વારા બનતા ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુઓ P $(0, c_1)$ અને Q $(0, c_2)$ છે. (આકૃતિ 10.24) ત્રીજું શિરોબિંદુ સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલવાથી મળશે.



આકૃતિ 10.24

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતાં,

$$x=\frac{(c_2-c_1)}{(m_1-m_2)} \quad \text{અને} \quad y=\frac{(m_1c_2-m_2c_1)}{(m_1-m_2)}$$

આથી ત્રિકોણનું ત્રીજું શિરોબિંદુ

$$R\left(\frac{(c_2-c_1)}{(m_1-m_2)}, \frac{(m_1c_2-m_2c_1)}{(m_1-m_2)}\right).$$

હવે, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$=\frac{1}{2}\left| 0\left(\frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}-c_2\right)+\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}(c_2-c_1)+0\left(c_1-\frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}\right)\right|=\frac{(c_2-c_1)^2}{2|m_1-m_2|}$$

ઉદાહરણ 27 : જે રેખા દ્વારા રેખાઓ $5x - y + 4 = 0$ તથા $3x + 4y - 4 = 0$ ની વચ્ચે બનતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (1, 5) હોય, તે રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ રેખાઓ

$$5x - y + 4 = 0 \qquad \ldots (1)$$

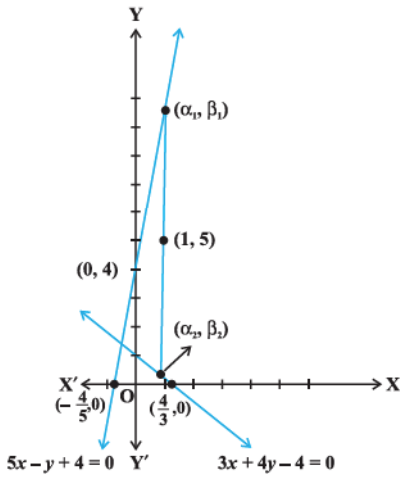
$$3x + 4y - 4 = 0 \text{ છે.} \qquad \ldots (2)$$

ધારો કે માંગેલી રેખા, રેખાઓ (1) અને (2) ને બિંદુઓ અનુક્રમે (α_1, β_1) અને (α_2, β_2) માં છેદે છે. (આકૃતિ 10.25). તેથી

$$5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0 \qquad \text{અને}$$

$$3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$$

અથવા $$\beta_1 = 5\alpha_1 + 4 \quad \text{અને} \quad \beta_2=\frac{4-3\alpha_2}{4}.$$



આકૃતિ 10.25

અહીં આપેલ છે કે માંગેલ રેખાના (α_1, β_1) અને (α_2, β_2) ની વચ્ચેના રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (1, 5) છે. આથી,

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=1 \quad \text{અને} \quad \frac{\beta_1+\beta_2}{2}=5,$$

અથવા $$\alpha_1+\alpha_2=2 \quad \text{અને} \quad \frac{5\alpha_1+4+\frac{4-3\alpha_2}{4}}{2}=5,$$

અથવા $\alpha_1+\alpha_2=2$ અને $20\alpha_1-3\alpha_2=20$ ... (3)

α_1 અને α_2 માટે (3)નાં સમીકરણો ઉકેલતાં,

$$\alpha_1=\frac{26}{23} \text{ અને } \alpha_2=\frac{20}{23} \text{ મળશે.}$$

$$\text{આથી, } \beta_1=5\cdot\frac{26}{23}+4=\frac{222}{23}.$$

(1, 5) અને (α_1, β_1) માંથી પસાર થતી રેખા એ માંગેલી રેખાનું સમીકરણ છે.

$$y-5=\frac{\beta_1-5}{\alpha_1-1}(x-1) \text{ અથવા } y-5=\frac{\frac{222}{23}-5}{\frac{26}{23}-1}(x-1)$$

અથવા $107x-3y-92=0$ માંગેલ રેખા છે.

ઉદાહરણ 28 : રેખાઓ $3x-2y=5$ અને $3x+2y=5$ થી સમાન અંતરે આવેલ તમામ બિંદુઓનો પથ એક રેખા છે તેમ બતાવો.

ઉકેલ : $3x-2y=5$ ... (1)

અને $3x+2y=5$ ... (2)

આપેલ રેખાઓ છે. ધારો કે (h, k) રેખાઓ (1) અને (2) થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુ છે.

$$\therefore \frac{|3h-2k-5|}{\sqrt{9+4}}=\frac{|3h+2k-5|}{\sqrt{9+4}} \text{ અથવા } |3h-2k-5|=|3h+2k-5|,$$

તેથી $3h-2k-5=3h+2k-5$ અથવા $-(3h-2k-5)=3h+2k-5$.

આ બે સંબંધોને સરળરૂપ આપતાં $k=0$ અને $h=\frac{5}{3}$ મળશે. આમ, બિંદુ (h, k) એ સમીકરણો $y=0$ અથવા $x=\frac{5}{3}$ ને સંતોષે છે.

આ સમીકરણો રેખા દર્શાવે છે. આમ, (1) અને (2) થી સમાન અંતરે આવેલાં બિંદુઓનો પથ રેખા છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 10

1. k ની કઈ કિંમત માટે રેખા $(k-3)x-(4-k^2)y+k^2-7k+6=0$
   (a) x-અક્ષને સમાંતર થાય.
   (b) y-અક્ષને સમાંતર થાય.
   (c) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય.
2. રેખા $\sqrt{3}x+y+2=0$ નું અભિલંબ સ્વરૂપ $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ હોય, તો θ અને p ની કિંમત શોધો.
3. જેના અક્ષો પર રચાતાં અંતઃખંડોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે 1 અને – 6 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
4. y-અક્ષ પરનું કયું બિંદુ $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ રેખાથી 4 એકમ અંતરે આવેલ છે ?
5. બિંદુઓ $(\cos\theta, \sin\theta)$ અને $(\cos\phi, \sin\phi)$ માંથી પસાર થતી રેખા પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબનું લંબઅંતર શોધો.

6. રેખાઓ $x - 7y + 5 = 0$ અને $3x + y = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને y-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

7. રેખા $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ અને y-અક્ષના છેદબિંદુએ આપેલ રેખાને લંબ તેવી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

8. રેખાઓ $y-x=0, x+y=0$ અને $x-k=0$ થી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. જો રેખાઓ $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ અને $2x - y - 3 = 0$ એક બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તો p શોધો.

10. જો રેખાઓ $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ અને $y = m_3x + c_3$ સંગામી હોય તો સાબિત કરો કે,

$m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0.$

11. બિંદુ (3, 2)માંથી પસાર થતી અને રેખા $x - 2y = 3$ સાથે $45°$ નો ખૂણો બનાવતી રેખાનાં સમીકરણો મેળવો.

12. રેખાઓ $4x + 7y - 3 = 0$ અને $2x - 3y + 1 = 0$ નાં છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને અક્ષો પર સમાન અંતઃખંડ બનાવતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

13. ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને $y = mx + c$ સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{y}{x} = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m \tan\theta}$ છે.

14. (–1, 1) અને (5, 7) ને જોડતી રેખાનું રેખા $x + y = 4$ કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે ?

15. બિંદુ (1, 2)નું રેખા $4x + 7y + 5 = 0$ થી રેખા $2x - y = 0$ ની દિશામાં અંતર શોધો.

16. બિંદુ (–1, 2)માંથી પસાર થતી રેખાની દિશા શોધો કે જેથી તેનું રેખા $x + y = 4$ સાથેનું છેદબિંદુ (–1, 2)થી 3 એકમ અંતર હોય.

17. કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણનાં અત્યંબિંદુઓ (1, 3) અને (– 4, 1) હોય, તો કાટકોણ બનાવતી બાજુઓને સમાવતી રેખાનાં સમીકરણો મેળવો.

18. બિંદુ (3, 8) નું રેખા $x + 3y = 7$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ મેળવો. અહીં રેખાનો સાદા અરીસા તરીકે વિચાર કરો.

19. જો રેખાઓ $y = 3x + 1$ અને $2y = x + 3$, રેખા $y = mx + 4$ સાથે સમાન માપનો ખૂણો બનાવતી હોય, તો m નું મૂલ્ય શોધો.

20. જો એક ચલ બિંદુ P (x, y) ના રેખાઓ $x + y - 5 = 0$ અને $3x - 2y + 7 = 0$ થી લંબઅંતરોનો સરવાળો હંમેશાં 10 રહે તો સાબિત કરો કે બિંદુ P નો પથ એક રેખા છે.

21. સમાંતર રેખાઓ $9x + 6y - 7 = 0$ અને $3x + 2y + 6 = 0$ થી સમાન અંતરે આવેલી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

22. બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતું પ્રકાશનું એક કિરણ બિંદુ A માંથી પસાર થાય છે અને x-અક્ષ પર પરિવર્તિત થાય છે અને પરિવર્તિત કિરણ બિંદુ (5, 3) માંથી પસાર થાય છે, તો બિંદુ A ના યામ શોધો.

23. સાબિત કરો કે બિંદુઓ $\left(\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$ અને $\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$થી રેખા $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ નાં લંબઅંતરોનો ગુણાકાર b^2 છે.

24. એક વ્યક્તિ સમીકરણો $2x - 3y + 4 = 0$ અને $3x + 4y - 5 = 0$ દ્વારા દર્શાવતા સીધા રસ્તાઓના સંગમબિંદુ પર ઊભો છે અને તે સમીકરણ $6x - 7y + 8 = 0$ દ્વારા દર્શાવતા સીધા રસ્તા પર ન્યૂનતમ સમયમાં પહોંચવા માંગે છે, તો તે જે માર્ગને અનુસરે તેનું સમીકરણ મેળવો.

સારાંશ

- (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) બિંદુઓમાંથી પસાર થતી શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખાનો ઢાળ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $x_1 \neq x_2$.
- જો રેખા x-અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે તો તેનો ઢાળ $m = \tan \alpha$, $\alpha \neq 90°$.
- સમક્ષિતિજ રેખાનો ઢાળ શૂન્ય છે અને શિરોલંબ રેખાનો ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત નથી.
- રેખાઓ L_1 અને L_2ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 હોય અને તેમની વચ્ચેના લઘુકોણનું માપ θ હોય, તો $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0$.
- જો બે રેખાઓના ઢાળ સમાન હોય તો અને તો જ તે રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય.
- જો બે રેખાઓના ઢાળનો ગુણાકાર -1 હોય તો અને તો જ તે રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય.
- બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ હોય તો અને તો જ ABનો ઢાળ = BC નો ઢાળ.
- x-અક્ષથી a એકમ અંતરે આવેલી સમક્ષિતિજ રેખાનાં સમીકરણ $y = a$ અથવા $y = -a$ છે.
- y-અક્ષથી b એકમ અંતરે આવેલી શિરોલંબ રેખાનાં સમીકરણ $x = b$ અથવા $x = -b$ છે.
- બિંદુ (x, y) એ m ઢાળવાળી અને (x_o, y_o) બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા પર હોય, તો $y - y_o = m(x - x_o)$.
- (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ છે.
- m ઢાળવાળી અને જેનો y-અંતઃખંડ c હોય તેવી રેખા પર બિંદુ (x, y) હોય, તો અને તો જ $y = mx + c$.
- m ઢાળવાળી અને જેનો x-અંતઃખંડ d હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ $y = m(x - d)$.
- x-અક્ષ પર a અને y-અક્ષ પર b અંતઃખંડ કાપતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ છે.
- ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય અને લંબ એ x-અક્ષની ધન દિશા સાથે ω માપનો ખૂણો બનાવે તે અભિલંબ સ્વરૂપમાં રેખાનું સમીકરણ $x \cos\omega + y \sin\omega = p$.
- બિંદુ A અને B જ્યારે એક સાથે શૂન્ય ન હોય ત્યારે $Ax + By + C = 0$ પ્રકારના કોઈ પણ સમીકરણને વ્યાપક સુરેખ સમીકરણ કે રેખાનું વ્યાપક સમીકરણ કહે છે.
- બિંદુ (x_1, y_1) થી રેખા $Ax + By + C = 0$ નું લંબઅંતર $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- સમાંતર રેખાઓ $Ax + By + C_1 = 0$ અને $Ax + By + C_2 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.