પ્રકરણ 11

# શાંકવો

❖*Let the relation of knowledge to real life be very visible to your pupils and let them understand how by knowledge the world could be transformed. – BERTRAND RUSSELL* ❖

## 11.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળના પ્રકરણ 10 માં આપણે રેખાનાં સમીકરણોનાં વિવિધ સ્વરૂપો વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે કેટલાક વિશેષ વક્રો જેવા કે વર્તુળ, ઉપવલય, પરવલય, અતિવલયનો અભ્યાસ કરીશું. પરવલય અને અતિવલય નામ એપોલોનિયસે આપ્યાં હતાં. આ વક્રો લંબ દ્વિશંકુના સમતલ સાથેના છેદ તરીકે મેળવાતા હોવાથી તે શંકુ પરિચ્છેદ કે શાંકવો તરીકે ઓળખાય છે. આ વક્રોનો ગ્રહોની ગતિ, ટેલિસ્કોપ અને ડિશ એન્ટેનાની રચના, ફ્લેશ લાઈટમાં પરાવર્તક અને વાહનોમાં હેડલાઈટ વગેરે ઘણાં ક્ષેત્રોમાં બહોળો ઉપયોગ થાય છે. હવે આપણે આ પ્રકરણમાં આગળ જોઈશું કે કેવી રીતે લંબ દ્વિશંકુના સમતલ સાથેના છેદથી જુદા જુદા વક્રો મળે છે.

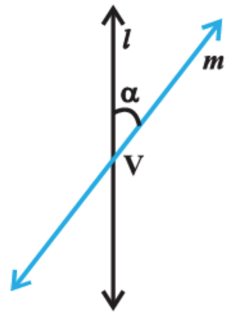
Apollonius
(262 B.C. -190 B.C.)

## 11.2 શંકુનો પરિચ્છેદ

ધારો કે એક નિશ્ચિત શિરોલંબ રેખા $l$ છે અને $m$ એ કોઈ અન્ય રેખા છે. તે $l$ ને નિશ્ચિત બિંદુ V માં છેદે છે અને તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\alpha$ છે. (આકૃતિ11.1.)

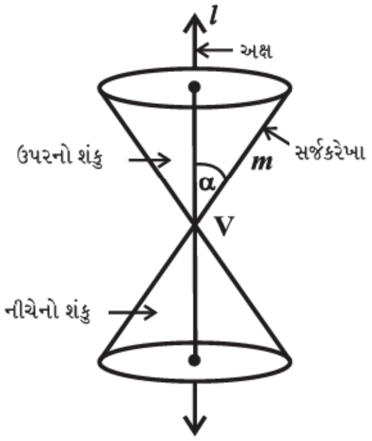
ધારો કે રેખા $m$ ને ખૂણો $\alpha$ અચળ રહે તે રીતે $l$ આસપાસ પરિભ્રમણ આપવામાં આવે છે. આ રીતે સર્જાતી સપાટીને દ્વિફલકી લંબવૃત્તીય પોલો શંકુ કહેવાય છે અને આપણે તેનો સંદર્ભ શંકુ તરીકે લઇશું. આથી,આવા શંકુનો વ્યાપ બંને દિશામાં અનંત હોય છે. (આકૃતિ11.2.)

બિંદુ V ને શંકુનું ***શિરોબિંદુ*** *(vertex)* કહે છે. રેખા $l$ ને શંકુનો ***અક્ષ*** (*axis*) કહે છે અને રેખા $m$ ને તેની કોઈ પણ સ્થિતિમાં શંકુની ***સર્જક રેખા*** (*generator*) કહે છે. શિરોબિંદુ શંકુને બે ભાગમાં વિભાજીત કરે અને તે પ્રત્યેક ભાગને ***ફલક*** (*nappes*) કહે છે.

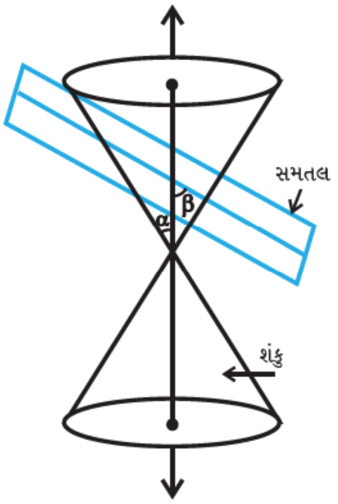


**આકૃતિ 11. 1**

હવે આપણે શંકુનો કોઈ સમતલ સાથે છેદ લઈએ તો, આવા છેદને શંકુનો ***પરિચ્છેદ*** (*section*) કહે છે. આમ, લંબશંકુના સમતલ સાથેના છેદથી મળતા વક્રોને ***શાંકવો*** (*conics*) કહે છે.



**આકૃતિ 11. 2**



**આકૃતિ 11. 3**

જ્યારે શંકુનો સમતલ સાથે છેદ લઈએ ત્યારે, સમતલે શંકુના અક્ષ સાથે બનાવેલ ખૂણાના આધારે આપણને જુદા જુદા શાંકવો મળશે. ધારો કે, સમતલ શંકુના શિરોલંબ અક્ષ સાથે $\beta$ માપનો ખૂણો રચે છે. (આકૃતિ 11.3.)

આમ શંકુનો સમતલ સાથેનો છેદ કાં તો શિરોબિંદુ બને અથવા શંકુના શિરોબિંદુથી ઉપરના અથવા નીચેના ફલકમાં મળે:

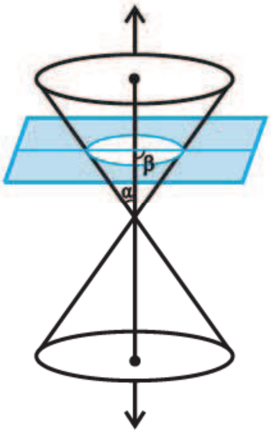
### 11.2.1 *વર્તુળ, ઉપવલય, પરવલય અને અતિવલય (Circle, Ellipse, Parabola and Hyperbola)*

જ્યારે સમતલ શંકુના ફલકને (શિરોબિંદુ સિવાય) છેદે છે, ત્યારે નીચેની સ્થિતિઓ થશે:

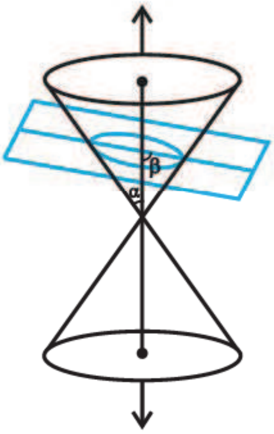
**(a)** જ્યારે $\beta = 90^\circ$, ત્યારે તેમનો છેદ વર્તુળ થશે. (આકૃતિ 11.4.)

**(b)** જ્યારે $\alpha < \beta < 90^\circ$, ત્યારે તેમનો છેદ ઉપવલય થશે. (આકૃતિ 11.5.)

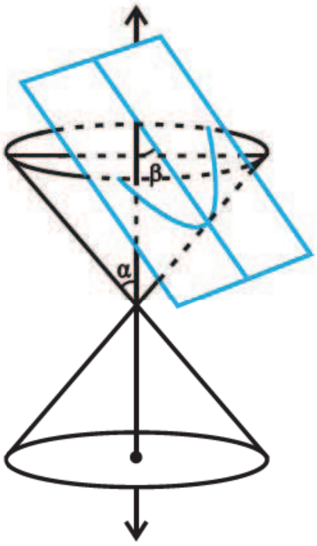
**(c)** જ્યારે $\beta = \alpha$; ત્યારે તેમનો છેદ પરવલય થશે. (આકૃતિ 11.6.)



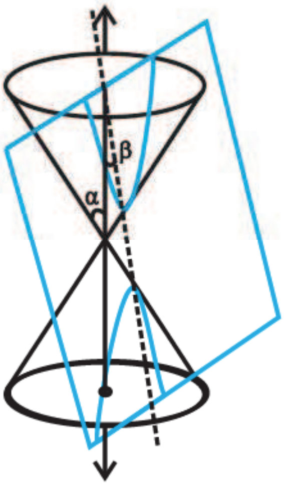

આકૃતિ 11.4




આકૃતિ 11.5




આકૃતિ 11.6




આકૃતિ 11.7

ઉપરની ત્રણે સ્થિતિઓમાં સમતલ શંકુના એક ફલકને પૂર્ણ રીતે આરપાર કાપે છે.

**(d)** જ્યારે $0 \le \beta < \alpha$ ત્યારે સમતલ શંકુના બંને ફલકને છેદે છે અને તેમનો છેદ અતિવલય છે. (આકૃતિ 11.7)

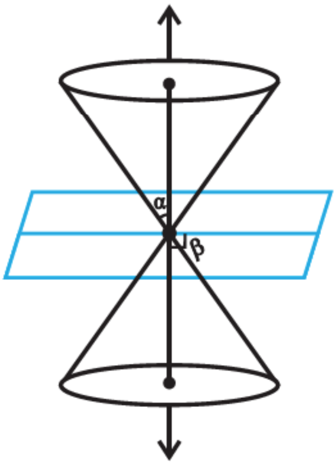
### 11.2.2 *વિસર્જિત શંકુ પરિચ્છેદ (Degenerated conic section)*

જ્યારે સમતલ શંકુને શિરોબિંદુએ છેદે ત્યારે નીચેની સ્થિતિઓ થશે:

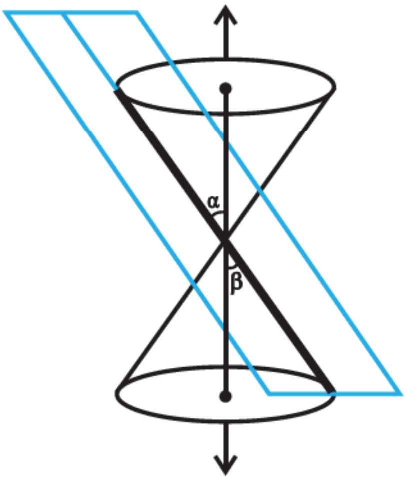
**(a)** જ્યારે $\alpha < \beta \le 90°$, ત્યારે તેમનો છેદ એ બિંદુ થશે. (આકૃતિ11.8.)

**(b)** જ્યારે $\beta = \alpha$, ત્યારે સમતલ શંકુની સર્જકરેખાને સમાવશે અને તેમનો છેદ એ રેખા થશે. (આકૃતિ 11.9.) તે પરવલયનું વિસર્જિત રૂપ છે.

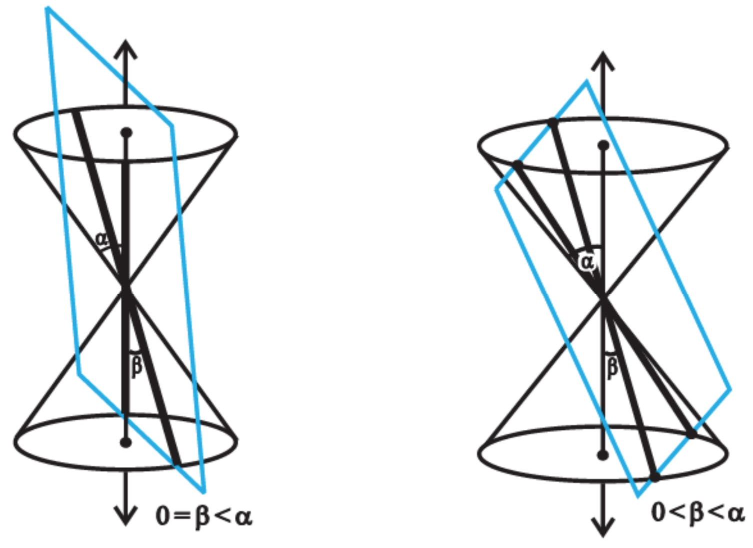
**(c)** જ્યારે $0 \le \beta < \alpha$, ત્યારે તેમનો છેદ પરસ્પર છેદતી રેખાઓ થશે. (આકૃતિ11.10.) તે અતિવલયનું વિસર્જિત રૂપ છે.




આકૃતિ 11.8




આકૃતિ 11.9




આકૃતિ 11.10

હવે, આપણે આગળના વિભાગોમાં ભૌતિક ગુણધર્મોને આધારે બધા જ શાંકવોનાં પ્રમાણિત સમીકરણો મેળવીશું.

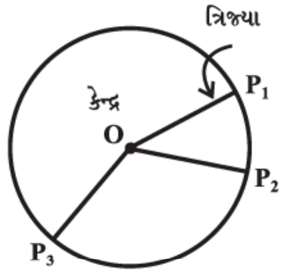
## 11.3 વર્તુળ

*વ્યાખ્યા 1 : સમતલના ચોક્કસ બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં તમામ બિંદુઓના ગણને વર્તુળ કહેવાય છે.*

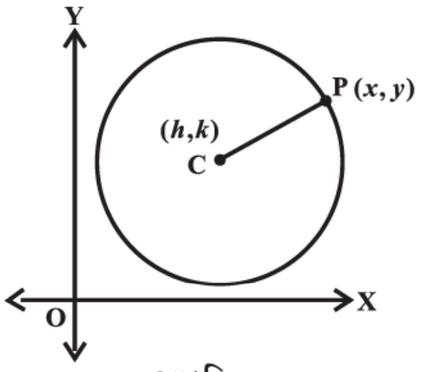
ચોક્કસ બિંદુને તે વર્તુળનું *કેન્દ્ર (centre)* અને કેન્દ્રથી વર્તુળ પર આવેલા કોઈપણ બિંદુના અંતરને ***વર્તુળની ત્રિજ્યા*** *(radius)* કહેવાય છે. (આકૃતિ 11.11)

હવે જો વર્તુળનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય, તો આપણને વર્તુળનું સમીકરણ સરળતમ સ્વરૂપમાં મળે. કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા આપેલ હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ નીચે પ્રમાણે મેળવીએ. (આકૃતિ 11.12.)

ધારો કે બિંદુ C $(h, k)$ વર્તુળનું કેન્દ્ર અને $r$ ત્રિજ્યા છે. P$(x, y)$ વર્તુળ પરનું કોઈપણ બિંદુ છે. (આકૃતિ 11.12)




આકૃતિ 11.11




આકૃતિ 11.12

હવે, વ્યાખ્યા પ્રમાણે CP = $r$. અંતરસૂત્ર પ્રમાણે,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

તેથી $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

આથી ઉલટું પણ સત્ય છે.

આ $(h,k)$ કેન્દ્ર અને $r$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ છે.

**ઉદાહરણ 1 :** કેન્દ્ર (0, 0) અને $r$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં $h = k = 0$ લેતાં વર્તુળનું સમીકરણ $x^2 + y^2 = r^2$ મળે છે.

**ઉદાહરણ 2 :** કેન્દ્ર (–3, 2) અને 4 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં $h = -3$, $k = 2$ અને $r = 4$. તેથી માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

**ઉદાહરણ 3 :** વર્તુળ $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ નું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં આપેલ સમીકરણ

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8 \text{ છે.}$$

હવે, પૂર્ણવર્ગ તરીકે દર્શાવવા પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં,

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$

$$\therefore (x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

$$\therefore (x - (-4))^2 + (y - (-5))^2 = 7^2$$

આથી, આપેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર (– 4, –5) અને ત્રિજ્યા 7 થશે.

**ઉદાહરણ 4 :** જેનું કેન્દ્ર રેખા $x + y = 2$ ઉપર હોય અને જે (2, – 2) અને (3, 4) માંથી પસાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ છે.

હવે, વર્તુળ (2, – 2) અને (3,4) માંથી પસાર થાય છે.

તો, $(2 - h)^2 + (-2 - k)^2 = r^2$ ... (1)

અને $(3 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2$ ... (2)

વળી, વર્તુળનું કેન્દ્ર રેખા $x + y = 2$ ઉપર આવેલું છે.

$h + k = 2$ ... (3)

સમીકરણો (1), (2) અને (3) ને ઉકેલતાં, $h = 0.7$, $k = 1.3$ **અને** $r^2 = 12.58$

તેથી, માંગેલ સમીકરણ $(x - 0.7)^2 + (y - 1.3)^2 = 12.58$.

## સ્વાધ્યાય 11.1

નીચેના પ્રશ્નો 1 થી 5 પૈકી પ્રત્યેકમાં વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો:

**1.** કેન્દ્ર (0,2) અને 2 ત્રિજ્યાવાળા

**2.** કેન્દ્ર (–2,3) અને 4 ત્રિજ્યાવાળા

**3.** કેન્દ્ર $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ અને $\frac{1}{12}$ ત્રિજ્યાવાળા

**4.** કેન્દ્ર (1,1) અને $\sqrt{2}$ ત્રિજ્યાવાળા

**5.** કેન્દ્ર $(-a, -b)$ અને $\sqrt{a^2 - b^2}$ ત્રિજ્યાવાળા

નીચેના પ્રશ્નો 6 થી 9 પૈકી પ્રત્યેકમાં વર્તુળનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધોઃ

**6.** $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$

**7.** $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

**8.** $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

**9.** $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

**10.** જેનું કેન્દ્ર રેખા $4x + y = 16$ ઉપર હોય તથા જે (4,1) અને (6,5) માંથી પસાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

**11.** જેનું કેન્દ્ર રેખા $x - 3y - 11 = 0$ ઉપર હોય તથા જે (2,3) અને (–1,1) માંથી પસાર થતું હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

**12.** જેનું કેન્દ્ર $x$-અક્ષ પર હોય અને જે (2,3) માંથી પસાર થતું હોય અને જેની ત્રિજ્યા 5 હોય એવા વર્તુળનું સમીકરણ શોધો.

**13.** ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતાં અને અક્ષો પર અંતઃખંડ $a$ અને $b$ બનાવતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

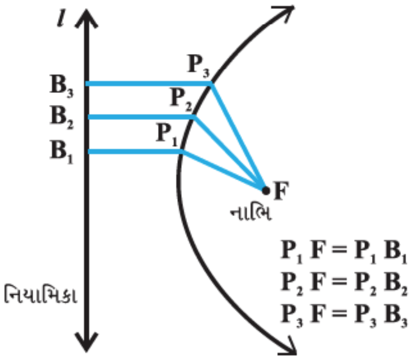
**14.** કેન્દ્ર (2, 2) વાળા અને બિંદુ (4, 5)માંથી પસાર થતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

**15.** બિંદુ (–2.5, 3.5) એ વર્તુળ $x^2 + y^2 = 25$ ની અંદર, બહાર કે ઉપર છે તે નક્કી કરો.

## 11.4 પરવલય

**વ્યાખ્યા 2 :** *કોઈ નિશ્ચિત રેખા અને નિશ્ચિત બિંદુથી (રેખા પર ન હોય તેવા) સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓના ગણને **પરવલય** (parabola) કહે છે.*

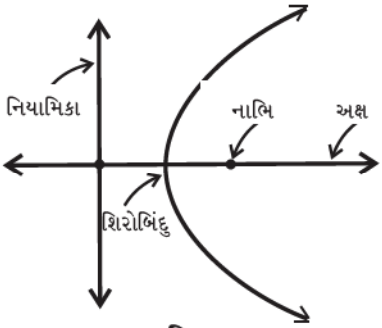
નિશ્ચિત રેખા $l$ ને પરવલયની ***નિયામિકા*** *(directrix)* અને નિશ્ચિત બિંદુ F ને પરવલયનું ***નાભિ*** *(Focus)* કહે છે (આકૃતિ 11.13). (અહીં ‘Para’ નો અર્થ **માટે** (For) અને ‘bola’ નો અર્થ ***ફેંકવું*** *(throwing)* એવો થાય છે. એટલે કે દડાને હવામાં ફેંકવામાં આવે ત્યારે તેનો ગતિમાર્ગ).



આકૃતિ 11.13

> **નોંધ** જો નિશ્ચિત બિંદુ એ નિશ્ચિત રેખા પર હોય તો, કોઈ નિશ્ચિત રેખા અને નિશ્ચિત બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓનો ગણ નિશ્ચિત બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા થશે અને તે નિશ્ચિત રેખાને લંબ હશે. આ રેખા પરવલયનું વિસર્જિત રૂપ છે

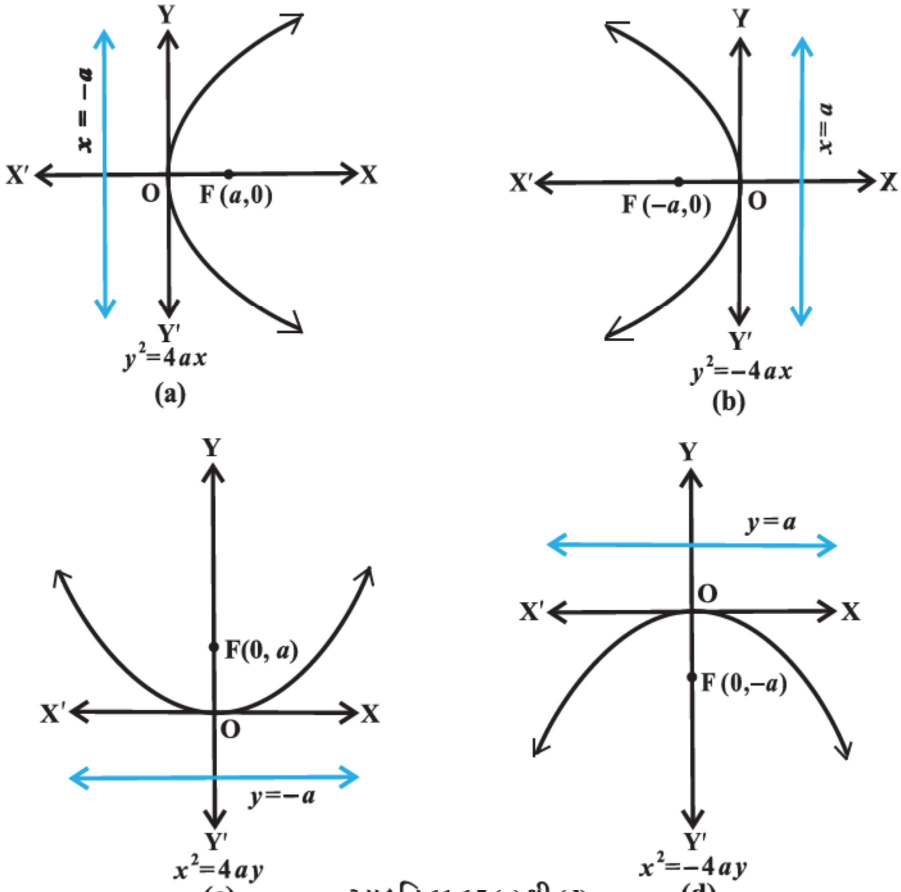
નાભિમાંથી પસાર થતી અને નિયામિકાને ***લંબ રેખાને પરવલયનો અક્ષ*** કહેવાય છે. પરવલય અને તેના અક્ષનું છેદબિંદુ પરવલયનું ***શિરોબિંદુ*** *(vertex)* કહેવાય છે. (આકૃતિ 11.14)



આકૃતિ 11.14

### 11.4.1 પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ

જો પરવલયનું શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય અને તે $x$-અક્ષ કે $y$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય તો આપણને પરવલયનું સરળતમ સમીકરણ મળે છે. પરવલયોની આવી ચાર શક્ય સ્થાન આકૃતિઓ આકૃતિ 11.15 (a) થી (d)માં દર્શાવેલ છે.




આકૃતિ 11.15 (a) થી (d)

હવે, આપણે આકૃતિ 11.15 (a) માં દર્શાવેલ પરવલયનું સમીકરણ નીચે દર્શાવેલી રીતે મેળવીશું:

અહીં નાભિ $(a, 0)$ $a > 0$; અને નિયામિકા $x = -a$ છે.

ધારો કે F નાભિ અને $l$ નિયામિકા છે. નિયામિકા પર લંબ FM દોરો અને FM ના મધ્યબિંદુને O લો. OM ને X સુધી લંબાવો. પરવલયની વ્યાખ્યા પ્રમાણે મધ્યબિંદુ O પરવલય પર થશે અને તેને પરવલયનું શિરોબિંદુ કહેવાય છે. O ને ઊગમબિંદુ તરીકે લઈ OX ને $x$-અક્ષ અને તેને લંબરેખા OY ને $y$-અક્ષ તરીકે લઈએ. નાભિથી નિયામિકા સુધીનું અંતર $2a$ લેતાં, નાભિના યામ $(a, 0)$ અને નિયામિકાનું સમીકરણ $x + a = 0$ થશે. આ માહિતી આકૃતિ 11.16 માં દર્શાવેલ છે.

ધારો કે, $P(x, y)$ પરવલય પરનું કોઈ બિંદુ છે. તેથી PF = PB થાય. PB એ રેખા $l$ પર લંબ છે. B ના યામ $(-a, y)$ થશે. અંતરસૂત્ર પ્રમાણે,

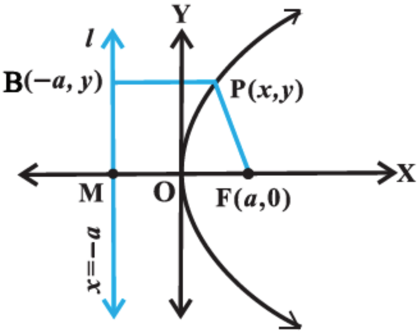
$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ અને } PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે PF = PB

$$\therefore \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

$$\therefore (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

અથવા $\quad x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$




આકૃતિ 11.16

અથવા $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ ...(2)

આમ, પરવલય પરનું કોઈપણ બિંદુ $y^2 = 4ax$ નું સમાધાન કરે.

આથી ઊલટું, ધારો કે P$(x, y)$ સમીકરણ (2) નું સમાધાન કરે છે.

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 4ax} = \sqrt{(x+a)^2} = PB \quad ...(3)$$

એટલે કે બિંદુ P$(x,y)$ પરવલય પર હોય.

આમ, સમીકરણ (2) અને (3) પરથી સાબિત થાય છે કે જે પરવલયનું શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય, નાભિ $(a,0)$ હોય અને નિયામિકાનું સમીકરણ $x = -a$ હોય તે પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4ax$ છે.

**ચર્ચા** : સમીકરણ (2) માં $a > 0$ હોવાથી, $x$ નું મૂલ્ય કોઈ પણ ધન સંખ્યા કે શૂન્ય હોઈ શકે, પરંતુ ઋણ ન હોઈ શકે. આ પરિસ્થિતિમાં પરવલયનો વ્યાપ પ્રથમ અને ચતુર્થ ચરણમાં અનંત સુધી લંબાવી શકાય. પરવલયનો અક્ષ ધન $x$-અક્ષ થાય.

આ જ પ્રમાણે આપણે અન્ય પરવલયોનાં સમીકરણો મેળવી શકીએ.

આકૃતિ 11.15 (b) માં $y^2 = -4ax$,

આકૃતિ 11.15 (c) માં $x^2 = 4ay$,

આકૃતિ 11.15 (d) માં $x^2 = -4ay$,

આ ચારેય સમીકરણોને પરવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો કહે છે.

**નોંધ** પરવલયના પ્રમાણિત સમીકરણમાં, પરવલયનું નાભિ કોઈ એક અક્ષ પર હોય છે, શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય છે અને નિયામિકા બીજા અક્ષને સમાંતર હોય છે. અહીં, એવા પરવલય કે જેમાં નાભિ કોઈપણ બિંદુ હોય અને નિયામિકા કોઈ પણ રેખા હોય તેમનો અભ્યાસ આ પુસ્તકના વિષયવસ્તુની બહાર છે.

આકૃતિ 11.15 માં દર્શાવેલ પરવલયના પ્રમાણિત સમીકરણ ઉપરથી નીચેનાં તારણો મેળવી શકાય:

1. પરવલય, તેના અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય છે. જો સમીકરણમાં $y^2$ વાળું પદ હોય તો, તે $x$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય છે અને જો સમીકરણમાં $x^2$ વાળું પદ હોય તો તે $y$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય છે.
2. જો પરવલયનો અક્ષ $x$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય, તો
   (a) જો $x$ નો સહગુણક ધન હોય, તો પરવલય જમણી બાજુ ખુલ્લો વક્ર છે.
   (b) જો $x$ નો સહગુણક ઋણ હોય, તો પરવલય ડાબી બાજુ ખુલ્લો વક્ર છે.
3. જો પરવલયનો અક્ષ, $y$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય, તો
   (c) જો $y$ નો સહગુણક ધન હોય, તો પરવલય ઉપરની બાજુ ખુલ્લો વક્ર છે.
   (d) જો $y$ નો સહગુણક ઋણ હોય, તો પરવલય નીચેની બાજુ ખુલ્લો વક્ર છે.

### 11.4.2 પરવલયનો નાભિલંબ :

**વ્યાખ્યા 3** : *પરવલયના નાભિમાંથી પસાર થતો અને પરવલયના અક્ષને લંબ હોય તથા જેનાં અંત્યબિંદુઓ પરવલય પર હોય તેવા રેખાખંડને પરવલયનો* ***નાભિલંબ*** *કહે છે.* (આકૃતિ 11.17.)

પરવલય $y^2 = 4ax$ ના નાભિલંબની લંબાઇ શોધવી છે. (આકૃતિ 11.18)

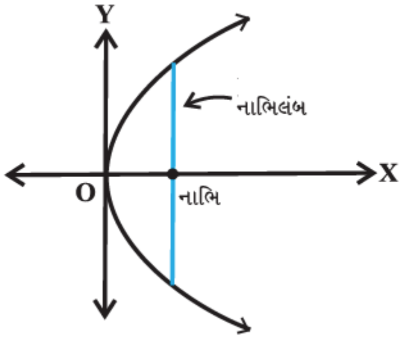
પરવલયની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, AF = AC.

પરંતુ AC = FM = $2a$

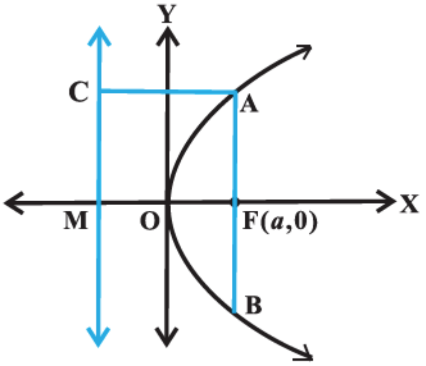
તેથી AF = $2a$.

અને પરવલય $x$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોવાથી AF = FB અને તેથી

AB = નાભિલંબની લંબાઈ = $4a$.




આકૃતિ 11.17



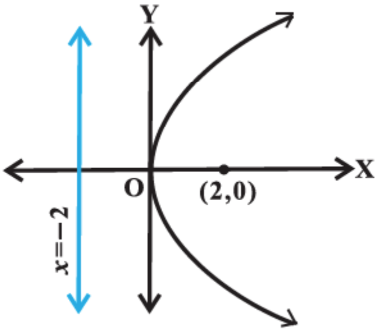

આકૃતિ 11.18

**ઉદાહરણ 5 :** પરવલય $y^2 = 8x$ ના નાભિના યામ, અક્ષ, નિયામિકાનું સમીકરણ અને નાભિલંબની લંબાઈ શોધો.

**ઉકેલ :** આપેલ સમીકરણમાં $y^2$ વાળું પદ હોવાથી આ પરવલય $x$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત થશે.

વળી, સમીકરણમાં $x$ નો સહગુણક ધન હોવાથી પરવલય જમણી બાજુ ખૂલશે. આપેલ સમીકરણને $y^2 = 4ax$, સાથે સરખાવતાં $a = 2$ મળે. તેનો અક્ષ $x$-અક્ષ છે.

આથી પરવલયના નાભિના યામ (2, 0) થશે. નિયામિકાનું સમીકરણ $x = -2$ થશે. (આકૃતિ 11.19)




આકૃતિ 11.19

નાભિલંબની લંબાઈ $4a = 4 \times 2 = 8$.

**ઉદાહરણ 6 :** જેનું નાભિ (2, 0) હોય તથા નિયામિકા $x = -2$ હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** નાભિ (2,0) $x$-અક્ષ પર આવેલ છે. તેથી પરવલયનો અક્ષ એ $x$-અક્ષ છે. આથી, પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $y^2 = 4ax$ અથવા $y^2 = -4ax$ થશે. અહીં, નિયામિકાનું સમીકરણ $x = -2$ અને નાભિ (2,0) હોવાથી, પરવલય $a = 2$ માટે $y^2 = 4ax$ પ્રકારનો થશે અને આથી માંગેલ પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4(2)x = 8x$.

**ઉદાહરણ 7 :** જેનું શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ (0, 0) હોય અને નાભિના યામ (0, 2) હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં, શિરોબિંદુ (0, 0) છે અને નાભિના યામ (0, 2) છે. નાભિ $y$-અક્ષ પર છે. તેથી $y$-અક્ષ એ પરવલયનો અક્ષ થશે. આથી નાભિ ધન $y$-અક્ષ પર હોવાથી પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ સ્વરૂપનું હોય. આમ, માંગેલ સમીકરણ

$$x^2 = 4(2)y, \text{ એટલે કે, } x^2 = 8y \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 8 :** $y$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત અને શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય તેવા અને બિંદુ (2,–3) માંથી પસાર થતા પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** પરવલય $y$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે તેમજ શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ છે. આથી આપેલ પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ અથવા $x^2 = -4ay$ થાય. અહીં ચિહ્ન પરવલય ઉપર કે નીચે ખૂલશે તેના પર આધાર રાખે છે. પરંતુ પરવલય ચોથા ચરણમાં આવેલ બિંદુ (2,–3)માંથી પસાર થાય છે. તેથી પરવલય નીચેની તરફ ખૂલશે. આમ, પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = -4ay$ પ્રકારનું હોય.

વળી, પરવલય ( 2,–3) માંથી પસાર થાય છે.

$$\text{તેથી } 2^2 = -4a(-3), \text{ એટલે કે, } a = \frac{1}{3}$$

આથી પરવલયનું સમીકરણ

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y, \text{ એટલે કે, } 3x^2 = -4y$$

## સ્વાધ્યાય 11.2

નીચેના પ્રશ્ન-ક્રમાંક 1 થી 6 માટે નાભિના યામ, પરવલયના અક્ષનું સમીકરણ, નિયામિકાનું સમીકરણ અને નાભિલંબની લંબાઈ શોધો:

**1.** $y^2 = 12x$ **2.** $x^2 = 6y$ **3.** $y^2 = -8x$ **4.** $x^2 = -16y$

**5.** $y^2 = 10x$ **6.** $x^2 = -9y$

નીચેના પ્રશ્ન-ક્રમાંક 7 થી 12 માં આપેલી શરતો પ્રમાણે પરવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**7.** નાભિ (6, 0); નિયામિકા $x = -6$

**8.** નાભિ (0, –3); નિયામિકા $y = 3$

**9.** શિરોબિંદુ (0, 0); નાભિ (3, 0)

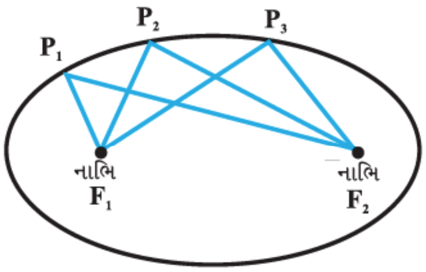
**10.** શિરોબિંદુ (0, 0); નાભિ (–2, 0)

**11.** શિરોબિંદુ (0, 0), (2, 3)માંથી પસાર થતા અને $x$-અક્ષ જેનો અક્ષ હોય.

**12.** શિરોબિંદુ (0, 0), (5, 2)માંથી પસાર થતા અને $y$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત.

## 11.5 ઉપવલય

**વ્યાખ્યા 4 :** *ઉપવલય એટલે જેનાં સમતલમાંના કોઈ બે નિશ્ચિત બિંદુઓથી અંતરનો સરવાળો અચળ હોય એવાં બિંદુઓનો ગણ છે. આ બે નિશ્ચિત બિંદુઓને **ઉપવલયનાં નાભિઓ** કહે છે. (આકૃતિ 11.20.)*



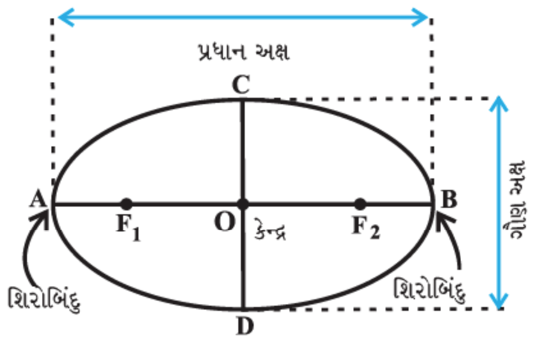

$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$

**આકૃતિ 11.20**

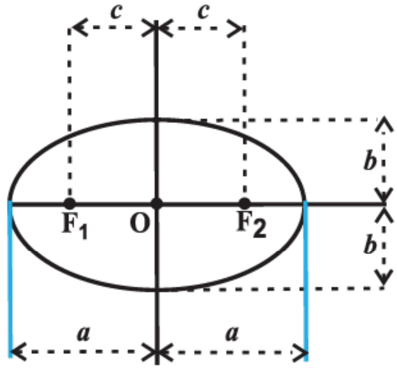
**નોંધ :** ઉપવલય પરના કોઈપણ બિંદુનો સમતલનાં બે નિશ્ચિત બિંદુઓથી અંતરનો સરવાળો અચળ હોય છે અને તે બે નિશ્ચિત બિંદુઓ વચ્ચેના અંતર કરતા વધુ હોય તે જરૂરી છે.

નાભિઓને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુને ઉપવલયનું ***કેન્દ્ર*** *(centre)* કહે છે. ઉપવલયનાં નાભિઓમાંથી પસાર થતા રેખાખંડને ઉપવલયનો ***પ્રધાન અક્ષ*** *(major axis)* અને કેન્દ્રમાંથી પસાર થતો અને પ્રધાન અક્ષને લંબરેખાખંડને ઉપવલયનો

**ગૌણ અક્ષ** *(minor axis)* કહે છે. પ્રધાન અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓને ઉપવલયનાં ***શિરોબિંદુઓ*** *(vertices)* કહે છે. (આકૃતિ 11.21)



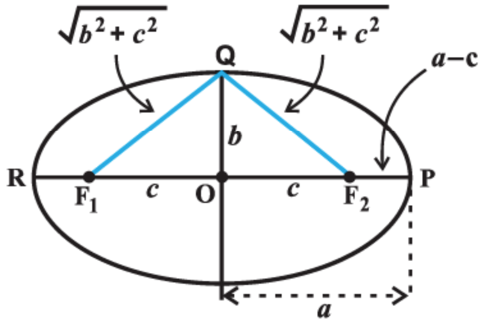

**આકૃતિ 11.21**




**આકૃતિ 11.22**

આપણે પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $2a$, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $2b$ અને બે નાભિઓ વચ્ચેના અંતરને $2c$ લઈશું. તેથી અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $a$ થશે અને અર્ધ ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $b$ થશે. (આકૃતિ 11.22)

**11.5.1** ઉપવલયના અર્ધ પ્રધાન અક્ષ, અર્ધ ગૌણ અક્ષ તથા કેન્દ્રથી નાભિ સુધીના અંતર વચ્ચેનો સંબંધ. (આકૃતિ 11.23.)




**આકૃતિ 11.23**

પ્રધાન અક્ષનું એક અંત્યબિંદુ P લો.

બિંદુ P ના નાભિઓથી અંતરનો સરવાળો

$$F_1P + F_2P = F_1O + OP + F_2P \qquad (F_1P = F_1O + OP)$$

$$= c + a + a - c = 2a$$

ગૌણ અક્ષનું એક અંત્યબિંદુ Q લો.

બિંદુ Q માટે નાભિઓથી અંતરનો સરવાળો

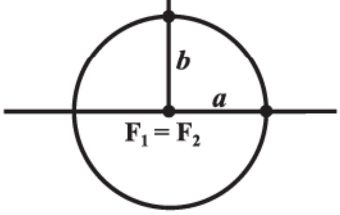
$$F_1Q + F_2Q = \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{b^2 + c^2}$$

બિંદુઓ P અને Q બંને ઉપવલય પર આવેલાં હોવાથી, ઉપવલયની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a, \text{ એટલે, } \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

અથવા $$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{એટલે, } \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

**11.5.2** : ઉપવલયના એક વિશિષ્ટ પ્રકાર અનુસાર ઉપર મેળવેલા સમીકરણ $c^2 = a^2 - b^2$માં જો આપણે $a$ ના મૂલ્યને અચળ રાખી અને $c$ નાં મૂલ્યને 0 થી $a$, સુધી બદલીએ તો ઉપવલયના આકાર બદલાશે.




**આકૃતિ 11.24**

**વિકલ્પ (i) :** જો $c = 0$, લઈએ તો, બંને નાભિઓ કેન્દ્રમાં મળી જાય અને $a^2 = b^2$, એટલે, $a = b$ અને ઉપવલય વર્તુળ બની જશે (આકૃતિ 11.24). આમ વર્તુળ એ ઉપવલયનો એક વિશિષ્ટ પ્રકાર છે. તેનું અનુચ્છેદ 11.3 માં વર્ણન કરેલ છે.

**આકૃતિ 11.25**

**વિકલ્પ (ii) :** જો $c = a$ તો $b = 0$ થાય અને ઉપવલય બે નાભિઓને જોડતો રેખાખંડ $F_1F_2$બની જશે. (આકૃતિ 11.25)

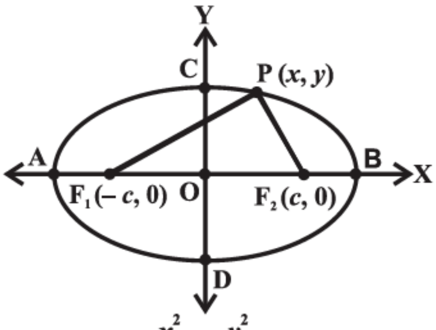
### 11.5.3 *ઉત્કેન્દ્રતા (Eccentricity)*

**વ્યાખ્યા 5** : *ઉપવલયના કેન્દ્રનું એક નાભિથી અંતર અને કેન્દ્રથી એક શિરોબિંદુના અંતરના ગુણોત્તરને ઉપવલયની **ઉત્કેન્દ્રતા** કહે છે. ઉત્કેન્દ્રતાને e દ્વારા દર્શાવાય છે. આમ,* $e = \frac{c}{a}$. $a^2 = b^2 + c^2$ હોવાથી $c < a$ તથા તેથી $0 < e < 1$

કેન્દ્રથી નાભિનું અંતર $c$ છે. તેથી ઉત્કેન્દ્રતાના સંદર્ભમાં કેન્દ્રથી નાભિનું અંતર $ae$ થશે.

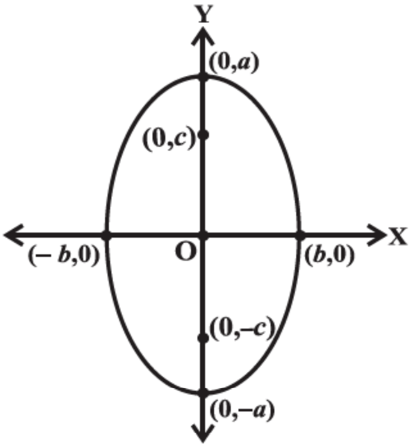
### 11.5.4 ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ

જો ઉપવલયનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને તેનાં નાભિઓ $x$-અક્ષ પર કે $y$-અક્ષ પર હોય ત્યારે ઉપવલયનું સમીકરણ સરળતમ સ્વરૂપમાં મળે છે. આવી બે શક્ય ગોઠવણી આકૃતિ 11.26 માં દર્શાવેલ છે.




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a)




$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(b)

**આકૃતિ 11.26**

હવે, આપણે આકૃતિ 11.26 (a) માં દર્શાવેલ જેનાં નાભિઓ $x$-અક્ષ પર હોય તેવા ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ મેળવીશું.

ધારો કે $F_1$ અને $F_2$ બે નાભિઓ છે અને રેખાખંડ $F_1F_2$ નું મધ્યબિંદુ O છે. ધારો કે O ઊગમબિંદુ અને O થી $F_2$ તરફ $x$-અક્ષની ધન દિશા અને Oથી $F_1$ તરફ $x$-અક્ષની ઋણ દિશા છે. ધારો કે O માંથી પસાર થતી અને $x$-અક્ષને લંબ રેખા $y$-અક્ષ છે. ધારો કે $F_1$ ના યામ $(-c, 0)$ અને તેથી $F_2\,(c, 0)$ મળે. (આકૃતિ 11.27).

ધારો કે $P(x, y)$ એ ઉપવલય પર આવેલું એવું બિંદુ છે. તેથી P નાં બંને નાભિઓથી અંતરનો સરવાળો $2a$ થાય.

આમ, $PF_1 + PF_2 = 2a$. ... (1)

અંતર સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

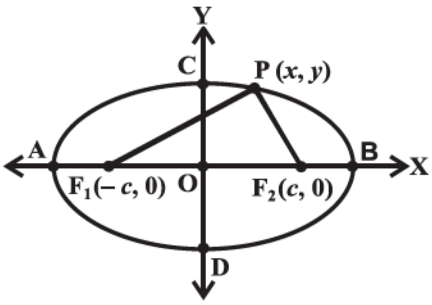
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

આથી, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

બંને બાજુએ વર્ગ કરતાં,

$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$ મળે.

સાદું રૂપ આપતાં, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$




**આકૃતિ 11.27**

બંને બાજુ વર્ગ કરી, સાદું રૂપ આપતાં,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{જ્યાં } c^2 = a^2 - b^2)$$

આમ, ઉપવલય પરનું કોઈપણ બિંદુ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ નું સમાધાન કરશે.} \qquad \text{... (2)}$$

આથી, ઊલટું $0 < c < a$ માટે P $(x, y)$ સમીકરણ (2) નું સમાધાન કરતું હોય, તો

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\therefore PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2)\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)} \qquad (b^2 = a^2 - c^2)$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = a + \frac{c}{a}x \qquad (|x| \le a \text{ તથા } 0 < c < a \text{ હોવાથી})$$

તે જ રીતે, $$PF_2 = a - \frac{c}{a}x \qquad (|x| \le a \text{ તથા } 0 < c < a \text{ હોવાથી})$$

તેથી $$PF_1 + PF_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a \qquad \text{... (3)}$$

આથી, જો ઉપવલયનું કોઈપણ બિંદુ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ને સંતોષે તો તે ભૌમિતિક ગુણધર્મને પણ સંતોષે છે અને તેથી P$(x, y)$ ઉપવલય પર છે.

આમ, આપણે (2) અને (3) પરથી સાબિત કર્યું કે જે ઉપવલયનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને પ્રધાન અક્ષ $x$-અક્ષ પર હોય તેવા ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે.

**ચર્ચા :** ઉપર મેળવેલ ઉપવલયના સમીકરણ પરથી એ તારણ મળે છે કે ઉપવલય પરના કોઈ પણ બિંદુ P $(x, y)$ માટે,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \le 1, \text{ એટલે, } x^2 \le a^2, \text{ તેથી } -a \le x \le a.$$

આથી ઉપવલય રેખાઓ $x = -a$ અને $x = a$ ની વચ્ચે આવેલ છે અને તે રેખાઓને સ્પર્શે પણ છે. તે જ રીતે ઉપવલય રેખાઓ $y = -b$ અને $y = b$ ની વચ્ચે છે અને તે રેખાઓને સ્પર્શે છે.

આ જ રીતે, આપણે આકૃતિ 11.26 (b) માં દર્શાવેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ પણ મેળવી શકીએ.

આ બે સમીકરણોને ઉપવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો કહે છે.

**નોંધ** ઉપવલયના પ્રમાણિત સમીકરણમાં ઉપવલયનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ અને પ્રધાન અક્ષ અને ગૌણ અક્ષ યામાક્ષો પર છે. અહીં, જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ સિવાયનું કોઈ બિંદુ હોય અને કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખાઓ પ્રધાન અક્ષ અને ગૌણ અક્ષ હોય અને ગૌણ અક્ષ પ્રધાન અક્ષને લંબ હોય એવા ઉપવલયનો અભ્યાસ તે આ પુસ્તકના વિષયવસ્તુની બહાર છે.

આકૃતિ 11.26 માં દર્શાવેલ ઉપવલયના પ્રમાણિત સમીકરણના અવલોકન પરથી આપણને નીચે દર્શાવેલ કેટલાંક તારણો મળશે:

1. ઉપવલય બંને અક્ષો પ્રત્યે સંમિત છે, કારણ કે જો કોઈ બિંદુ $(x, y)$ ઉપવલય પર હોય, તો બિંદુઓ $(-x, y)$, $(x, -y)$ અને $(-x, -y)$ પણ ઉપવલય પર છે.

2. ઉપવલયનાં નાભિઓ હંમેશાં પ્રધાન અક્ષ પર હોય છે. અક્ષ પરનાં અંતઃખંડો પરથી પ્રધાન અક્ષ નક્કી થઈ શકે છે. એટલે કે જો $x^2$ ના સહગુણકમાં છેદની સંખ્યા મોટી હોય, તો પ્રધાન અક્ષ $x$-અક્ષ પર છે અને જો $y^2$ ના સહગુણકમાં છેદની સંખ્યા મોટી હોય તો પ્રધાન અક્ષ $y$-અક્ષ પર છે.

## 11.5.5 નાભિલંબ

**વ્યાખ્યા 6** : *ઉપવલયના કોઈપણ નાભિમાંથી પસાર થતા જેનાં અંત્યબિંદુઓ ઉપવલય પર હોય તેવા પ્રધાન અક્ષને લંબ રેખાખંડને ઉપવલયનો **નાભિલંબ** કહે છે.* (આકૃતિ 11.28.)

ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ના નાભિલંબની લંબાઈ શોધીએ.

ધારો કે $AF_2$ ની લંબાઈ $l$ છે.

તો A ના યામ $(c, l)$, એટલે કે $(ae, l)$ થશે.

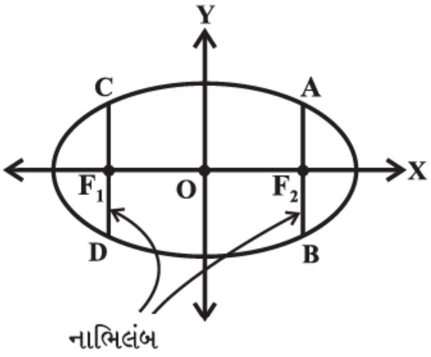
બિંદુ A ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ પર હોવાથી,

$$\frac{(ae)^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1 \text{ મળે.}$$

$$\therefore l^2 = b^2(1-e^2)$$

પરંતુ $$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore l^2=\frac{b^4}{a^2}, \text{ એટલે કે, } l=\frac{b^2}{a}$$



આકૃતિ 11.28

હવે, ઉપવલય $y$-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે. (ખરેખર તો તે બંને અક્ષો પ્રત્યે સંમિત છે.)

તેથી, $AF_2 = F_2B$ અને તેથી નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}$ થશે.

**ઉદાહરણ 9 :** ઉપવલય $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ માટે નાભિના યામ, શિરોબિંદુઓ, પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં, $\frac{x^2}{25}$ માં છેદ એ $\frac{y^2}{9}$ માં છેદ કરતાં મોટો હોવાથી પ્રધાન અક્ષ $x$-અક્ષ ઉપર છે. હવે, આપેલ સમીકરણને $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ સાથે સરખાવતાં, $a = 5$ અને $b = 3$ મળશે.

$$\text{વળી, } c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$$

તેથી, નાભિના યામ$(-4,0)$ અને $(4,0)$ થશે. શિરોબિંદુઓ$(-5, 0)$ અને $(5, 0)$ થશે. પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 10 એકમ અને ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $2b$ એટલે 6 એકમ થશે, ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{4}{5}$ થશે અને નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{5}$.

**ઉદાહરણ 10 :** ઉપવલય $9x^2 + 4y^2 = 36$ માટે નાભિના યામ, શિરોબિંદુઓ, પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ અને ઉત્કેન્દ્રતા શોધો.

**ઉકેલ :** આપેલ ઉપવલયના સમીકરણને પ્રમાણિત સમીકરણના રૂપમાં લખતાં,

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

અહીં, $\frac{y^2}{9}$ માં છેદ $\frac{x^2}{4}$ માં છેદ કરતાં મોટો હોવાથી પ્રધાન અક્ષ $y$-અક્ષ ઉપર છે. આપેલ સમીકરણને

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \text{ સાથે સરખાવતાં } b=2 \text{ અને } a=3.$$

વળી, $$c=\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

અને $$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

આથી, નાભિઓ $(0, \sqrt{5})$ અને $(0, -\sqrt{5})$ થશે, શિરોબિંદુઓ $(0, 3)$ અને $(0, -3)$ થશે, પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 6 એકમ, ગૌણ અક્ષની લંબાઈ 4 એકમ અને ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{\sqrt{5}}{3}$ થશે.

**ઉદાહરણ 11 :** જેનાં નાભિઓ $(\pm 5, 0)$ હોય અને શિરોબિંદુઓ $(\pm 13, 0)$ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં, શિરોબિંદુઓ $x$-અક્ષ પર હોવાથી ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ થશે. અહીં અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $a$ થશે. અહીં $a = 13, c = 5$ આપેલ છે.

તેથી, $c^2 = a^2 - b^2$ સંબંધ પરથી, $25 = 169 - b^2$ મળશે.

$$\therefore\ b = 12$$

આમ, માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

**ઉદાહરણ 12** : જેના પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 20 હોય અને નાભિઓ $(0, \pm 5)$ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ** : અહીં, નાભિઓ $y$-અક્ષ પર હોવાથી પ્રધાન અક્ષ $y$-અક્ષ ઉપર છે. આથી, ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ થશે.

$$a = \text{ અર્ધ પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ } = \frac{20}{2}=10$$

અને $c^2 = a^2 - b^2$ સંબંધ પરથી, $5^2 = 10^2 - b^2$ મળે.

$$\therefore\ b^2 = 75$$

આમ, માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1$

**ઉદાહરણ 13** : બિંદુઓ (4, 3) અને (– 1, 4) માંથી પસાર થતા હોય તથા જેનો પ્રધાન અક્ષ $x$-અક્ષ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ** : ઉપવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ છે. અહીં, બિંદુઓ (4, 3) અને (–1, 4) ઉપવલય પર આવેલા છે.

તેથી, $$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \qquad \text{... (1)}$$

અને $$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \qquad \text{....(2)}$$

સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલતાં, $a^2=\frac{247}{7}$ અને $b^2=\frac{247}{15}$ મળે.

તેથી માંગેલ ઉપવલયનું સમીકરણ,

$$\frac{x^2}{\frac{247}{7}}+\frac{y^2}{\frac{247}{15}}=1, \text{ એટલે } 7x^2+15y^2=247.$$

નોંધ : બિંદુઓના યામ પરથી પ્રધાન અક્ષ નક્કી થઇ જાય છે, તે આપવાની જરૂર નથી. જો પ્રધાન અક્ષ $y$-અક્ષ છે તેમ કહ્યું હોય તો $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ પરથી $b^2=\frac{247}{7}$ મળે, જે ખોટું પરિણામ છે.

## સ્વાધ્યાય 11.3

પ્રશ્ન 1 થી 9 માં આપેલ ઉપવલય માટે નાભિના યામ, શિરોબિંદુઓ તથા પ્રધાન અક્ષ તથા ગૌણ અક્ષની લંબાઈ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ શોધો:

**1.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

**2.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

**3.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

**4.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$

**5.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$

**6.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$

**7.** $36x^2+4y^2=144$

**8.** $16x^2+y^2=16$

**9.** $4x^2+9y^2=36$

નીચેના પ્રશ્ન 10 થી 20 માં આપેલ શરતોનું સમાધાન કરતા પ્રત્યેક ઉપવલયનું સમીકરણ શોધોઃ

**10.** શિરોબિંદુઓ $(\pm 5, 0)$, નાભિઓ $(\pm 4, 0)$

**11.** શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 13)$, નાભિઓ $(0, \pm 5)$

**12.** શિરોબિંદુઓ $(\pm 6, 0)$, નાભિઓ $(\pm 4, 0)$

**13.** પ્રધાન અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ $(\pm 3, 0)$, ગૌણ અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ $(0, \pm 2)$

**14.** પ્રધાન અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ $(0, \pm \sqrt{5})$, ગૌણ અક્ષનાં અંત્યબિંદુઓ $(\pm 1, 0)$

**15.** પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 26, નાભિઓ $(\pm 5, 0)$

**16.** ગૌણ અક્ષની લંબાઈ 16, નાભિઓ $(0, \pm 6)$.

**17.** નાભિઓ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

**18.** $b = 3$, $c = 4$, કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ તથા નાભિઓ $x$-અક્ષ પર હોય.

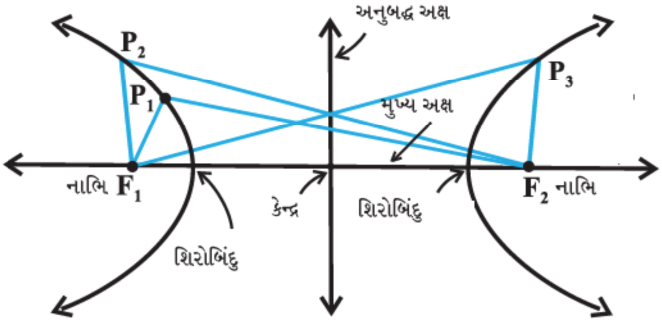
**19.** કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ, પ્રધાન અક્ષ $y$-અક્ષ પર હોય અને બિંદુઓ (3, 2) અને (1, 6) માંથી પસાર થાય.

**20.** પ્રધાન અક્ષ $x$-અક્ષ પર હોય અને બિંદુઓ (4, 3) અને (6, 2) માંથી પસાર થાય.

## 11.6 અતિવલય

**વ્યાખ્યા 7 :** *અતિવલય એટલે સમતલમાં જેનાં બે નિશ્ચિત બિંદુથી અંતરનો નિરપેક્ષ તફાવત અચળ હોય એવાં તમામ બિંદુઓનો ગણ.*

વ્યાખ્યામાં વપરાયેલ તફાવત પદનો અર્થ દૂરના બિંદુથી અંતર - નજીકના બિંદુથી અંતર. આ બે નિશ્ચિત બિંદુઓને ***અતિવલયનાં નાભિઓ*** કહે છે. નાભિઓને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુને ***અતિવલયનું કેન્દ્ર*** કહેવાય. નાભિઓમાંથી પસાર થતી રેખાને મુખ્ય અક્ષ અને કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી મુખ્ય અક્ષને લંબરેખાને ***અનુબદ્ધ અક્ષ*** કહેવાય. અતિવલય મુખ્ય અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદે તેને ***અતિવલયનાં શિરોબિંદુ*** કહેવાય. (જુઓ આકૃતિ 11.29)




$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$

**આકૃતિ 11.29**

આપણે બે નાભિઓ વચ્ચેના અંતરને $2c$ વડે, બે શિરોબિંદુઓને વચ્ચેનાં અંતરને (મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ) $2a$ વડે અને $b$ ને $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ વડે વ્યાખ્યાયિત કરીએ. વળી, $2b$ અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ છે.(આકૃતિ 11.30.)

**અચળ $P_1F_2 - P_1F_1$ શોધવા :**

આકૃતિ 11.30 માં બિંદુ P ને અનુક્રમે A અને B આગળ લેતાં,

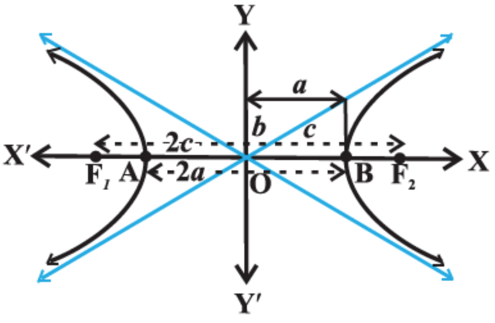
આપણને અતિવલયની વ્યાખ્યા પરથી,

$BF_1 - BF_2 = AF_2 - AF_1$ મળે. (અતિવલયની વ્યાખ્યા પરથી)

$BA + AF_1 - BF_2 = AB + BF_2 - AF_1$

અર્થાત્, $AF_1 = BF_2$

આથી, $BF_1 - BF_2 = BA + AF_1 - BF_2 = BA = 2a$



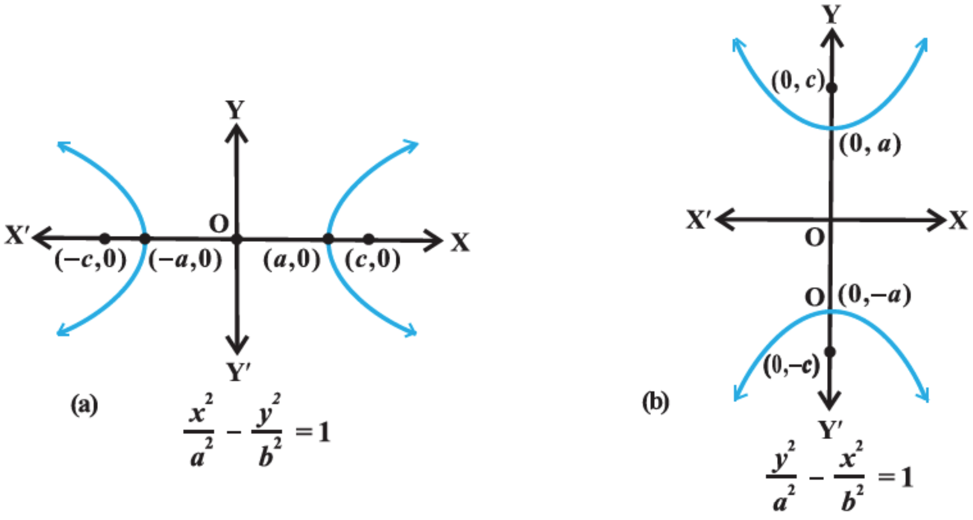

**આકૃતિ 11.30**

### 11.6.1 ઉત્કેન્દ્રતા

*વ્યાખ્યા 8 : ઉપવલયની જેમ જ ગુણોત્તર $e = \frac{c}{a}$ ને **અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા** કહે છે. $c \ge a$ હોવાથી, અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા 1 થી નાની ના થાય. ઉત્કેન્દ્રતાના સંદર્ભમાં, નાભિઓનું કેન્દ્રથી અંતર ae જેટલું હોય.*

### 11.6.2 અતિવલયનુ પ્રમાણિત સમીકરણ:

અતિવલયનું સૌથી સરળ સમીકરણ જ્યારે કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ અને નાભિઓ $x$-અક્ષ અથવા $y$-અક્ષ પર હોય ત્યારે મળે. બે શક્ય આકૃતિઓ આકૃતિ 11.31 માં દર્શાવેલ છે.

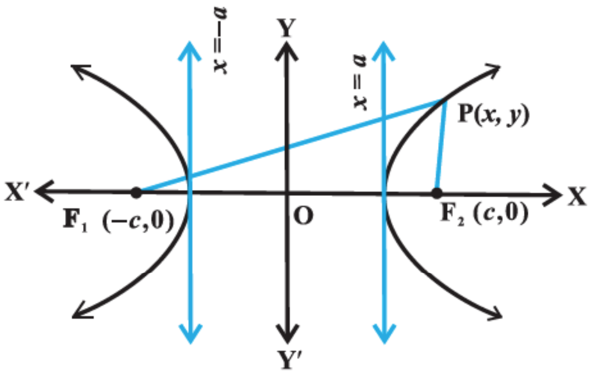



**આકૃતિ 11.31**

આપણે આકૃતિ 11.31(a) કે જેમાં નાભિઓ $x$-અક્ષ પર છે, તેવા અતિવલયનું સમીકરણ મેળવીશું.

ધારો કે નાભિઓ $F_1$ અને $F_2$ છે તથા $F_1F_2$ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ O છે તથા ઊગમબિંદુ O અને $F_2$ માંથી પસાર થતી રેખા $x$-અક્ષની ધનદિશા O અને $F_1$ માંથી પસાર થતી રેખા, $x$-અક્ષની ઋણ દિશા છે. O માંથી પસાર થતી $x$-અક્ષને લંબરેખા $y$-અક્ષ છે. ધારો કે $F_1$ ના યામ $(-c,0)$ અને $F_2$ ના યામ $(c,0)$ છે. (આકૃતિ 11.32.)

ધારો કે $P(x, y)$ અતિવલય પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે, કે જેથી P થી નાભિનાં દૂરના અને નજીકના અંતરનો તફાવત $2a$ જેટલો થાય. આથી, આપેલ છે કે $PF_1 - PF_2 = 2a$.




**આકૃતિ 11.32**

અંતર સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

અર્થાત્ $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

સાદુંરૂપ આપતાં, આપણને

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$ મળે.

ફરીથી વર્ગ કરી સાદું રૂપ આપતાં,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1 \text{ મળે.}$$

અર્થાત્ $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (c^2-a^2=b^2)$$

આથી, અતિવલય પરનું કોઈપણ બિંદુ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ નું સમાધાન કરે છે.

આથી, ઊલટું, ધારો કે $0<a<c$ માટે P$(x, y)$ ઉપરના સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

આથી, $$y^2 = b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)$$

$$\therefore \quad PF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)} = \left|a+\frac{c}{a}x\right| = a+\frac{c}{a}x \text{ કારણ કે } x>a,\ 0<a<c$$

આ જ રીતે, $PF_2 = \left|a-\frac{c}{a}x\right|$

અતિવલયમાં $c > a$; અને P એ $x = a$, રેખાની જમણી બાજુ પર હોવાથી $x > a$. આથી $\frac{c}{a}x > a$.

$\therefore a-\frac{c}{a}x$ ઋણ બને. આમ $PF_2 = \frac{c}{a}x - a$.

આથી, $$PF_1 - PF_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$$

વળી, નોંધો કે, જો P એ રેખા $x = -a$ ની ડાબી બાજુ પર હોય તો,

$$PF_1 = -\left(a+\frac{c}{a}x\right),\ PF_2 = a-\frac{c}{a}x.$$

આ વિકલ્પમાં $PF_2 - PF_1 = 2a$. આથી $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ નું સમાધાન કરતું કોઈપણ બિંદુ અતિવલય પર હોય.

આમ, આપણે સાબિત કર્યું કે જેનું કેન્દ્ર $(0, 0)$ અને જેનો મુખ્ય અક્ષ $x$-અક્ષ પર હોય તેવા અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ થાય.

**નોંધ:** જે અતિવલયમાં $a = b$ હોય, તે અતિવલયને ***લંબાતિવલય*** કહેવાય.

**ચર્ચા:** અતિવલયના મેળવેલ સમીકરણ પરથી કહી શકાય કે, અતિવલય પરના પ્રત્યેક બિંદુ $(x, y)$ માટે, $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2} \geq 1$.

$$\therefore \left|\frac{x}{a}\right| \geq 1,$$

$\therefore x \leq -a$ અથવા $x \geq a$.

આથી, વક્રનો કોઈ ભાગ રેખાઓ $x = +a$ અને $x = -a$ વચ્ચે નથી. (અર્થાત્ અનુબદ્ધ અક્ષ પર કોઈ વાસ્તવિક અંતઃખંડ નથી.)

આ જ રીતે, આપણે આકૃતિ 11.31 (b) પરથી $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ મેળવી શકીએ.

આ બંને સમીકરણો અતિવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો કહેવાય.

**નોંધ** અતિવલયોનાં પ્રમાણિત સમીકરણોમાં ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર અને મુખ્ય અક્ષ તથા અનુબદ્ધ અક્ષ, યામાક્ષો પર હોય છે. જો કે કોઈપણ બે પરસ્પર લંબરેખાઓ મુખ્ય અક્ષ અને અનુબદ્ધ અક્ષો હોય તેવા પણ અતિવલયો શક્ય છે. તેનો અભ્યાસ ઉચ્ચ ધોરણોમાં કરીશું.

અતિવલયનાં પ્રમાણિત સમીકરણો (આકૃતિ 11.29) પરથી, આપણને નીચેનાં અવલોકનો મળે છે:

1. અતિવલય એ યામાક્ષો પ્રત્યે સંમિત છે, કારણ કે જો બિંદુ $(x, y)$ અતિવલય પર હોય તો, બિંદુઓ $(-x, y)$, $(x, -y)$ અને $(-x, -y)$ પણ અતિવલય પર હોય છે.
2. નાભિઓ હંમેશાં મુખ્ય અક્ષ પર હોય. છેદનાં ધન પદોથી મુખ્ય અક્ષ વિશે જાણી શકાય છે.
   ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ માં મુખ્ય અક્ષ $x$-અક્ષ પર હોય અને તેની લંબાઈ 6 છે, જ્યારે $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ માં મુખ્ય અક્ષ $y$-અક્ષ પર હોય અને તેની લંબાઈ 10 છે. $x^2$નો સહગુણક ધન હોય કે $y^2$નો સહગુણક ધન હોય તે અનુસાર $x$-અક્ષ મુખ્ય અક્ષ અથવા $y$-અક્ષ મુખ્ય અક્ષ છે.

### 11.6.3 નાભિલંબ

**વ્યાખ્યા 9 :** *નાભિમાંથી પસાર થતો મુખ્ય અક્ષને લંબ અને જેનાં અંત્યબિંદુઓ અતિવલય પર હોય તેવો રેખાખંડ નાભિલંબ છે, ઉપવલયની જેમ એ બતાવવું સરળ છે કે નાભિલંબની લંબાઈ* $\frac{2b^2}{a}$ *છે.*

**ઉદાહરણ 14 :** નીચેનાં અતિવલયો માટે નાભિઓ, શિરોબિંદુઓ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો.

(i) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (ii) $y^2-16x^2=16$

**ઉકેલ :** (i) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ને પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ સાથે સરખાવતાં,

$a=3$, $b=4$ અને $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5$

આથી, નાભિઓના યામ $(\pm 5, 0)$ અને શિરોબિંદુઓ $(\pm 3, 0)$ છે.

વળી, ઉત્કેન્દ્રતા $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$. નાભિલંબની લંબાઈ $=\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{3}$

(ii) સમીકરણને 16 વડે ભાગતાં, આપણને $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{1}=1$ મળે.

તેને પ્રમાણિત સમીકરણ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ સાથે સરખાવતાં,

આપણને, $a=4$, $b=1$ અને $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$.

આથી, નાભિઓના યામ $(0, \pm\sqrt{17})$ અને શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 4)$ છે.

વળી, ઉત્કેન્દ્રતા $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{17}}{4}$. નાભિલંબની લંબાઈ $=\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}$.

**ઉદાહરણ 15 :** જેનાં નાભિઓ $(0, \pm 3)$ અને શિરોબિંદુઓ $(0, \pm \frac{\sqrt{11}}{2})$ હોય તેવા અતિવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** નાભિઓ $y$-અક્ષ પર હોવાથી, અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ થાય.

શિરોબિંદુઓ $\left(0, \pm \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ હોવાથી, $a = \frac{\sqrt{11}}{2}$

વળી, નાભિઓ $(0, \pm 3)$ હોવાથી $c = 3$ અને $b^2 = c^2 - a^2 = \frac{25}{4}$.

આથી, અતિવલયનું સમીકરણ

$$\frac{y^2}{\left(\frac{11}{4}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)} = 1, \text{ અર્થાત્, } 100\,y^2 - 44\,x^2 = 275.$$

**ઉદાહરણ 16 :** જેનાં નાભિઓ $(0, \pm 12)$ અને નાભિલંબની લંબાઈ 36 હોય તેવા અતિવલયનું સમીકરણ મેળવો.

**ઉકેલ :** નાભિઓ $(0, \pm 12)$ હોવાથી $c = 12$ મળે.

નાભિલંબની લંબાઈ $= \frac{2b^2}{a} = 36$ પરથી $b^2 = 18a$

આથી,

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ પરથી,}$$

$$144 = a^2 + 18a$$

$$\therefore a^2 + 18a - 144 = 0,$$

$$\therefore a = -24, 6.$$

પરંતુ $a$ ઋણ ના હોઈ શકે. આથી આપણે $a = 6$ લઈશું અને આથી $b^2 = 108$.

આથી, અતિવલયનું જરૂરી સમીકરણ $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$, અર્થાત્, $3y^2 - x^2 = 108$

## સ્વાધ્યાય 11.4

પ્રશ્ન 1 થી 6 માં આપેલ અતિવલયો માટે નાભિઓ અને શિરોબિંદુઓના યામ, ઉત્કેન્દ્રતા અને નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો:

**1.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **2.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ **3.** $9y^2 - 4x^2 = 36$

**4.** $16x^2 - 9y^2 = 576$ **5.** $5y^2 - 9x^2 = 36$ **6.** $49y^2 - 16x^2 = 784$

પ્રશ્ન 7 થી 15 માં આપેલ શરતોનું પાલન કરતાં અતિવલયોનાં સમીકરણ મેળવો:

**7.** શિરોબિંદુઓ $(\pm 2, 0)$, નાભિઓ $(\pm 3, 0)$

**8.** શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 5)$, નાભિઓ $(0, \pm 8)$

**9.** શિરોબિંદુઓ $(0, \pm 3)$, નાભિઓ $(0, \pm 5)$

**10.** નાભિઓ $(\pm 5, 0)$, મુખ્ય અક્ષની લંબાઈ 8

**11.** નાભિઓ $(0, \pm 13)$, અનુબદ્ધ અક્ષની લંબાઈ 24

**12.** નાભિઓ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, નાભિલંબની લંબાઈ 8

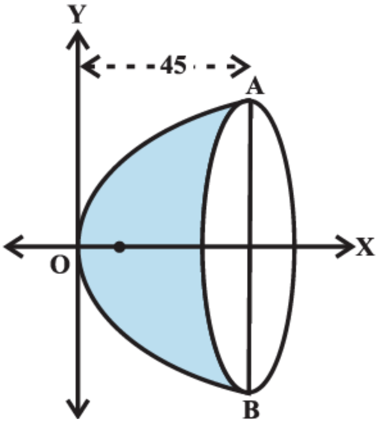
**13.** નાભિઓ $(\pm 4, 0)$, નાભિલંબની લંબાઈ 12

**14.** શિરોબિંદુઓ $(\pm 7,0)$, $e = \frac{4}{3}$

**15.** નાભિઓ $(0, \pm\sqrt{10})$, (2,3) માંથી પસાર થતાં

## પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

**ઉદાહરણ 17 :** આકૃતિ 11.33 માં દર્શાવ્યા મુજબ પરવલયાકાર પરાવર્તકની નાભિ શિરોબિંદુથી 5 સેમી દૂર છે. જો તેની ઊંડાઇ 45 સેમી હોય તો અંતર AB શોધો. (આકૃતિ 11.33.)



આકૃતિ 11.33

**ઉકેલ :** શિરોબિંદુથી નાભિનું અંતર 5 સેમી હોવાથી, $a = 5$. જો ઊગમબિંદુ શિરોબિંદુ લઈએ અને પરાવર્તકને $x$-અક્ષની ધન દિશા પર લઈએ તો પરવલયાકાર ભાગનું સમીકરણ

$$y^2 = 4\,(5)\,x = 20\,x \text{ થાય.}$$

નોંધો કે $x = 45$

આથી, $y^2 = 900$

$\therefore\ y = \pm 30$

આથી, $AB = 2y = 2 \times 30 = 60$ સેમી

**ઉદાહરણ 18 :** પુલના અંત્ય ભાગે આવેલ આધારસ્તંભો વચ્ચેનું અંતર 12 મીટર છે. પુલના મધ્ય ભાગમાં વજન કેન્દ્રિત થવાથી, 3 સેમી જેટલા નીચે તરફ વળી ગયેલ પુલનો આકાર પરવલયનો છે, તો પુલ કેન્દ્રથી કેટલા અંતરે 1 સેમી જેટલો વળેલ હશે?

**ઉકેલ :** ધારો કે શિરોબિંદુ એ સૌથી નીચેનું બિંદુ અને અક્ષ શિરોલંબ રેખા છે. ધારો કે યામાક્ષો આકૃતિ 11.34 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેના છે.

પરવલયનું સમીકરણ $x^2 = 4ay$ પ્રકારનું હશે. તે $\left(6, \frac{3}{100}\right)$, માંથી પસાર થાય છે.

આથી, $(6)^2 = 4a\left(\frac{3}{100}\right)$,

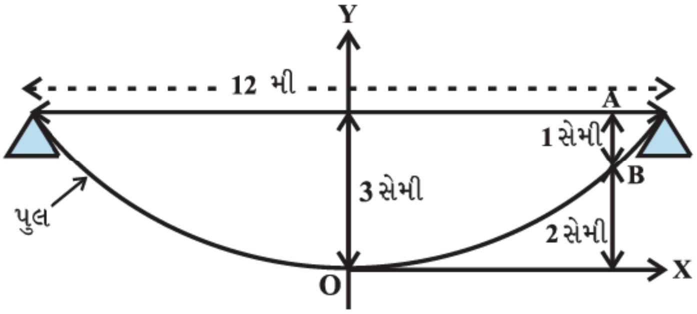
અર્થાત્, $a = \frac{36 \times 100}{12} = 300$ મી

ધારો કે પુલનો વળેલ ભાગ AB એ $\frac{1}{100}$ મી નો છે.

B ના યામ $\left(x, \frac{2}{100}\right)$ છે.

$\therefore\ x^2 = 4 \times 300 \times \frac{2}{100} = 24$

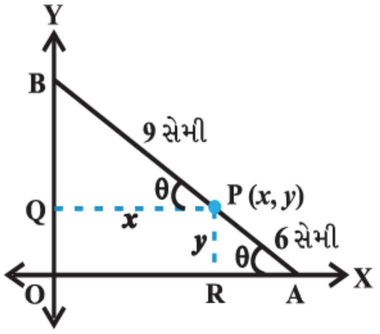
અર્થાત્ $x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ મી



આકૃતિ 11.34

**ઉદાહરણ 19 :** 15 સેમી લંબાઈનો સળિયો AB યામાક્ષો પર એ રીતે મૂકેલ છે કે અંત્યબિંદુ A $x$-અક્ષ પર અને B $y$-અક્ષ પર રહે. સળિયા પર $P(x, y)$ બિંદુ એ રીતે લીધેલ છે કે AP = 6 સેમી હોય. સાબિત કરો કે P નો બિંદુગણ ઉપવલય છે.

**ઉકેલ :** ધારો કે આકૃતિ 11.35માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સળિયો AB, OX સાથે $\theta$ ખૂણો બનાવે છે અને બિંદુ P $(x, y)$ તેના પર એવું છે કે જેથી AP = 6 સેમી થાય.




આકૃતિ 11.35

AB = 15 સેમી હોવાથી, PB = 9 સેમી. Pમાંથી લંબ PQ અને PR અનુક્રમે $y$-અક્ષ અને $x$-અક્ષ પર દોરો.

$$\Delta \text{ PBQ પરથી, } \cos\theta = \frac{x}{9}$$

અને $$\Delta \text{ PRA પરથી, } \sin\theta = \frac{y}{6}$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ હોવાથી,

$$\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$

આથી, P નો બિંદુગણ ઉપવલય છે.

## પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 11

1. એક પરવલયાકાર પરાવર્તકનો વ્યાસ 20 સેમીનો છે અને ઊંડાઈ 5 સેમી છે. તેના નાભિના યામ શોધો.

2. એક કમાન પરવલયાકાર છે. તેનો અક્ષ શિરોલંબ છે. કમાન 10 મી ઊંચી અને પાયામાં 5 મી પહોળી છે. તે પરવલયના શિરોબિંદુથી 2 મી દૂર કેટલી પહોળી હશે?

3. તાર પર લટકતો એક સમાન ભારવાળો ઝૂલતો પુલ પરવલયાકારનો છે. શિરોલંબ તારથી પુલને ટકાવેલ સમક્ષિતિજ રસ્તો 100 મી લાંબો છે. સૌથી મોટો તાર 30 મી અને સૌથી નાનો તાર 6 મી નો છે. પુલના કેન્દ્રથી 18 મી દૂર આપેલ આધાર આપતા તારની લંબાઈ શોધો.

4. એક કમાન અર્ધઉપવલયાકારની છે તે 8મી પહોળી અને કેન્દ્ર આગળ 2 મી ઊંચી છે, તો તેના એક છેડેથી 1.5 મી અંતરે આવેલા બિંદુ આગળ કમાનની ઊંચાઈ શોધો.

5. 12 સેમી લંબાઈનો સળિયો એવી રીતે ખસે છે કે જેથી તેનાં અંત્યબિંદુઓ યામાક્ષો પર રહે. $x$-અક્ષ પરના અંત્યબિંદુથી 3 સેમી દૂર આવેલ સળિયા પરના બિંદુ P નો બિંદુગણ શોધો.

6. પરવલય $x^2 = 12y$ ના શિરોબિંદુ અને નાભિલંબના અંત્યબિંદુથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7. એક માણસ રમતના મેદાનમાં અંકિત કેડી પર એવી રીતે દોડે છે કે જેથી બે ધજાના દંડાના અંતરનો સરવાળો અચળ 10 મી રહે છે. જો બંને ધજાના દંડા વચ્ચેનું અંતર 8 મી હોય, તો માણસના ગતિમાર્ગનું સમીકરણ શોધો.

8. એક સમબાજુ ત્રિકોણ પરવલય $y^2 = 4ax$ માં અંતર્ગત છે, તેનું એક શિરોબિંદુ પરવલયનું શીર્ષ છે. તો ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ શોધો.

## સારાંશ

આ પ્રકરણમાં નીચેની સંકલ્પનાઓ અને તેનાં વ્યાપક સ્વરૂપોનો અભ્યાસ કર્યો:

- સમતલમાં નિશ્ચિત બિંદુથી અચળ અંતરે આવેલાં બિંદુઓનો ગણ એટલે વર્તુળ.
- $(h, k)$ કેન્દ્ર અને $r$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ છે.}$$
- સમતલમાં નિશ્ચિત બિંદુ અને નિશ્ચિત રેખાથી સમાન અંતરે આપેલ બિંદુઓનો ગણ એટલે પરવલય.
- જેની નાભિ $(a, 0)$ $(a > 0)$ અને નિયામિકા $x = -a$ હોય તેવા પરવલયનું સમીકરણ $y^2 = 4ax$ છે.
- નાભિમાંથી પસાર થતાં અને જેનાં અંત્યબિંદુઓ પરવલય પર હોય તેવા અક્ષને લંબ રેખાખંડને નાભિલંબ કહેવાય.
- $y^2 = 4ax$ પરવલયના નાભિલંબની લંબાઈ $4a$ છે
- સમતલમાં બે નિશ્ચિત બિંદુથી જેમનાં અંતરનો સરવાળો અચળ હોય તેવા બિંદુના ગણને ઉપવલય કહેવાય.
- જે ઉપવલયનાં નાભિઓ $x$-અક્ષ પર હોય તેનું સમીકરણ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- પ્રધાન અક્ષને લંબ હોય તેવા ઉપવલયના નાભિમાંથી પસાર થતા અને જેનાં અંત્યબિંદુઓ ઉપવલય પર હોય તેવા રેખાખંડને નાભિલંબ કહેવાય.
- ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ના નાભિલંબની લંબાઈ $\frac{2b^2}{a}$ છે, જ્યાં $a > b$.
- ઉપવલયમાં તેના કેન્દ્રથી કોઈ પણ એક નાભિ અને ઉપવલયના એક શિરોબિંદુ વચ્ચેના અંતરના ગુણોત્તરને ઉત્કેન્દ્રતા કહેવાય.
- સમતલમાં બે નિશ્ચિત બિંદુથી જેમના અંતરનો નિરપેક્ષ તફાવત અચળ હોય તેવા બિંદુગણને અતિવલય કહેવાય.
- જે અતિવલયનાં નાભિઓ $x$-અક્ષ પર હોય તેનું સમીકરણ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે.
- અતિવલયના નાભિમાંથી પસાર થતા અને જેનાં અંત્યબિંદુઓ અતિવલય પર મુખ્ય અક્ષને લંબ રેખાખંડ ઉપર હોય તેવા રેખાખંડને નાભિલંબ કહેવાય.
- અતિવલય : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ના નાભિલંબની લંબાઈ : $\frac{2b^2}{a}$ છે.
- અતિવલયમાં તેના કેન્દ્રથી કોઈ એક નાભિ અને અતિવલયના એક શિરોબિંદુ વચ્ચેના અંતરના ગુણોત્તરને ઉત્કેન્દ્રતા કહેવાય.

## Historical Note

Geometry is one of the most ancient branches of mathematics. The Greek geometers investigated the properties of many curves that have theoretical and practical importance. Euclid wrote his treatise on geometry around 300 B.C. He was the first who organised the geometric figures based on certain axioms suggested by physical considerations. Geometry as initially studied by the ancient Indians and Greeks, who made essentially no use of the process of algebra. The synthetic approach to the subject of geometry as given by Euclid and in *Sulbasutras*, etc., was continued for some 1300 years. In the 200 B.C., Apollonius wrote a book called '*The Conic*' which was all about conic sections with many important discoveries that

have remained unsurpassed for eighteen centuries.

Modern analytic geometry is called '*Cartesian*' after the name of Rene Descartes (1596-1650) whose relevant 'La Geometrie' was published in 1637. But the fundamental principle and method of analytical geometry were already discovered by Pierre de Fermat (1601-1665). Unfortunately, Fermat's treatise on the subject, entitled *Ad Locus Planos et So LIDOS Isagoge* (Introduction to Plane and Solid Loci) was published only posthumously in 1679. So, Descartes came to be regarded as the unique inventor of the analytical geometry.

Isaac Barrow avoided using cartesian method. Newton used method of undetermined coefficients to find equations of curves. He used several types of coordinates including polar and bipolar. Leibnitz used the terms '*abscissa*', '*ordinate*' and '*coordinate*'. L' Hospital (about 1700) wrote an important textbook on analytical geometry.

Clairaut (1729) was the first to give the distance formula although in clumsy form. He also gave the intercept form of the linear equation. Cramer (1750) made formal use of the two axes and gave the equation of a circle as

$$(y - a)^2 + (b - x)^2 = r$$

He gave the best exposition of the analytical geometry of his time. Monge (1781) gave the modern 'point-slope' form of equation of a line as

$$y - y' = a(x - x')$$

and the condition of perpendicularity of two lines as $aa' + 1 = 0$.

S.F. Lacroix (1765–1843) was a prolific textbook writer, but his contributions to analytical geometry are found scattered. He gave the 'two-point' form of equation of a line as

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

and the length of the perpendicular from $(\alpha, \beta)$ on $y = ax + b$ as $\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}}$. His formula for finding angle between two lines was $\tan\theta = \left(\frac{a' - a}{1 + aa'}\right)$. It is, of course, surprising that one had to wait for more than 150 years after the invention of analytical geometry before finding such essential basic formula. In 1818, C. Lame, a civil engineer, gave $mE + m'E' = 0$ as the curve passing through the points of intersection of two loci $E = 0$ and $E' = 0$.

Many important discoveries, both in Mathematics and Science, have been linked to the conic sections. The Greeks particularly Archimedes (287–212 B.C.) and Apollonius (200 B.C.) studied conic sections for their own beauty. These curves are important tools for present day exploration of outer space and also for research into behaviour of atomic particles.