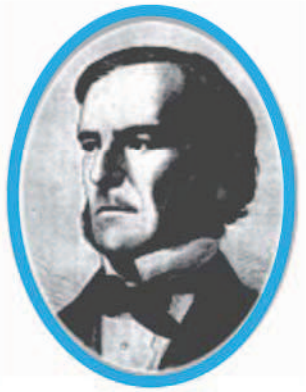
પ્રકરણ 14

ગાણિતિક તર્ક

❖ *There are few things which we know which are not capable of mathematical reasoning and when these can not, it is a sign that our knowledge of them is very small and confused and where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of another, as to grope for a thing in the dark when you have a candle stick standing by you.* – *ARTHENBOT* ❖

14.1 પ્રાસ્તાવિક

આ પ્રકરણમાં આપણે ગાણિતિક તર્કના કેટલાક મૂળભૂત વિચારો વિશે ચર્ચા કરીશું. આપણે બધાં જાણીએ છીએ કે, ઘણાં વર્ષોથી મનુષ્યો નીચલી પ્રજાતિમાંથી વિકાસ પામ્યા છે. તેઓ અન્ય પ્રજાતિઓ કરતાં શ્રેષ્ઠ છે, કારણ કે મનુષ્યની તર્ક કરવાની ક્ષમતા એ તેની મુખ્ય સંપત્તિ છે. આ ક્ષમતાનો કેટલી સારી રીતે ઉપયોગ કરી શકાય તે દરેક વ્યક્તિની તર્ક કરવાની શક્તિ પર આધાર રાખે છે. આ શક્તિનો કેવી રીતે વિકાસ કરવો ? અહીં આપણે ખાસ કરીને ગણિતના સંદર્ભમાં તર્કની પ્રક્રિયા અંગે ચર્ચા કરીશું.



George Boole
(1815 - 1864)

ગણિતમાં મુખ્યત્વે બે પ્રકારની દલીલો છે : અનુમાનિત દલીલો અને તર્કસંગત તારણ મેળવવાની દલીલો. આપણે ગાણિતિક અનુમાનના સંદર્ભમાં અનુમાનિત દલીલોની ચર્ચા કરી લીધી છે. આ પ્રકરણમાં આપણે તર્કસંગત તારણોના કેટલાક મૂળભૂત વિચારોની ચર્ચા કરીશું.

14.2 વિધાન

ગાણિતિક વિધાન એ ગાણિતિક તર્કનો મૂળભૂત એકમ છે.

ચાલો આપણે બે વાક્યોથી શરૂઆત કરીએ.

2003માં ભારતના રાષ્ટ્રપતિ એક સ્ત્રી હતાં.

હાથીનું વજન મનુષ્યના વજન કરતાં વધુ હોય છે.

જ્યારે આપણે આ વાક્યો વાંચીએ છીએ ત્યારે આપણે તરત જ નક્કી કરી શકીએ છીએ કે પ્રથમ વાક્ય અસત્ય છે, જ્યારે બીજું વાક્ય સત્ય છે. આ અંગે કોઈ મૂંઝવણ નથી. ગણિતમાં આવાં વાક્યોને ***વિધાન*** *(Statement)* કહે છે.

હવે નીચેના વાક્યનો વિચાર કરો :

સ્ત્રીઓ પુરુષો કરતાં વધુ બુદ્ધિશાળી છે.

કેટલાક લોકો આ સત્ય છે તેમ માને છે તથા કેટલાક લોકો આ સાથે અસંમત થઈ શકે છે. આ વાક્ય અંગે આપણે કહી શકીએ નહિ કે તે હંમેશાં સત્ય છે કે અસત્ય છે. આનો અર્થ કે આ વાક્ય સંદિગ્ધ છે. ગણિતમાં આવાં વાક્યોનો વિધાન તરીકે સ્વીકાર થતો નથી.

જો આપેલ વાક્ય સત્ય કે અસત્ય હોય પરંતુ બંને ન હોય, તો તેને ગાણિતિક રીતે ***સ્વીકાર્ય વિધાન*** *કહે છે.* જ્યારે આપણે અહીં 'વિધાન'નો ઉલ્લેખ કરીએ ત્યારે તે ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાન હોવું જોઈએ.

ગણિતનો અભ્યાસ કરતી વખતે આપણને આવાં ઘણાં વાક્યો જોવા મળે છે. જેમકે,

બે વત્તા બે બરાબર ચાર.

બે ધન સંખ્યાઓનો સરવાળો ધન મળે.

બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે.

આ વાક્યોમાં પ્રથમ બે સત્ય છે અને ત્રીજું વાક્ય અસત્ય છે.

આ વાક્યો વિષે કોઈ સંદિગ્ધતા નથી. આથી તેઓ વિધાન છે. શું તમે કોઈ એવા વાક્યનું ઉદાહરણ આપી શકો કે જે અસ્પષ્ટ અથવા સંદિગ્ધ હોય ? આ વાક્યનો વિચાર કરો :

x અને y નો સરવાળો શૂન્ય કરતાં વધુ છે.

અહીં જ્યાં સુધી આપણે x અને y ની કિંમતો જાણતા ન હોઈએ ત્યાં સુધી આપણે આ વાક્ય સત્ય છે કે અસત્ય છે તે નક્કી કરવાની સ્થિતિમાં નથી. ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે $x = 1, y = -3$ હોય ત્યારે તે અસત્ય છે અને જો $x = 1$ અને $y = 0$ હોય ત્યારે તે સત્ય છે. આથી આ વાક્ય વિધાન નથી. પરંતુ વાક્ય,

"કોઈ પણ બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ x અને y માટે, x અને y નો સરવાળો 0 થી વધુ છે" એ વિધાન છે.

હવે નીચેનાં વાક્યોનો વિચાર કરો :

કેટલું સુંદર !

દરવાજો ખોલો.

તમે ક્યાં જઈ રહ્યા છો ?

આ વાક્યો વિધાન છે ? ના, કારણ કે પ્રથમ વાક્ય ઉદ્ગાર છે, બીજું આજ્ઞાર્થ છે અને ત્રીજું પ્રશ્નાર્થ છે. ગાણિતીય રીતે આ બધામાંથી કોઈને પણ વિધાન છે તેમ કહી શકાય નહિ. જો વાક્યમાં 'સમય' ચલ સ્વરૂપે હોય જેમકે, 'આજે', 'આવતી કાલે', 'ગઈ કાલે' તો તે વિધાન નથી. કારણ કે કયા સમયની વાત કરવામાં આવે છે તે આપણે જાણતા નથી. ઉદાહરણ તરીકે વાક્ય

'આવતીકાલે શુક્રવાર છે.'

એ વિધાન નથી. આ વાક્ય ગુરુવારે સત્ય છે પરંતુ બીજા કોઈ દિવસે સત્ય નથી.

આ પ્રકારની સમાન દલીલો એવાં પ્રકારનાં વાક્યો માટે પણ સાચી હોય છે કે જેમાં કોઈ ચોક્કસ વ્યક્તિની ઓળખ આપ્યા વગર સર્વનામ સ્વરૂપે હોય અને તે જ રીતે વાક્યમાં સ્થળો ચલ સ્વરૂપે હોય જેમ કે 'અહીં', 'ત્યાં' વગેરે. ઉદાહરણ તરીકે વાક્યો

તે ગણિતની સ્નાતક છે.

કાશ્મીર અહીંથી દૂર છે.

એ વિધાન નથી.

વધુ એક વાક્ય *એક મહિનામાં 40 દિવસો હોય છે.*

આને તમે વિધાન કહેશો ? આપણે નોંધીએ કે વાક્યમાં જે સમય દર્શાવ્યો છે તે ચલ સ્વરૂપે છે કારણ કે તે 12 મહિનાઓમાંથી ગમે તે મહિનો હોઈ શકે. પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે, આ વાક્ય હંમેશાં અસત્ય છે.(ગમે તે મહિનો હોય તો પણ) કારણ કે કોઈ પણ મહિનામાં દિવસોની મહત્તમ સંખ્યા 31 થી વધુ ન હોય. માટે આ વાક્ય વિધાન છે. જો વાક્ય સત્ય કે અસત્ય હોય પરંતુ બંને ન હોય તો તે વાક્ય વિધાન બને છે.

સામાન્ય રીતે વિધાનોને $p, q, r, ...$ વગેરે નાના મૂળાક્ષરોથી દર્શાવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે આપણે આપેલ વિધાનને નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકીએ.

વિધાન *'આગ હંમેશાં ગરમ હોય છે'* ને p વડે દર્શાવીએ.

p : આગ હંમેશાં ગરમ હોય છે.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વાક્યો વિધાન છે કે નહિ તે કારણ સહિત દર્શાવો:

(i) 8 એ 6 કરતાં નાનો છે.
(ii) દરેક ગણ એ સાન્ત ગણ છે.
(iii) સૂર્ય એક તારો છે.
(iv) ગણિત એક રમત છે.
(v) વાદળો વગર વરસાદ નથી.
(vi) ચેન્નઈ અહીંથી કેટલું દૂર છે ?

ઉકેલ : (i) આ વાક્ય અસત્ય છે કારણ કે 8 એ 6 કરતાં મોટો છે. તેથી આ વિધાન છે.

(ii) આ વાક્ય પણ અસત્ય છે, કારણ કે સાન્ત ન હોય તેવા ગણનું અસ્તિત્વ છે. તેથી આ વિધાન છે.

(iii) વૈજ્ઞાનિક રીતે સ્થાપિત થયેલ છે કે સૂર્ય એક તારો છે. આથી આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય છે. તેથી આ વિધાન છે.

(iv) આ વાક્ય વ્યક્તિલક્ષી છે કારણ કે જેમને ગણિત ગમતું હોય તેમના માટે રમત હોઈ શકે, પરંતુ બીજા માટે એવું ન હોઈ શકે. આનો અર્થ એ કે આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય નથી. તેથી આ વિધાન નથી.

(v) વરસાદ પહેલાં વાદળ બંધાય છે તે એક વૈજ્ઞાનિક રીતે સ્થાપિત કુદરતી ઘટના છે. આથી આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય છે. તેથી આ વિધાન છે.

(vi) આ પ્રશ્નાર્થ વાક્ય છે. વળી, આ વાક્યમાં 'અહીં' (ચલસ્વરૂપે) નો ઉપયોગ થયેલ છે. તેથી આ વિધાન નથી.

ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી જોઈ શકાય છે કે જ્યારે આપણે કોઈ વાક્યને વિધાન છે તેવું કહીએ ત્યારે આપણે હંમેશાં કહેવું જોઇએ તે શા માટે વિધાન છે ? પ્રશ્નના જવાબ કરતાં “તે શા માટે વિધાન છે ?” એ વધારે મહત્ત્વપૂર્ણ છે.

સ્વાધ્યાય 14.1

1. નીચેનામાંથી કયાં વાક્યો વિધાન છે ? તમારા જવાબ માટેના કારણ દર્શાવો.

(i) એક મહિનામાં 35 દિવસો હોય છે.

(ii) ગણિત અઘરું છે.

(iii) 5 અને 7 નો સરવાળો 10 કરતાં વધુ છે.

(iv) કોઈ પણ સંખ્યાનો વર્ગ એ યુગ્મ સંખ્યા હોય છે.

(v) કોઈ પણ ચતુષ્કોણની બાજુઓ સમાન લંબાઈ ધરાવે છે.

(vi) આ પ્રશ્નનો ઉત્તર આપો.

(vii) (–1) અને 8 નો ગુણાકાર 8 થાય છે.

(viii) ત્રિકોણના બધા અંતઃકોણનો સરવાળો 180° થાય છે.

(ix) આજે તોફાની દિવસ છે.

(x) બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંકર સંખ્યાઓ છે.

2. વિધાન ન હોય તેવાં ત્રણ વાક્યોનાં ઉદાહરણો આપો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો.

14.3 જૂનાં વિધાનોમાંથી નવાં વિધાનો

આપણી પાસે પહેલેથી જ હોય તેવાં વિધાનોમાંથી નવાં વિધાનોની રચના કરવાની રીત હવે આપણે જોઈશું. અંગ્રેજ ગણિતશાસ્ત્ર ***George Boole*** એ 1854 માં તેના પુસ્તક *"The laws of Thought"* માં આ રીતોની ચર્ચા કરી હતી. અહીં આપણે બે રીતોની ચર્ચા કરીશું.

વિધાનોના અભ્યાસના પ્રથમ પગલા તરીકે આપણે એક મહત્ત્વની યુક્તિનો વિચાર કરીશું. ગાણિતિક વિધાનોના ઊંડાણપૂર્વકની સમજણ માટે આપણે તેનો ઉપયોગ કરીશું. આ યુક્તિ માત્ર આપેલ વિધાન સત્ય છે તે કહેવા માટે જ નહીં પરંતુ આપેલ વિધાન અસત્ય છે તે કહેવાનો અર્થ જાણવા પણ ઉપયોગી છે.

14.3.1 વિધાનનું નિષેધ : વિધાનનો ઈન્કાર એ વિધાનનું નિષેધ છે.

ચાલો આપણે એક વિધાનનો વિચાર કરીએ.

p : નવી દિલ્લી એક શહેર છે.

આ વિધાનનું નિષેધ

એ સાચું નથી કે નવી દિલ્લી એક શહેર છે.

આ રીતે પણ લખી શકાય.

નવી દિલ્લી એક શહેર છે તે અસત્ય છે.

આને સાદી રીતે આમ દર્શાવી શકાય.

નવી દિલ્લી એક શહેર નથી.

વ્યાખ્યા 1 : જો p વિધાન હોય તો p નું નિષેધ પણ વિધાન છે. તેને સંકેતમાં $\sim p$ વડે દર્શાવાય છે તથા 'not p' તરીકે વંચાય છે.

નોંધ વિધાનનું નિષેધ બનાવતી વખતે 'એ સત્ય નથી કે,' અથવા 'તે અસત્ય છે.' એવા શબ્દસમૂહો વાપરી શકાય.

અહીં એક ઉદાહરણ દર્શાવે છે કે આપણે એક વિધાનના નિષેધનું અવલોકન કરીને કેવી રીતે તેની સમજણને સુધારી શકીએ છીએ.

ચાલો આપણે એક વિધાનનો વિચાર કરીએ.

p : *જર્મનીમાં દરેક વ્યક્તિ જર્મન ભાષા બોલે છે.*

આપણે આ વિધાનનો ઇન્કાર આ રીતે કરીએ: જર્મનીમાં દરેક વ્યક્તિ જર્મન ભાષા બોલતી નથી. આનો અર્થ એ નથી કે જર્મનીમાં કોઈ પણ વ્યક્તિ જર્મન ભાષા બોલતી નથી. આ ફક્ત એટલું જ કહે છે કે જર્મનીમાં ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ જર્મન ભાષા બોલતી નથી.

આપણે વધુ ઉદાહરણોનો વિચાર કરીશું.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(i) લંબચોરસના બંને વિકર્ણની લંબાઈ સમાન હોય છે.

(ii) $\sqrt{7}$ એ સંમેય છે.

ઉકેલ : (i) આપેલ વિધાન એવું જણાવે છે કે લંબચોરસમાં બંને વિકર્ણોની લંબાઈ સમાન હોય છે. આનો અર્થ એ થાય કે જો તમે કોઈ પણ લંબચોરસ લો તો તેના બંને વિકર્ણોની લંબાઈ સમાન હશે. આપેલા વિધાનનું નિષેધ *'લંબચોરસના બંને વિકર્ણોની લંબાઈ સમાન હોય એ અસત્ય છે.'*

જેના બંને વિકર્ણોની લંબાઈ સમાન ન હોય એવો ઓછામાં ઓછો એક લંબચોરસ મળશે.

વિધાન (ii) ના નિષેધને પણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાશે :

એ સત્ય નથી કે $\sqrt{7}$ સંમેય છે.

આને આ રીતે પણ લખી શકાય :

$\sqrt{7}$ સંમેય નથી.

ઉદાહરણ 3 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો તથા પરિણામી વિધાનની સત્યાર્થતા ચકાસો:

(i) ઑસ્ટ્રેલિયા એ ખંડ છે.

(ii) બધી બાજુઓ સમાન હોય તેવા ચતુષ્કોણનું અસ્તિત્વ નથી.

(iii) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા 0 થી મોટી હોય છે.

(iv) 3 અને 4 નો સરવાળો 9 છે.

ઉકેલ : (i) આપેલા વિધાનનું નિષેધ *'ઑસ્ટ્રેલિયા ખંડ છે તે અસત્ય છે.'*

આમ પણ લખી શકાય, *'ઑસ્ટ્રેલિયા એ ખંડ નથી.'*

આપણે જાણીએ છીએ કે આ વિધાન મિથ્યા છે.

(ii) આપેલ વિધાનનું નિષેધ : *'એ સત્ય નથી કે બધી બાજુઓ સમાન હોય તેવા ચતુષ્કોણનું અસ્તિત્વ નથી.'*

આનો અર્થ નીચે પ્રમાણે પણ થાય :

બધી બાજુઓ સમાન હોય તેવા ચતુષ્કોણનું અસ્તિત્વ છે.

આ વિધાન સત્ય છે કારણ કે આપણે જાણીએ છીએ કે, જેની ચારેય બાજુઓ સમાન હોય તેવો એક ચતુષ્કોણ ચોરસ છે.

(iii) આપેલ વિધાનનું નિષેધ : *'દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ શૂન્યથી મોટી છે તે અસત્ય છે.'*

આને આમ પણ લખી શકાય; *'જે 0 કરતાં મોટી ન હોય એવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું અસ્તિત્વ છે.'*

આ મિથ્યા વિધાન છે.

(iv) આપેલ વાક્યનું નિષેધ : *'3 અને 4 નો સરવાળો 9 થાય તે અસત્ય છે.'*

આને આમ પણ લખી શકાય; *'3 અને 4 નો સરવાળો 9 ×[illegible]નથી.'*

આ વિધાન સત્ય છે.

14.3.2 સંયુક્ત વિધાનો

એક અથવા વધુ વિધાનોને અમુક કારક જેમકે "અને", "અથવા", વગેરે દ્વારા જોડવાથી ઘણાં ગાણિતિક વિધાનો મેળવી શકાય છે. આગળ આપેલ વિધાનનો વિચાર કરીએ.

p : *વીજગોળા અથવા વાયરિંગમાં કંઈક ખોટું છે.*

આ વિધાન આપણને એવું જણાવે છે કે ***વીજગોળા*** માં કંઈક ખોટું છે અથવા વાયરિંગમાં કંઈક ખોટું છે. આનો અર્થ એમ થાય કે આપેલ વિધાન બે સાદાં વિધાનો

q : *વીજગોળામાં કંઈક ખોટું છે.*

r : *વાયરિંગમાં કંઈક ખોટું છે.*

ને "અથવા" દ્વારા જોડવાથી બનાવવામાં આવ્યું છે. હવે, ધારો કે બે વિધાન નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

p : 7 એ અયુગ્મ સંખ્યા છે.

q : *7 એ વિભાજ્ય સંખ્યા છે.*

આ બંને વિધાનોને "અને" દ્વારા ભેગા કરી શકાય.

r: *7 એ અયુગ્મ અને અવિભાજ્ય સંખ્યા બંને છે.*

આ સંયુક્ત વિધાન છે. તે નીચેની વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે :

વ્યાખ્યા 2 *જે બે અથવા વધુ વિધાનો દ્વારા બનેલું વિધાન હોય તેને **સંયુક્ત વિધાન** (compound statement) કહે છે. આ પ્રકારના વિધાનમા દરેક વિધાનને **ઘટક વિધાન** (component statement) કહે છે.*

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 4 : નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોનાં ઘટક વિધાનો શોધો :

(i) આકાશ વાદળી છે અને ઘાસ લીલું છે.

(ii) વરસાદ પડે છે અને ઠંડી પડે છે.

(iii) બધી સંમેય સંખ્યાઓ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ એ સંકર સંખ્યાઓ છે.

(iv) 0 એ ધન સંખ્યા છે અથવા ઋણ સંખ્યા છે.

ઉકેલ : ચાલો એક પછી એક વિચાર કરીએ.

(i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : આકાશ વાદળી છે.

q : ઘાસ લીલું છે.

અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે.

p : વરસાદ પડે છે.

q : ઠંડી પડે છે.

અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(iii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : બધી સંમેય સંખ્યાઓ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

q : બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ એ સંકર સંખ્યાઓ છે.

અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(iv) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : 0 એ ધન સંખ્યા છે.

q : 0 એ ઋણ સંખ્યા છે.

અહીં સંયોજક 'અથવા' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

ઉદાહરણ 5 : નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોમાં ઘટક વિધાનો શોધો અને તે સત્ય છે કે અસત્ય તે ચકાસો :

(i) ચોરસ એ ચતુષ્કોણ છે અને તેની ચારેય બાજુઓ સમાન છે.

(ii) બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ યુગ્મ અથવા અયુગ્મ હોય છે.

(iii) જે વ્યક્તિએ ગણિતશાસ્ત્ર અથવા કમ્પ્યૂટરવિજ્ઞાન વિષય લીધો હોય તે MCA માં જઈ શકે છે.

(iv) ચંદીગઢ એ હરિયાણા અને ઉત્તરપ્રદેશનું પાટનગર છે.

(v) $\sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે અથવા અસંમેય સંખ્યા છે.

(vi) 24 એ 2, 4 અને 8 નો ગુણિત છે.

ઉકેલ : (i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : ચોરસ એ ચતુષ્કોણ છે.

q : ચોરસની બધી બાજુઓ સમાન છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે બંને વિધાન સત્ય છે. અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ સંખ્યાઓ છે.

q : બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ યુગ્મ સંખ્યાઓ છે.

બંને વિધાનો મિથ્યા છે અને સંયોજક 'અથવા' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(iii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : જે વ્યક્તિએ ગણિતશાસ્ત્ર વિષય લીધો હોય તે MCA માં જઈ શકે છે.

q : જે વ્યક્તિએ કમ્પ્યુટરવિજ્ઞાન વિષય લીધો હોય તે MCA માં જઈ શકે છે.

બંને વિધાનો સત્ય છે. અહીં સંયોજક 'અથવા' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(iv) ઘટક વિધાન આ પ્રમાણે છે :

p : ચંદીગઢ એ હરિયાણાનું પાટનગર છે.

q : ચંદીગઢ એ ઉત્તરપ્રદેશનું પાટનગર છે.

પ્રથમ વિધાન સત્ય છે, પરંતુ બીજું વિધાન મિથ્યા છે. અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(v) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : $\sqrt{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

q : $\sqrt{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

પ્રથમ વિધાન અસત્ય છે, પરંતુ બીજું વિધાન સત્ય છે. અહીં સંયોજક 'અથવા' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

(vi) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : 24 એ 2 નો ગુણિત છે

q : 24 એ 4 નો ગુણિત છે.

r : 24 એ 8 નો ગુણિત છે.

ત્રણે વિધાનો સત્ય છે. અહીં સંયોજક 'અને' દ્વારા વિધાનોને જોડવામાં આવેલ છે.

આમ, આપણે અવલોકન કર્યું કે સંયુક્ત વિધાનો એ ખરેખર બે અથવા વધુ વિધાનોને સંયોજક 'અને', 'અથવા' વગેરે દ્વારા જોડવાથી બને છે. આ શબ્દોનો ગણિતમાં વિશેષ અર્થ છે. આપણે આ બાબતની ચર્ચા હવે પછીના વિભાગમાં કરીશું.

સ્વાધ્યાય 14.2

1. નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(i) ચેન્નઈ તમિલનાડુનું પાટનગર છે.

(ii) $\sqrt{2}$ સંકર સંખ્યા નથી.

(iii) બધા ત્રિકોણો એ સમબાજુ ત્રિકોણ નથી.

(iv) 2 એ 7 કરતાં મોટી સંખ્યા છે.

(v) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

2. નીચેનાં વિધાનોની જોડ પરસ્પર નિષેધ દર્શાવે છે ?

(i) સંખ્યા x એ સંમેય સંખ્યા નથી.
સંખ્યા x એ અસંમેય સંખ્યા નથી.

(ii) સંખ્યા x એ સંમેય સંખ્યા છે.
સંખ્યા x એ અસંમેય સંખ્યા છે.

3. નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોનાં ઘટક વિધાનો શોધો અને તે સત્ય છે કે અસત્ય તે ચકાસો :

(i) 3 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે અથવા અયુગ્મ છે.

(ii) બધા પૂર્ણાંકો ધન અથવા ઋણ છે.

(iii) 100 એ 3, 11 અને 5 થી વિભાજ્ય છે.

14.4 વિશિષ્ટ શબ્દો/ શબ્દસમૂહો

સંયુક્ત વિધાનોમાં અમુક શબ્દો જેવા કે "અને" , "અથવા" વગેરે જોવા મળે છે. તેમનો ગાણિતિક વિધાનોમાં વારંવાર ઉપયોગ થાય છે. આને સંયોજકો કહેવામાં આવે છે. જ્યારે આપણે આ સંયુક્ત વિધાનોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે આ શબ્દોની ભૂમિકાની સમજણ હોવી જરૂરી છે. આની ચર્ચા આપણે નીચે કરીશું :

14.4.1 શબ્દ **"અને" :** ચાલો આપણે "અને" દ્વારા બનતા સંયુક્ત વિધાનો જોઈએ.

p : *બિંદુને સ્થાન હોય છે અને તે સ્થાન નક્કી કરી શકાય છે.*

આ વિધાનને આ પ્રમાણે બે ઘટક વિધાનોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે :

q : *બિંદુને સ્થાન હોય છે.*

r : *તે સ્થાન નક્કી કરી શકાય છે.*

અહીં આપણે અવલોકન કરી શકીએ કે બંને વિધાનો સત્ય છે.

ચાલો આપણે બીજું વિધાન જોઈએ.

p : 42 *એ* 5, 6 *અને* 7 *થી વિભાજ્ય છે.*

આ વિધાનનાં ઘટક વિધાનો નીચે પ્રમાણે મળશે.

q : 42 *એ* 5 *થી વિભાજ્ય છે.*

r : 42 *એ* 6 *થી વિભાજ્ય છે.*

s : 42 *એ* 7 *થી વભિાજ્ય છે.*

અહીં આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રથમ વિધાન મિથ્યા છે, જ્યારે બાકીનાં બે સત્ય છે.

આપણે સંયોજક ''અને'' સંબંધિત નીચે પ્રમાણેના નિયમો નોંધીશું :

1. *જો બધાં ઘટક વિધાનો સત્ય હોય તો કારક ''અને'' દ્વારા બનેલું સંયુક્ત વિધાન સત્ય હોય છે.*

2. *જો કોઈપણ એક ઘટક વિધાન મિથ્યા હોય તો કારક ''અને'' દ્વારા બનેલું ઘટક વિધાન મિથ્યા હોય છે.*

(અમુક ઘટક વિધાનો મિથ્યાં હોય અથવા બધાં ઘટક વિધાનો મિથ્યાં હોય તેવા પ્રકારનો પણ આમાં સમાવેશ થાય છે.)

ઉદાહરણ 6 : નીચેના સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો લખો અને સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે કે મિથ્યા તે ચકાસો :

(i) રેખા સીધી લીટીમાં છે અને બંને દિશામાં અનંત સુધી વિસ્તરેલી છે.

(ii) 0 એ દરેક ધન પૂર્ણાંક અને ઋણ પૂર્ણાંક કરતાં નાનો છે.

(iii) બધી જીવંત વસ્તુઓને બે પગ અને બે આંખો હોય છે.

ઉકેલ : (i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : *રેખા સીધી લીટીમાં છે.*

q : *રેખા બંને દિશામાં અનંત સુધી વિસ્તરેલી છે.*

બંને વિધાનો સત્ય છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન સત્ય થશે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : *0 એ દરેક ધન પૂર્ણાંક કરતાં નાનો છે.*

q : *0 એ દરેક ઋણ પૂર્ણાંક કરતાં નાનો છે.*

બીજું વિધાન મિથ્યા છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા થશે.

(iii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : *બધી જીવંત વસ્તુઓને બે પગ હોય છે.*

q : *બધી જીવંત વસ્તુઓને બે આંખો હોય છે.*

બંને વિધાનો મિથ્યા છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા થશે.

હવે નીચેના વિધાનનો વિચાર કરો :

p : *આલ્કોહોલ અને પાણીનું મિશ્રણ રાસાયણિક પદ્ધતિઓ દ્વારા અલગ કરી શકાય છે.*

આ વિધાનને સંયોજક "અને" દ્વારા મળતું સંયુક્ત વિધાન ગણી શકાય નહિ. અહીં શબ્દ "અને" એ આલ્કોહૉલ અને પાણી બે વસ્તુઓના સંદર્ભે છે. આ આપણને અગત્યની નોંધ તરફ દોરી જાય છે.

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણ પરથી જોઈ શકાય છે કે "અને" શબ્દ ધરાવતું વિધાન હંમેશાં સંયુક્ત વિધાન હોય તેવું વિચારી શકાય નહિ. તેથી શબ્દ "અને" હંમેશાં સંયોજક તરીકે વપરાતો નથી.

14.4.2 શબ્દ "અથવા" : ચાલો નીચેના વિધાનનો વિચાર કરીએ :

p : *સમતલમાં બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે અથવા સમાંતર હોય.*

આપણે જાણીએ છીએ કે આ વિધાન સત્ય છે. આનો અર્થ શું થાય ? આનો અર્થ એમ થાય કે જો સમતલમાં બે રેખાઓ એકબીજીને

છેદે તો તેઓ સમાંતર ન હોય. બીજી રીતે જો બે રેખાઓ સમાંતર ન હોય, તો તેઓ એક બિંદુમાં છેદશે. એટલે કે આ વિધાન બંને પરિસ્થિતિમાં સત્ય છે.

"અથવા" સાથેનાં વિધાનોને સમજવા માટે આપણે પ્રથમ નોંધીશું કે અંગ્રેજી ભાષામાં "અથવા" નો ઉપયોગ બે પ્રકારે થાય છે. ચાલો આપણે પ્રથમ નીચેનું વિધાન જોઈએ.

p : ભોજનાલયમાં થાળી સાથે આઈસક્રીમ અથવા ઠંડું પીણું ઉપલબ્ધ છે.

આનો અર્થ એમ થાય કે જો કોઈ વ્યક્તિને થાળી સાથે આઈસ્ક્રીમની ઈચ્છા ન હોય તો તેને ઠંડા પીણા મળી શકે છે અથવા જો ઠંડા પીણાની ઈચ્છા ન હોય તો થાળી સાથે આઈસ્ક્રીમ મળી શકે છે. એટલે કે કોઈને ઠંડા પીણાની ઈચ્છા ન હોય તો તે આઈસ્ક્રીમ લઈ શકે છે. કોઈ પણ વ્યક્તિ આઈસ્ક્રીમ અને ઠંડુ પીણું બંને ન લઈ શકે. આને ***'નિવારક વિકલ્પ'*** *(Exclusive or)* કહેવાય છે.

બીજું વિધાન જોઈએ.

જે વિદ્યાર્થીએ જીવવિજ્ઞાન અથવા રસાયણ વિજ્ઞાન વિષય લીધા હોય તે M.Sc. માટે સૂક્ષ્મજીવવિજ્ઞાન (microbiology) વિષય માટે અરજી કરી શકે છે.

અહીં આપણે એવું સમજીશું કે જે વિદ્યાર્થીએ જીવવિજ્ઞાન અને રસાયણ વિજ્ઞાન બંને વિષયો લીધા હોય તેમજ જે વિદ્યાર્થીઓએ ફક્ત આ પૈકી એક જ વિષય લીધો હોય તે પણ સૂક્ષ્મજીવવિજ્ઞાનના અભ્યાસ માટે અરજી કરે શકે છે. અહીં આપણે ***"સમાવેશ વિકલ્પ"*** *(Inclusive or)* નો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

બંને પ્રકાર વચ્ચેનો તફાવત નોંધવો અગત્યનો છે. જ્યારે આપણું વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવાનું હોય ત્યારે તેની જરૂર પડશે. ચાલો આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : નીચેનાં વિધાનોમાં "અથવા" નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે થયો છે તે નક્કી કરો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :

(i) દેશમાં દાખલ થવા માટે તમારે પાસપૉર્ટ અથવા મતદાર કાર્ડની જરૂર પડશે.

(ii) જો કોઈ દિવસે તહેવાર અથવા રવિવાર હોય તો શાળામાં રજા હોય છે.

(iii) બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે અથવા સમાંતર હોય.

(iv) વિદ્યાર્થીઓ ત્રીજી ભાષા તરીકે, ફ્રેન્ચ અથવા સંસ્કૃત વિષય લઈ શકે છે.

ઉકેલ : (i) અહીં "અથવા" સમાવેશ વિકલ્પના અર્થમાં છે. દેશમાં દાખલ થવા માટે કોઈ વ્યક્તિ પાસે પાસપોર્ટ અને મતદાર કાર્ડ બંને હોઈ શકે.

(ii) અહીં "અથવા" સમાવેશ વિકલ્પના અર્થમાં છે. રવિવાર અને તહેવાર બંને એક સાથે હોય ત્યારે પણ શાળામાં રજા હોય છે.

(iii) અહીં "અથવા" નિવારક વિકલ્પ છે. બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે તથા સમાંતર પણ હોય તે શક્ય નથી.

(iv) અહીં "અથવા" નિવારક વિકલ્પ છે. વિદ્યાર્થી ફ્રેન્ચ અને સંસ્કૃત બંને ભાષા પસંદ કરી શકે નહિ.

"અથવા" વડે બનતા સંયુક્ત વિધાન માટેનો નિયમ :

1. જો સંયોજક "અથવા" વડે બનતા સંયુક્ત વિધાનમાં એક ઘટક વિધાન સત્ય હોય અથવા બંને ઘટક વિધાનો સત્ય હોય તો સંયુક્ત વિધાન સત્ય બને છે.

2. જો સંયોજક "અથવા" વડે બનતા સંયુક્ત વિધાનમાં બંને ઘટક વિધાનો મિથ્યા હોય, તો સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા બને છે.

ઉદાહરણ તરીકે નીચેનું વિધાન વિચારો :

p : બે રેખા એક બિંદુમાં છેદે અથવા સમાંતર હોય.

ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે.

q : બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે.

r : બે રેખાઓ સમાંતર હોય.

જ્યારે q સત્ય હોય ત્યારે r મિથ્યા હોય અને જ્યારે r સત્ય હોય ત્યારે q મિથ્યા હોય. આથી સંયુક્ત વિધાન p સત્ય થશે.

બીજું વિધાન વિચારો :

p : 125 એ 7 અથવા 8 નો ગુણિત છે.

ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે.

q : 125 એ 7 નો ગુણિત છે.

r : 125 એ 8 નો ગુણિત છે.

q અને r બંને મિથ્યા છે. આથી સંયુક્ત વિધાન p *મિથ્યા હશે.*

ફરીથી નીચેના વિધાનનો વિચાર કરીએ :

p : જો કોઈ દિવસે તહેવાર અથવા રવિવાર હોય તો શાળામાં રજા હોય છે.

ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

q : જો કોઈ દિવસે તહેવાર હોય તો શાળામાં રજા હોય છે.

r : જો કોઈ દિવસે રવિવાર હોય તો શાળામાં રજા હોય છે.

q અને r બંને સત્ય છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન સત્ય થશે.

બીજું વિધાન વિચારો :

p : મુંબઈ એ કોલકતા અને કર્ણાટકનું પાટનગર છે.

ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

q : મુંબઈ એ કોલકતાનું પાટનગર છે.

r : મુંબઈ એ કર્ણાટકનું પાટનગર છે.

બંને ઘટક વિધાનો મિથ્યા છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા હશે.

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ :

ઉદાહરણ 8 : નીચેનાં વિધાનોમાં "અથવા" નો ઉપયોગ કયા પ્રકારે થયો છે તે નક્કી કરો તથા વિધાન સત્ય છે કે મિથ્યા તે ચકાસો :

(i) $\sqrt{2}$ એ સંમેય અથવા અસંમેય સંખ્યા છે.

(ii) જાહેર પુસ્તકાલયમાં દાખલ થવા માટે બાળકો પાસે શાળામાંથી આપેલ ઓળખપત્ર અથવા શાળાના અધિકારીનો પત્ર હોવો જરૂરી છે.

(iii) લંબચોરસ એ ચતુષ્કોણ છે અથવા 5 બાજુવાળો બહુકોણ છે.

ઉકેલ : (i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

$p:\sqrt{2}$ *એ સંમેય સંખ્યા છે.*

$q:\sqrt{2}$ *એ અસંમેય સંખ્યા છે.*

અહીં પ્રથમ વિધાન મિથ્યા છે, જ્યારે બીજું વિધાન સત્ય છે તથા "અથવા" એ નિવારક વિકલ્પ છે. તેથી સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : *જાહેર પુસ્તકાલયમાં દાખલ થવા માટે બાળકો પાસે ઓળખપત્ર હોવું જરૂરી છે.*

q : *જાહેર પુસ્તકાલયમાં દાખલ થવા માટે બાળકો પાસે શાળાના અધિકારીએ આપેલ પત્ર હોવો જરૂરી છે.*

જો બાળકો પાસે ઓળખપત્ર અથવા પત્ર બંનેમાંથી ગમે તે એક હોય અથવા બંને હોય તો પુસ્તકાલયમાં દાખલ થઈ શકે છે. તેથી "અથવા" એ સમાવેશ વિકલ્પ છે. જ્યારે બાળકો પાસે ઓળખપત્ર અને પત્ર બંને હોય ત્યારે પણ સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

(iii) અહીં "અથવા" એ નિવારક વિકલ્પના સંદર્ભમાં છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

14.4.3 કારકો :

"કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે." કે "પ્રત્યેક માટે" વગેરે જેવા શબ્દસમૂહો એ કારકો (*Quantifiers*) છે.

ગાણિતિક વિધાનોમાં "કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે" તેવો શબ્દસમૂહ જોઈ શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે આ વિધાનનો વિચાર કરીએ.

p : *બધી બાજુઓ સરખી હોય તેવો કોઈક લંબચોરસ અસ્તિત્વ ધરાવે છે.*

આનો અર્થ એ થાય કે જેની બધી બાજુઓ સરખી હોય તેવો ઓછામાં ઓછો એક લંબચોરસ મળે છે.

"કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે" ની નજીક સંકળાયેલો શબ્દ "પ્રત્યેક માટે" કે "બધા માટે" છે. નીચેના વિધાનનો વિચાર કરીએ :

p : *દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા* p *માટે* $\sqrt{p}$ *એ અસંમેય સંખ્યા છે.*

આનો અર્થ એમ થાય કે જો S એ બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ દર્શાવે તો S ના પ્રત્યેક સભ્ય p માટે $\sqrt{p}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે.

સામાન્ય રીતે ગાણિતિક વિધાનમાં કારક "પ્રત્યેક માટે" એવું કહેવામાં આવે ત્યારે તેનું અર્થઘટન આ રીતે કરી શકાય. આપેલ ગણને જે ગુણધર્મ લાગુ પડે છે તે ગુણધર્મનું પાલન ગણના પ્રત્યેક સભ્યએ કરવું જ જોઈએ.

કોઈ પણ વાક્યમાં આપેલ કારક કયા ચોક્કસ સ્થાને રજૂ કરવામાં આવે છે તે જાણવું આપણા માટે અગત્યનું છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચેનાં બે વાક્યોની સરખામણી કરો :

1. પ્રત્યેક ધન સંખ્યા x માટે એવી ધન સંખ્યા y મળે કે જેથી $y < x$ થાય.
2. કોઈક એવી ધન સંખ્યા y મળે કે જેથી બધી જ ધન સંખ્યા x માટે $y < x$ થાય.

આ વિધાનો દેખાવમાં સમાન લાગે છે તેમ છતાં તેઓ સમાન અર્થ ધરાવતાં નથી. ખરું જોતાં વિધાન (1) સત્ય છે અને વિધાન(2) મિથ્યા છે. આમ, ગાણિતિક લેખન અર્થસભર બનાવવા માટે બધા જ સંકેતોનો કાળજીપૂર્વક પરિચય કરાવવો જોઈએ અને દરેક સંકેતને ખૂબ વહેલા નહિ અને ખૂબ મોડા નહિ તે રીતે ચોક્કસપણે યોગ્ય જગ્યાએ રજૂ કરવો જોઈએ.

"અને" તથા "અથવા" શબ્દોને સંયોજકો અને "કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે" તથા "પ્રત્યેક માટે" ને કારકો કહે છે.

આમ, આપણે જોયું કે ગાણિતિક વિધાનો અમુક વિશિષ્ટ શબ્દો ધરાવે છે અને જ્યારે આપણે ભિન્ન વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસવી હોય ત્યારે તેમની સાથે જોડાયેલો અર્થ જાણવો જરૂરી છે.

સ્વાધ્યાય 14.3

1. નીચેનાં પૈકી દરેક સંયુક્ત વિધાનમાં પ્રથમ સંયોજકો ઓળખો અને પછી તેને ઘટક વિધાનોમાં છૂટું પાડો :

(i) બધી સંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક છે અને બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંકર સંખ્યાઓ નથી.

(ii) પૂર્ણાંકનો વર્ગ ધન અથવા ઋણ છે.

(iii) રેતી સૂર્યના પ્રકાશમાં ઝડપથી ગરમ થાય છે અને રાત્રિના સમયે ઝડપથી ઠંડી થતી નથી.

(iv) $x = 2$ અને $x = 3$ એ સમીકરણ $3x^2 - x - 10 = 0$ નાં બીજ છે.

2. નીચેનાં વિધાનોમાં કારક ઓળખો અને વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(i) કોઈક સંખ્યાનો વર્ગ તે સંખ્યા જેટલો જ હોય તેવી સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(ii) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે x એ $x + 1$ કરતાં નાની સંખ્યા છે.

(iii) ભારતમાં દરેક રાજ્યને એક રાજધાની હોય છે.

3. નીચેનાં વિધાનયુગ્મ એકબીજાનાં નિષેધ છે કે નહિ તે ચકાસો. તમારા જવાબ માટેનાં કારણો આપો :

(i) બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y માટે $x + y = y + x$ એ સત્ય છે.

(ii) $x + y = y + x$ થાય તેવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

4. નીચેનાં વિધાનોમાં "અથવા"નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે થયો છે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે તે જણાવો. તમારા જવાબ માટેનાં કારણો આપો :

(i) સૂર્ય ઊગે છે અથવા ચંદ્ર આથમે છે.

(ii) ડ્રાઇવિંગ લાયસન્સ મેળવવા માટેની અરજી કરવા માટે તમારી પાસે રેશનકાર્ડ અથવા પાસપૉર્ટ હોવા જોઈએ.

(iii) બધી જ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ધન અથવા ઋણ છે.

14.5 પ્રેરણ

આ વિભાગમાં આપણે "જો....તો....", "....તો જ...." અને "...તો અને તો જ...." પ્રકારના પ્રેરણની ચર્ચા કરીશું.

ગણિતમાં "જો...તો...." વાળા વિધાનો ખૂબ જ સામાન્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચેનું વિધાન જોઈએ :

r : *જો x ધન હોય તો* $2x > x$

જ્યારે આપણે આ વિધાન જોઈએ છીએ ત્યારે આપણે અવલોકન કરી શકીએ કે તે આ પ્રમાણેનાં બે વિધાનો p અને q ને અનુરૂપ છે.

p : x *ધન છે.*

q : $2x > x$ *છે.*

"જો p તો q" વાક્ય એવું કહેવા માંગે છે કે કોઈ ઘટના માટે જો p સત્ય હોય તો q હંમેશાં સત્ય થાય.

"જો p તો q" પ્રકારના વાક્યની સૌથી મહત્ત્વપૂર્ણ હકીકત એ છે કે જ્યારે p અસત્ય હોય ત્યારે q માટે કશું કહી ન શકાય. ઉદાહરણ તરીકે, જો x ધન ના હોય તો q વિશે કશું કહી ન શકાય. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો p ન ઉદ્ભવે તેની કોઈ અસર q ના ઉદ્ભવ પર થતી નથી.

વિધાન "જો p તો q" માટે બીજો મુદ્દો નોંધવા જેવો એ છે કે p ઉદ્ભવે છે એવું આ વિધાન સૂચિત કરતું નથી.

વિધાન "જો p તો q" સમજવા માટે અનેક રીતો છે. આપણે આ રીતોને નીચેના વિધાનના સંદર્ભમાં દર્શાવીશું :

r : જો કોઈ સંખ્યા 9 ની ગુણિત હોય તો તે 3 ની ગુણિત હોય.

ધારો કે p અને q નીચે દર્શાવેલ વિધાનો છે :

p : સંખ્યા 9 ની ગુણિત હોય.

q : સંખ્યા 3 ની ગુણિત હોય.

જો p તો q એ નીચે પ્રમાણે સમકક્ષ હશે :

1. જો p તો q પ્રકારના વિધાનને પ્રેરણ કહે છે.

   આ વિધાન આમ કહે છે : કોઈક સંખ્યા 9 ની ગુણિત હોય, તો તે 3ની ગુણિત હોય એમ સૂચિત થાય છે.

2. p એ q માટેની પર્યાપ્ત શરત છે.

   આ વિધાન આમ કહે છે : કોઈક સંખ્યા 3 ની ગુણિત હોય તે નક્કી કરવા માટે એ સંખ્યા 9 ની ગુણિત છે એમ જાણવું પર્યાપ્ત છે.

3. q તો જ p.

   આ વિધાન આમ કહે છે : કોઈક સંખ્યા 3 ની ગુણિત હોય તો જ તે સંખ્યા 9 ની ગુણિત કહેવાય.

4. q એ p માટેની આવશ્યક શરત છે.

   આ વિધાન આમ કહે છે : સંખ્યા 3 ની ગુણિત હોય એ સંખ્યા 9 ની ગુણિત હોય તે માટેની આવશ્યક શરત છે.

5. જો $\sim q$ તો $\sim p$.

   આ વિધાન આમ કહે છે : જો સંખ્યા 3 ની ગુણિત ન હોય, તો તે 9 ની ગુણિત ન હોય.

   પ્રેરણને સંકેતમાં $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય છે. પ્રેરણ માટેનો સંકેત $\Rightarrow$ છે.

14.5.1 સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ :

સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ એ ''જો....તો'' પ્રકારના વિધાનો વડે રચના કરી શકાતાં ચોક્કસ પ્રકારનાં બીજાં વિધાનો છે.

ઉદાહરણ તરીકે નીચેના ''જો....તો'' પ્રકારના વિધાનનો વિચાર કરીએ.

જો ભૌતિક પર્યાવરણમાં ફેરફાર થાય તો જૈવિક વાતાવરણ બદલાય છે.

આ વિધાનનું સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો જૈવિક વાતાવરણ ન બદલાય તો ભૌતિક પર્યાવરણમાં ફેરફાર થતો નથી.

અહીં નોંધીશું કે આ વિધાનો સમાનાર્થી અભિવ્યક્તિ ધરાવે છે.

ચાલો આ સમજવા માટે આપણે વધુ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 9 : નીચેનાં વિધાનોનાં સમાનાર્થી પ્રેરણ લખો :

(i) જો કોઈ સંખ્યા 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો તે 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

(ii) જો તમે ભારતમાં જન્મ્યા હોવ તો તમે ભારતના નાગરિક છો.

(iii) જો ત્રિકોણ સમબાજુ હોય તો તે સમદ્વિબાજુ હોય છે.

ઉકેલ : આ વિધાનોના સમાનાર્થી પ્રેરણ આ પ્રમાણે છે :

(i) જો કોઈ સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય ન હોય તો તે 9 વડે વિભાજ્ય ન હોય.

(ii) જો તમે ભારતના નાગરિક ન હો તો તમે ભારતમાં જન્મ્યા નથી.

(iii) જો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ ન હોય તો તે સમબાજુ ન હોય.

ઉપરનાં ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે જો p તો q પ્રકારના વિધાનનું સમાનાર્થી પ્રેરણ એ જો $\sim q$ તો $\sim p$ થાય.

હવે આપણે બીજા શબ્દ "પ્રતીપ"નો વિચાર કરીશું.

'જો p તો q' પ્રકારના વિધાનનું પ્રતીપ 'જો q તો p' છે.

ઉદાહરણ તરીકે, વિધાન

p : જો સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય હોય તો તે 5 વડે વિભાજ્ય હોય

તો પ્રતીપ એ *q : જો સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય હોય તો તે 10 વડે વિભાજ્ય હોય છે.*

ઉદાહરણ 10 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

(i) જો n યુગ્મ સંખ્યા હોય, તો n^2 યુગ્મ છે.

(ii) જો તમે પુસ્તકના બધા સ્વાધ્યાયો કરશો તો વર્ગમાં તમને A ગ્રેડ મળશે.

(iii) જો બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે $a > b$ હોય, તો $a - b$ એ હંમેશાં ધન પૂર્ણાંક છે.

ઉકેલ : આ વિધાનોનાં પ્રતીપ :

(i) જો n^2 યુગ્મ સંખ્યા હોય તો n યુગ્મ છે.

(ii) જો તમને વર્ગમાં A ગ્રેડ મળ્યો હોય તો તમે પુસ્તકના બધા સ્વાધ્યાય કર્યા હશે.

(iii) જો બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે $a - b$ હંમેશાં ધન પૂર્ણાંક હોય, તો $a > b$.

ચાલો કેટલાંક વધુ ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 11 : નીચેનાં દરેક સંયુક્ત વિધાનોમાં પહેલા ઘટક વિધાનો ઓળખો. પછી વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસો.

(i) જો ત્રિકોણ ABC એ સમબાજુ હોય તો તે સમદ્વિબાજુ છે.

(ii) જો a અને b પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય તો ab સંમેય સંખ્યા છે.

ઉકેલ : (i) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

q : ત્રિકોણ ABC સમદ્વિબાજુ છે.

સમબાજુ ત્રિકોણ એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોવાથી આપણે તારવી શકીએ કે આપેલ સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

(ii) ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : a અને b પૂર્ણાંકો છે.

q : ab એ સંમેય સંખ્યા છે.

બે પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગુણાકાર પૂર્ણાંક હોય અને તેથી તે સંમેય સંખ્યા પણ છે. તેથી આપેલ સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

'તો અને તો જ', પ્રકારના વિધાનને સંકેતમાં '$\Leftrightarrow$' વડે દર્શાવાય છે :

આપેલ વિધાનો p અને q માટે નીચેનાં વિધાનો સમકક્ષ સ્વરૂપમાં થશે.

(i) જો p તો અને તો જ q

(ii) જો q તો અને તો જ p

(iii) p એ q માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત છે અને તે જ રીતે ઊલટું પણ કહેવાય.

(iv) $p \Leftrightarrow q$

એક ઉદાહરણનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 12 : નીચે બે વિધાનની જોડ આપેલ છે. બંને વિધાનોને "તો અને તો જ" વડે જોડો.

(i) p : જો લંબચોરસ એ ચોરસ હોય તો તેની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય.

q : જો લંબચોરસની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય તો લંબચોરસ એ ચોરસ છે.

(ii) p : જો કોઇ સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય હોય, તો તેના અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજય છે.

q : જો કોઈ સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજ્ય હોય તો સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : (i) લંબચોરસ એ ચોરસ હોય તો અને તો જ તેની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય.

(ii) કોઈ સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય હોય તો અને તો જ તેના અંકોનો સરવાળો 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

સ્વાધ્યાય 14.4

1. નીચેના વિધાનને પાંચ જુદી જુદી રીતે સમાન અર્થમાં "જો...તો..." નો ઉપયોગ કરીને ફરીથી લખો :

જો કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા અયુગ્મ હોય તો તેનો વર્ગ પણ અયુગ્મ છે.

2. નીચેનાં વિધાનોનાં સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ લખો :

(i) જો x અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તો x અયુગ્મ હોય.

(ii) જો બે રેખાઓ સમાંતર હોય તો તે સમતલમાં છેદશે નહિ.

(iii) કંઇક ઠંડું છે તે સૂચવે છે કે તેનું તાપમાન નીચું છે.

(iv) જો તમે ભૂમિતિ સમજી શકો નહિ તો તમે તાર્કિક સાબિતી આપવાનું જાણતા ન હો.

(v) x એ યુગ્મ સંખ્યા છે તે સૂચવે છે કે x એ 4 થી વિભાજ્ય છે.

3. નીચેનાં દરેક વિધાનોને "જો... તો..." સ્વરૂપમાં લખો :

(i) તમને નોકરી મળી એ સૂચવે છે કે તમારાં પ્રમાણપત્રો સારાં છે.

(ii) એક મહિના માટે હૂંફવાળા રહે તો કેળાનાં ઝાડ ખીલે છે.

(iii) ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iv) વર્ગમાં A^+ મેળવવા માટે તમારે પુસ્તકના બધા જ સ્વાધ્યાય કરવા જરૂરી છે.

4. નીચે વિધાનો (a) અને (b) આપેલ છે. જે વિધાનો એકબીજાના સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ હોય તે ઓળખો :

(a) જો તમે દિલ્લીમાં રહેતા હોય તો તમારી પાસે શિયાળુ કપડાં છે.

(i) જો તમારી પાસે શિયાળુ કપડાં ન હોય, તો તમે દિલ્લીમાં રહેતા નથી.

(ii) જો તમારી પાસે શિયાળુ કપડાં હોય, તો તમે દિલ્લીમાં રહો છો.

(b) જો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો તેના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

(i) જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર ન દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.

(ii) જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

14.6 વિધાનોની યથાર્થતા

આ વિભાગમાં આપણે વિધાન ક્યારે સત્ય હોય છે તેની ચર્ચા કરીશું. આ પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવા માટે નીચેના બધા જ પ્રશ્નના ઉત્તર આપવા જ જોઈએ.

વિધાનનો અર્થ શું છે ?

આ વિધાન સત્ય છે અને આ વિધાન મિથ્યા છે તેવું કહેવું તેનો અર્થ શું થાય ?

આ પ્રશ્નના જવાબનો આધાર કયા વિશિષ્ટ શબ્દો અને શબ્દસમૂહો ''અને'', 'અથવા' અને કયા પ્રેરણ ''જો...તો'', ''જો તો અને તો જ'' અને કયા કારકો ''પ્રત્યેક માટે'', ''કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે'' વિધાનમાં દેખાય છે તેના ઉપર છે.

અહીં આપણે ક્યારે વિધાન યથાર્થ છે તે શોધવા માટેની કેટલીક રીતોની ચર્ચા કરીશું.

વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવા માટે આપણે કેટલાક સામાન્ય નિયમોની યાદી બનાવીશું.

નિયમ 1 : જો p અને q એ ગાણિતિક વિધાનો હોય તો વિધાન "p અને q" સત્ય બને તે માટે નીચેનાં પદનું પાલન કરવું જોઈએ.

પદ 1 : વિધાન p સત્ય છે તેમ બતાવો.

પદ 2 : વિધાન q સત્ય છે તેમ બતાવો.

નિયમ 2 : ''અથવા'' વાળું વિધાન

જો p અને q એ ગાણિતિક વિધાનો હોય તો વિધાન "p અથવા q" સત્ય બને તે માટે નીચે પ્રમાણે વિચારો :

પદ 1 : વિધાન p મિથ્યા છે તેમ ધારીને q સત્ય છે તેમ બતાવો.

પદ 2 : વિધાન q મિથ્યા છે તેમ ધારીને p સત્ય છે તેમ બતાવો.

પદ 3 : વિધાન p અને q બંનેની સત્યાર્થતાની ચકાસણી કરો.

નિયમ 3 : "જો... તો..." શ્વ્ર્ હૈંહ્મ *શ્રૃક્ષ

વિધાન "જો p તો q" માટે નીચેના વિકલ્પમાંથી ગમે તે એક સત્ય હોય.

પદ 1 : વિધાન p સત્ય છે તેમ ધારીને સાબિત કરો કે q સત્ય હોય. (પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ)

પદ 2 : વિધાન q મિથ્યા છે તેમ ધારીને સાબિત કરો કે p મિથ્યા હોય. (સમાનાર્થી પ્રેરણ પદ્ધતિ)

નિયમ 4 : "તો અને તો જ" શ્વ્ર્ હૈંહ્મ *શ્રૃક્ષ

વિધાન "જો p તો અને તો જ q", માટે આપણે

(i) જો p સત્ય હોય તો q સત્ય અને (ii) જો q સત્ય હોય, તો p સત્ય છે તેમ બતાવવું જોઈએ.

હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીશું.

ઉદાહરણ 13 : નીચેનું વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસો :

જો $x, y \in \mathbf{Z}$ તથા x અને y અયુગ્મ હોય તો xy અયુગ્મ છે.

ઉકેલ : ધારો કે $p : x, y \in \mathbf{Z}$ તથા x અને y અયુગ્મ છે. $q : xy$ અયુગ્મ છે.

આપેલા વિધાનની યથાર્થતા ચકાસવા માટે આપણે નિયમ 3 નો વિકલ્પ 1 વાપરીશું. તે આ પ્રમાણે છે. જો વિધાન p સત્ય છે એમ સ્વીકારીએ તો q સત્ય સાબિત કરવું.

વિધાન p સત્ય છે એટલે કે x અને y અયુગ્મ પૂર્ણાંકો છે.

આથી કોઈક પૂર્ણાંક m માટે, $x = 2m + 1$ તથા કોઈક પૂર્ણાંક n માટે, $y = 2n + 1$

$$xy = (2m + 1)(2n + 1)$$

$$= 2(2mn + m + n) + 1$$

આ દર્શાવે છે xy અયુગ્મ છે.

આમ, આપેલ વિધાન સત્ય છે. જો આપણે નિયમ 3 ના વિકલ્પ-2 નો ઉપયોગ કરીને ચકાસવું હોય, તો નીચે પ્રમાણે આગળ વધવું પડશે :

આપણે ધારી લઈશું કે q સત્ય નથી. તે એમ સૂચિત કરે છે કે આપણે વિધાન q ના નિષેધનો વિચાર કરવો. તે વિધાન આ પ્રમાણે છે.

$\sim q : xy$ યુગ્મ છે.

જો x અથવા y યુગ્મ હોય ત્યારે તે શક્ય છે. આ દર્શાવે છે કે વિધાન p સત્ય નથી. આમ આપણે બતાવ્યું કે,

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

નોંધ ઉપરનું ઉદાહરણ દર્શાવે છે કે $p \Rightarrow q$, સાબિત કરવા માટે તેનું સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$ સાબિત કરવું પૂરતું છે.

ઉદાહરણ 14 : સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતે નીચેનું વિધાન સત્ય છે કે મિથ્યા તે ચકાસો :

જો $xy \in \mathbf{Z}$ અયુગ્મ હોય તો $x \in \mathbf{Z}$ $y \in \mathbf{Z}$ માટે x અને y અયુગ્મ છે.

ઉકેલ : વિધાનોને નીચે પ્રમાણે દર્શાવીએ :

$p : xy$ એ અયુગ્મ છે.

$q : x$ અને y બંને અયુગ્મ પૂર્ણાંકો છે.

આપણે વિધાન $p \Rightarrow q$ સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવું છે. આપણે સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતે ચકાસવું છે એટલે કે $\sim q \Rightarrow \sim p$.

હવે, $\sim q : x$ અને y બંને અયુગ્મ છે તે અસત્ય છે એટલે x (અથવા y) એ યુગ્મ છે.

$\therefore$ કોઈક પૂર્ણાંક n માટે $x = 2n$

$\therefore$ કોઈક પૂર્ણાંક n માટે $xy = 2ny$ છે.

$\therefore$ xy એ યુગ્મ છે.

$\therefore$ $\sim p$ એ સત્ય છે.

આમ, આપણે બતાવ્યું કે $\sim q \Rightarrow \sim p$ અને તેથી આપેલ વિધાન સત્ય છે.

જ્યારે આપણે પ્રેરણ અને પ્રતીપ ભેગા કરીએ ત્યારે શું થાય ? હવે આપણે આ ચર્ચા કરીશું.

ચાલો આપણે નીચેનાં વિધાનોનો વિચાર કરીએ :

p : *લોટો અડધો ખાલી છે.*

q : *લોટો અડધો ભરેલો છે.*

આપણે જાણીએ છીએ કે જો પ્રથમ વિધાન સત્ય થાય ત્યારે બીજું વિધાન પણ સત્ય થાય છે અને જો બીજું વિધાન સત્ય થાય ત્યારે પ્રથમ વિધાન પણ સત્ય થાય છે. આપણે આ હકીકતને આ પ્રમાણે દર્શાવીએ.

જો લોટો અડધો ખાલી હોય તો તે અડધો ભરેલો છે.

જો લોટો અડધો ભરેલો હોય તો તે અડધો ખાલી છે.

આપણે બંને વિધાનોને ભેગા કરીને નીચે પ્રમાણે મેળવી શકીએ :

લોટો અડધો ખાલી હોય તો અને તો જ તે અડધો ભરેલો છે.

હવે આપણે બીજી રીતની ચર્ચા કરીશું.

14.6.1 અનિષ્ટાપત્તિની રીત

અહીં વિધાન p સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવા માટે આપણે ધારી લઈએ છીએ કે p સત્ય નથી. એટલે કે $\sim p$ સત્ય છે. પછી આપણે કોઈ એવા પરિણામ પર આવીએ છીએ જે આપણી ધારણાથી વિરુદ્ધ હોય. તેથી આપણે એવા નિષ્કર્ષ પર આવીએ કે છીએ વિધાન p સત્ય છે.

ઉદાહરણ 15 : અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી ચકાસો કે,

p : $\sqrt{7}$ *એ અસંમેય છે.*

ઉકેલ : આ રીતમાં આપણે ધારીશું કે આપેલ વિધાન મિથ્યા છે. એટલે કે આપણે ધારીશું કે $\sqrt{7}$ એ સંમેય છે. આનો અર્થ એમ થાય કે એવાં ધન પૂર્ણાંકો a અને b મળે જેથી $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ થાય. અત્રે a અને b ને કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી. વર્ગ લેતાં $7 = \frac{a^2}{b^2}$.

$\therefore \quad a^2 = 7b^2$

$\therefore$ 7 એ a નો અવયવ છે. માટે કોઈ પૂર્ણાંક c એવો મળે કે જેથી $a = 7c$ થાય.

માટે $a^2 = 49c^2$ અને $a^2 = 7b^2$

તેથી, $7b^2 = 49c^2$.

આમ $b^2 = 7c^2$ ડક ળટહળ્ઢ ટશ્ન ટહ્ન7 એ b નો અવયવ છે.

પરંતુ આપણે એવું બતાવ્યું કે 7 એ a નો અવયવ છે.

એનાથી સૂચિત થાય છે કે 7 એ a અને b બંનેનો અવયવ છે. આ આપણી અગાઉની ધારણા 'a અને b ને કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી.' થી વિપરીત ડ[illegible] છે. આ દર્શાવે છે કે આપણી ધારણા $\sqrt{7}$ સંમેય છે તે અસત્ય છે. તેથી વિધાન $\sqrt{7}$ અસંમેય છે તે સત્ય છે.

હવે આપણે એવી એક રીતની ચર્ચા કરીશું જેના દ્વારા આપણે બતાવી શકીએ કે વિધાન અસત્ય છે. આ રીતમાં એક એવી પરિસ્થિતિનું ઉદાહરણ આપો જ્યાં, વિધાન યથાર્થ નથી. આવા ઉદાહરણને પ્રતિઉદાહરણ કહે છે. પ્રતિઉદાહરણના નામ પરથી જ એવું સૂચન મળે છે કે તે વિધાનનો પ્રતિકાર કરે તેવું ઉદાહરણ છે.

ઉદાહરણ 16 : પ્રતિઉદાહરણ આપી દર્શાવો કે "જો પૂર્ણાંક n અયુગ્મ હોય તો તે અવિભાજ્ય છે" વિધાન અસત્ય છે.

ઉકેલ : આપેલ વિધાન "જો p તો q" પ્રકારનું છે. આપણે બતાવવું છે કે આ અસત્ય છે. આ હેતુ માટે આપણે બતાવવું પડશે p અને $\sim q$. આ બતાવવા માટે આપણે જે અવિભાજ્ય સંખ્યા ન હોય એવા અયુગ્મ પૂર્ણાંક n શોધીશું. એક એવી સંખ્યા 9 છે. આથી $n = 9$ એ પ્રતિઉદાહરણ છે. આમ, આપણે તારણ કાઢ્યું કે આપેલ વિધાન અસત્ય છે.

ઉપર આપણે વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવા માટેની અમુક રીતોની ચર્ચા કરી.

નોંધ : ગણિતમાં કોઈક વિધાનને અસત્ય સાબિત કરવા માટે પ્રતિઉદાહરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જો કે વિધાનની તરફેણમાં ઉદાહરણો રજૂ કરવાથી વિધાનની યથાર્થતા પુરવાર થતી નથી.

સ્વાધ્યાય 14.5

1. નીચેનું વિધાન સત્ય છે તેમ (i) પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ, (ii) અનિષ્ટાપત્તિની રીત અને (iii) સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતથી બતાવો :

p: જો કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^3 + 4x = 0$, તો $x = 0$

2. પ્રતિઉદાહરણની રીતે બતાવો કે નીચેનું વિધાન અસત્ય છે :

"કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a^2 = b^2$ સૂચિત કરે છે કે $a = b$"

3. સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતથી નીચેનું વિધાન સત્ય છે તેમ સાબિત કરો :

p : જો x પૂર્ણાંક હોય તથા x^2 યુગ્મ હોય તો x પણ યુગ્મ છે.

4. પ્રતિઉદાહરણની રીતથી બતાવો કે નીચેનાં વિધાન અસત્ય છે :

(i) p : જો ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાનાં માપ સમાન હોય તો તે ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે.

(ii) q : સમીકરણ $x^2 - 1 = 0$ ને 0 અને 2 ની વચ્ચે કોઈ બીજ નથી.

5. નીચેનાં પૈકી કયાં વિધાન સત્ય છે અને કયા અસત્ય છે ? દરેકના જવાબ માટે યોગ્ય કારણ આપો.

(i) p : વર્તુળની દરેક ત્રિજ્યા એ વર્તુળની જીવા છે.

(ii) q : વર્તુળનું કેન્દ્ર એ વર્તુળની દરેક જીવાને દુભાગે છે.

(iii) r : વર્તુળ એ ઉપવલયનું એક ખાસ ઉદાહરણ છે.

(iv) s : જો x અને y પૂર્ણાંકો હોય તથા $x > y$, તો $-x < -y$.

(v) t : $\sqrt{11}$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 17 : નીચેના વિધાનમાં "અથવા"નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે થયો છે તે ચકાસો. સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો લખો અને તેમનો ઉપયોગ કરીને ચકાસો કે સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે કે નહિ. તમારા જવાબને સમર્થન આપો.

t : જ્યારે વરસાદ પડે ત્યારે તમે ભીના થાવ છો અથવા તમે નદીમાં છો.

ઉકેલ : આપેલ વિધાનમાં "અથવા"નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે થયો છે. કારણ કે એવું શક્ય છે કે વરસાદ પડતો હોય ત્યારે તમે નદીમાં હો.

આપેલ વિધાનનાં ઘટક વિધાનો આ પ્રમાણે છે :

p : જ્યારે વરસાદ પડે ત્યારે તમે ભીના થાવ છો.

q : જ્યારે તમે નદીમાં હોય ત્યારે તમે ભીના થાવ છો.

અહીં બંને ઘટક વિધાનો સત્ય છે અને તેથી સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

ઉદાહરણ 18 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(i) p: દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 > x$.

(ii) q: $x^2 = 2$ હોય તેવી એક સંમેય સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(iii) r : બધાં પક્ષીઓને પાંખો હોય છે.

(iv) s : બધા વિદ્યાર્થીઓ પ્રાથમિક કક્ષાએ ગણિતનો અભ્યાસ કરે છે.

ઉકેલ : (i) વિધાન p નો નિષેધ "તે અસત્ય છે કે p". આનો અર્થ એમ થાય કે પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા માટે $x^2 > x$ શરતનું પાલન થતું નથી. આ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$\sim p$: $x^2 \le x$ હોય એવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(ii) વિધાન q નો નિષેધ "એ અસત્ય છે કે q", આમ, વિધાન $\sim q$ આ પ્રમાણે થશે.

$\sim q$: એવી કોઈ સંમેય સંખ્યા x અસ્તિત્વ ન ધરાવે કે જેથી $x^2 = 2$ થાય.

આ વિધાન આ રીતે લખી શકાય.

$\sim q$: પ્રત્યેક સંમેય સંખ્યા x માટે $x^2 \neq 2$

(iii) આપેલ વિધાનનું નિષેધ

$\sim r$: જેને પાંખો ન હોય તેવું પક્ષી અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(iv) આપેલ વિધાનનું નિષેધ

$\sim s$: જેણે પ્રાથમિક કક્ષાએ ગણિતનો અભ્યાસ ન કર્યો હોય, એવો વિદ્યાર્થી અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 19 : "આવશ્યક" અને "પર્યાપ્ત" શબ્દનો ઉપયોગ કરીને વિધાન ફરીથી લખો :

"પૂર્ણાંક n અયુગ્મ હોય તો અને તો જ n^2 અયુગ્મ છે." વિધાનની સત્યાર્થતા ચકાસો.

ઉકેલ : પૂર્ણાંક n અયુગ્મ હોય તેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત n^2 અયુગ્મ હોય તે છે. ધારો કે p તથા q નીચે પ્રમાણે વિધાનો છે :

p : પૂર્ણાંક n અયુગ્મ છે.

q : n^2 અયુગ્મ છે.

"p તો અને તો જ q" ની સત્યાર્થતા ચકાસવા માટે આપણે " જો p તો q" અને "જો q તો p" ની સત્યાર્થતા ચકાસવી પડશે.

વિકલ્પ 1 : જો p તો q

જો "p તો q" વિધાન આ પ્રમાણે છે.

'જો પૂર્ણાંક n અયુગ્મ હોય તો n^2 અયુગ્મ છે.' આપણે આ વિધાન સત્ય છે કે નહિ તે ચકાસવું પડશે. ધારો કે n અયુગ્મ છે. આથી કોઈક પૂર્ણાંક k માટે $n = 2k + 1$

$\therefore \quad n^2 = (2k + 1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$\therefore \quad n^2$ એ યુગ્મ સંખ્યા કરતા એક વધુ છે. તેથી તે અયુગ્મ છે.

વિકલ્પ 2 : જો q તો p

જો "q તો p" વિધાન આ પ્રમાણે છે.

'જો n પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તથા n^2 અયુગ્મ હોય તો n અયુગ્મ છે.'

આપણે ચકાસવું પડશે કે આ વિધાન સત્ય છે કે નહિ. આપણે તે સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતે ચકાસીશું. આપેલ વિધાનનું સમાનાર્થી પ્રેરણ આ પ્રમાણે છે.

જો n યુગ્મ પૂર્ણાંક હોય તો n^2 યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

n યુગ્મ હોય તો કોઈ પૂર્ણાંક k માટે $n = 2k$ ધારો.

$n^2 = 4k^2$.

આથી n^2 યુગ્મ છે.

ઉદાહરણ 20 : આપેલ વિધાનમાં આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરતો ઓળખો.

જો તમે 80 કિમી/કલાકથી વધુ ઝડપ સાથે વાહન હંકારશો તો તમને દંડ થશે.

ઉકેલ : ધારો કે વિધાન p અને q નીચે પ્રમાણે દર્શાવેલ છે :

p : તમે 80 કિમી/કલાકથી વધુ ઝડપ સાથે વાહન હંકારો છો.

q : તમને દંડ થશે.

પ્રેરણ "જો p તો q" એવું દર્શાવે છે કે p એ q માટે પર્યાપ્ત છે. એટલે કે દંડ થવા માટે 80 કિમી/કલાકથી વધુ ઝડપ સાથે વાહન હંકારવું પર્યાપ્ત છે. તે જ રીતે "જો p તો q" એવું પણ દર્શાવે છે કે q એ p માટે આવશ્યક છે. એટલે કે જ્યારે તમે 80 કિમી/કલાક થી વધુ ઝડપ સાથે વાહન હંકારશો ત્યારે તમને દંડ થવો જરૂરી છે. આથી આવશ્યક શરત ''દંડ થવો'' એ છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 14

1. નીચેનાં વિધાનનાં નિષેધ લખો :

(i) p : પ્રત્યેક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે સંખ્યા $x - 1$ પણ ધન થશે.

(ii) q : બધી બિલાડીઓ ચટાપટાવાળી છે.

(iii) r : પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x > 1$ અથવા $x < 1$.

(iv) s : $0 < x < 1$ થાય તેવી એક એવી સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

2. નીચેનાં દરેક વિધાનોનાં પ્રતીપ તથા સમાનાર્થી પ્રેરણ દર્શાવો :

(i) p : જો ધનપૂર્ણાંકને 1 અને તે સંખ્યા સિવાય બીજા કોઈ અવયવો ન હોય તો જ તે અવિભાજ્ય હોય.

(ii) q : સૂર્ય પ્રકાશિત દિવસ હોય તો હું દરિયાકિનારે જઇશ.

(iii) r : જો બહાર ગરમી હોય તો તમને તરસ લાગશે.

3. નીચેના દરેક વિધાનને "જો p તો q" સ્વરૂપમાં લખો :

(i) p : સર્વર પર પ્રવેશ કરવા માટે પાસવર્ડ જરૂરી છે.

(ii) q : જ્યારે પણ વરસાદ પડે ત્યારે ટ્રાફિક જામ હોય છે.

(iii) r : જો તમે વેબસાઇટમાં લવાજમ ફી ચૂકવી હોય તો જ પ્રવેશ કરી શકો.

4. નીચેના દરેક વિધાનને "જો p તો અને તો જ q" સ્વરૂપમાં ફરીથી લખો :

(i) p : તમે જ્યારે ટેલિવિઝન નિહાળો ત્યારે તમારું મન મુક્ત હોય છે અને જ્યારે તમારું મન મુક્ત હોય ત્યારે તમે ટેલિવિઝન નિહાળો છો.

(ii) q : તમારે A ગ્રેડ મેળવવા માટે તમારું બધું ગૃહકાર્ય નિયમિત કરવું પડે એ જરૂરી આયોજન છે.

(iii) r: જો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ સમાન હોય તો તે લંબચોરસ છે.

5. નીચે બે વિધાન આપેલ છે :

p : 25 એ 5 નો ગુણિત છે.

q : 25 એ 8 નો ગુણિત છે.

આ બંને વિધાનોને "અને" તથા "અથવા" વડે જોડીને સંયુક્ત વિધાન લખો. આ બંને પ્રકારનાં સંયુક્ત વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસો.

6. પ્રશ્નમાં જણાવેલ રીતની મદદથી નીચે આપેલ વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસો :

(i) p : અસંમેય સંખ્યા અને સંમેય સંખ્યાનો સરવાળો અસંમેય છે.(અનિષ્ટાપત્તિની રીત)

(ii) q : જો કોઇ વાસ્તવિક સંખ્યા n માટે $n > 3$, તો $n^2 > 9$ (અનિષ્ટાપત્તિની રીત)

7. નીચેના વિધાનને એક સમાન અર્થ ધરાવતા પાંચ ભિન્ન પ્રકારે લખો :

p : જો કોઈ ત્રિકોણના બધા ખૂણાઓ સમાન હોય તો તે ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે.

સારાંશ

◆ એવું વાક્ય જે કાં તો સત્ય હોય અથવા અસત્ય તે ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાન છે.

◆ સમજાવેલાં પદો :

વિધાન p નું નિષેધ : જો p એ એક વિધાન દર્શાવે તો p ના નિષેધને $\sim p$ વડે દર્શાવાય છે.

– સંયુક્ત વિધાનો અને તેના સંબંધી ઘટક વિધાનો.

બે અથવા વધુ સાદાં વિધાનોને જોડવાથી જે વિધાન મળે છે તે સંયુક્ત વિધાન છે. સાદાં વિધાનોને સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો કહેવામાં આવે છે.

– સંયુક્ત વિધાનમાં "અને" "અથવા" "અસ્તિત્વ ધરાવે છે" તથા "પ્રત્યેક માટે" ની ભૂમિકા

– પ્રેરણ "જો" "તો જ" "તો અને તો જ" ની સમજૂતી.

જો p તો q વાળું વાક્ય ભિન્ન પ્રકારે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે લખી શકાય :

– જો p તો q ($p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.)

– p એ q માટેની પર્યાપ્ત શરત છે.

– q એ p માટેની આવશ્યક શરત છે.

– q તો જ p

– જો $\sim q$ તો $\sim p$

– વિધાન $p \Rightarrow q$ નું સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$. વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ $q \Rightarrow p$ છે.

$p \Rightarrow q$ અને પ્રતીપને ભેગા કરવાથી p તો અને તો જ q મળે છે.

◆ વિધાનની યર્થાથતા ચકાસવા માટે નીચેની રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે :

(i) પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ

(ii) સમાનાર્થી પ્રેરણની રીત

(iii) અનિષ્ટાપત્તિની રીત

(iv) પ્રતિ ઉદાહરણની રીત

Historical Note

The first treatise on logic was written by *Aristotle* (384 B.C.-322 B.C.). It was a collection of rules for deductive reasoning which would serve as a basis for the study of every branch of knowledge. Later, in the seventeenth century, German mathematician G. W. Leibnitz (1646 – 1716) conceived the idea of using symbols in logic to mechanise the process of deductive reasoning. His idea was realised in the nineteenth century by the English mathematician *George Boole* (1815–1864) and *Augustus De Morgan* (1806–1871) , who founded the modern subject of symbolic logic.