પ્રકરણ 16

# સંભાવના

❖ *Where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of any other, as to grope for a thing in the dark, when you have a candle in your hand. – JOHN ARBUTHNOT* ❖

## 16.1 પ્રાસ્તાવિક

Kolmogorov
(1903-1987)

આપણે આગળના વર્ગોમાં વિવિધ ઘટનાઓમાં રહેલી અનિશ્ચિતતાના ગાણિતિક માપ શોધવાના સ્વરૂપે સંભાવનાના મૂળભૂત ખ્યાલનો અભ્યાસ કર્યો છે. આપણે પાસો ફેંકીને યુગ્મ સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના $\frac{3}{6}$ એટલે કે $\frac{1}{2}$ સ્વરૂપે મેળવી છે. અહીં, કુલ શક્ય પરિણામો 1,2,3,4,5 અને 6 છે અને યુગ્મ સંખ્યા મેળવવી એ ઘટનાનાં પરિણામો 2,4,6 છે (કુલ ત્રણ). વ્યાપક રીતે આ ઘટનાની સંભાવના મેળવવા માટે ઘટનામાં મળતાં પરિણામોની સંખ્યા અને સમાનપણે સંભવી શકે તેવાં કુલ પરિણામોની સંખ્યાનો ગુણોત્તર શોધવામાં આવે છે. સંભાવનાના આ અભ્યાસને સંભાવનાના પ્રશિષ્ટ અભ્યાસ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ધોરણ IX માં આપણે સંભાવના શોધવાનો જે અભ્યાસ કર્યો છે, તે નિરીક્ષણ અને એકત્રિત માહિતી પર આધારિત છે. તેને સંભાવનાનો આંકડાશાસ્ત્રીય અભિગમ કહે છે.

બંને પ્રકારનાં અભ્યાસની કેટલીક ગંભીર મુશ્કેલીઓ છે. ઉદાહરણ તરીકે, જે પ્રયોગોનાં પરિણામોની સંખ્યા અનંત હોય તેમાં આ અભ્યાસનો ઉપયોગ કરી શકાતો નથી. પ્રશિષ્ટ અભ્યાસમાં આપણે ધારીએ છીએ કે બધાં જ પરિણામો સમસંભાવી છે. યાદ

કરો કે જ્યારે આપણી પાસે એવું માનવાનું કોઈ જ કારણ નથી હોતું કે એક પરિણામની બીજા પરિણામ કરતાં વધુ શક્યતા છે ત્યારે પરિણામો સમસંભાવી કહેવાય છે. વધુ સારા શબ્દોમાં, આપણે દઢપણે માનીએ છીએ કે બધાં જ પરિણામ ઉદ્ભવવાની સમસંભાવિતતા અથવા સંભાવના સમાન છે. આમ, સંભાવનાને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે સમસંભાવી પરિણામોનો ઉપયોગ કર્યો છે. તાર્કિક રીતે આ સાચી વ્યાખ્યા નથી. આમ, સંભાવનાના અન્ય એક અભ્યાસનો વિકાસ રશિયન ગણિતશાસ્ત્રી ***A. N. Kolmogorov*** દ્વારા 1933 માં થયો. તેમણે 1933 માં પોતાનું પુસ્તક *Foundations of Probability* પ્રકાશિત કર્યું. તેમાં એમણે સંભાવનાનો અર્થ કરતી કેટલીક પૂર્વધારણાઓ આપી. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે આ અભિગમ વિશે અભ્યાસ કરીશું. તેને *સંભાવનાનો પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ* કહેવાય છે. આ અભિગમને સમજવા માટે આપણે યાદચ્છિક પ્રયોગ, નિદશોવકાશ, ઘટનાઓ વગેરે જેવી કેટલીક મૂળભૂત વ્યાખ્યાઓથી આવશ્યકપણે પરિચિત હોવું જોઈએ. ચાલો આપણે આ બધી બાબતો વિશે હવે પછીના વિભાગમાં અભ્યાસ કરીએ.

## 16.2 યાદચ્છિક પ્રયોગો

આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણે જેનાં પરિણામો ચોક્કસપણે નક્કી હોય તેવી ઘણીબધી પ્રવૃત્તિઓ કરીએ છીએ, પછી ભલેને ગમે તેટલી વાર તેનું પુનરાવર્તન કરવામાં આવે. ઉદાહરણ તરીકે આપેલ કોઈપણ ત્રિકોણના ખૂણાનાં માપ ના જાણતા હોઈએ તો પણ ચોક્કસપણે આપણે કહી શકીએ કે ત્રણે ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° છે.

જ્યારે આદર્શ પરિસ્થિતિઓમાં પુનરાવર્તન કરવામાં આવે ત્યારે જેનાં પરિણામો અસમાન આવી શકે તેવી ઘણી પ્રાયોગિક પ્રવૃત્તિઓ પણ આપણે કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યારે સિક્કો ઉછાળવામાં આવે ત્યારે છાપ આવશે કે કાંટો તે નક્કી છે, પરંતુ હકીકતમાં આ પરિણામો પૈકી કયું પરિણામ આવશે તે નિશ્ચિતપણે કહી શકાતું નથી. આવા પ્રયોગોને *યાદચ્છિક પ્રયોગો* કહે છે.

જે નીચે આપેલી બે શરતોનું પાલન કરે એવા પ્રયોગને *યાદચ્છિક પ્રયોગ* કહે છે :

(i) જેનાં એક કરતાં વધારે શક્ય પરિણામ મળે છે.

(ii) કયું ચોક્કસ પરિણામ આવશે તેનું અગાઉથી પૂર્વાનુમાન ન થઈ શકે.

પાસાઓ ફેંકવાનો પ્રયોગ યાદચ્છિક પ્રયોગ છે કે નહિ તે ચકાસો.

આ પ્રકરણમાં આપણે જ્યાં સુધી અન્ય કોઈ સૂચન ન હોય ત્યાં સુધી 'પ્રયોગ' નો સંદર્ભ યાદચ્છિક પ્રયોગ તરીકે જ કરીશું.

### 16.2.1 પરિણામો અને નિદર્શાવકાશ

યાદચ્છિક પ્રયોગના નિષ્કર્ષને તેનું *પરિણામ* (*outcome*) કહે છે.

પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. આ પ્રયોગનાં પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અથવા 6 છે, જો આપણો રસ પાસાની ઉપરથી બાજુ પરનાં ટપકાંની સંખ્યામાં હોય તો તમામ પરિણામોનો ગણ {1, 2, 3, 4, 5, 6} છે. તેને આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ કહે છે.

આમ,યાદચ્છિક પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામોના ગણને આપેલ પ્રયોગ સાથે જોડાયેલ *નિદર્શાવકાશ* (*sample space*) કહે છે, નિદર્શાવકાશને સંકેતમાં S વડે દર્શાવાય છે. નિદર્શાવકાશના પ્રત્યેક ઘટકને *નિદર્શ બિંદુ* (*sample point*) કહે છે. અન્ય શબ્દોમાં, યાદચ્છિક પ્રયોગના પ્રત્યેક પરિણામને *નિદર્શ બિંદુ* કહે છે.

ચાલો હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

**ઉદાહરણ 1 :** બે સિક્કાઓ, એક રૂપિયાનો સિક્કો અને બીજો બે રૂપિયાનો સિક્કો એકવાર ઉછાળો અને નિદર્શાવકાશ શોધો.

**ઉકેલ :** પહેલો સિક્કો અને બીજો સિક્કો એવા નામથી બે સિક્કાઓને એકબીજાથી જુદા દર્શાવી શકાય. બંને સિક્કાઓ ઉપર છાપ (H) અથવા કાંટો (T) હોઈ શકે છે, આથી શક્ય પરિણામો

બંને સિક્કાઓ ઉપર છાપ H = (H, H) = HH

પહેલા સિક્કા ઉપર છાપ H અને બીજા સિક્કા ઉપર કાંટો T = (H, T) = HT

પહેલા સિક્કા ઉપર છાપ T અને બીજા સિક્કા ઉપર કાંટો H = (T, H) = TH

બંને સિક્કા ઉપર કાંટો T = (T, T) = TT

આમ, નિદર્શાવકાશ S = {HH, HT, TH, TT}

**નોંધ :** આ પ્રયોગનાં પરિણામો H અને T ની ક્રમયુક્ત જોડ છે. સરળ અભિવ્યક્તિને ધ્યાનમાં રાખીને ક્રમિક જોડમાંથી અલ્પવિરામને દૂર કરેલ છે.

**ઉદાહરણ 2 :** બે પાસાઓ (એક વાદળી અને બીજો લાલ)ને ફેંકવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ શોધો. વળી, આ નિદર્શાવકાશના ઘટકોની સંખ્યા શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે વાદળી પાસા ઉપર 1 અને લાલ પાસા ઉપર 2 દેખાય છે. આ પરિણામને આપણે ક્રમયુક્ત જોડ (1, 2) વડે દર્શાવીશું. આ જ રીતે જો વાદળી પાસા ઉપર '3' અને લાલ પાસા ઉપર '5' દેખાય તો પરિણામને ક્રમયુક્ત જોડ (3,5) તરીકે દર્શાવાય છે.

વ્યાપક રીતે પ્રત્યેક પરિણામ $x$ એ વાદળી પાસા પરની સંખ્યા અને $y$ એ લાલ પાસા પરની સંખ્યા હોય છે તેવી ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y)$ છે. આ નિદર્શાવકાશને S = {$(x, y)$: $x$ એ વાદળી પાસા પરની સંખ્યા અને $y$ એ લાલ પાસા પરની સંખ્યા} વડે દર્શાવાય છે.

આ નિદર્શાવકાશનાં ઘટકોની સંખ્યા $6 \times 6 = 36$ છે અને નિદર્શાવકાશ નીચે મુજબ લખી શકાય :

{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

**ઉદાહરણ 3 :** નીચેના પ્રત્યેક પ્રયોગ માટે યોગ્ય નિદર્શાવકાશ દર્શાવો :

(i) એક છોકરાના ખિસ્સામાં ₹ 1 નો સિક્કો, ₹ 2 નો સિક્કો અને ₹ 5 નો સિક્કો છે. તે એક પછી એક બે સિક્કા ખિસ્સામાંથી બહાર કાઢે છે.

(ii) એક વ્યક્તિ, એક વર્ષમાં, વ્યસ્ત ધોરી માર્ગ પર થયેલા અકસ્માતોની સંખ્યાની નોંધ રાખે છે.

**ઉકેલ :** (i) ધારો કે Q એ ₹ 1 નો સિક્કો છે, H એ ₹ 2 નો સિક્કો છે અને R એ ₹ 5 નો સિક્કો છે. છોકરો પહેલો સિક્કો તેના ખિસ્સામાંથી બહાર કાઢે છે તે Q, H અથવા R માંથી ગમે તે એક છે. હવે Q ને અનુરૂપ, બીજો સિક્કો H અથવા R હોઈ શકે. તેથી આ બંને પરિસ્થિતિનાં પરિણામ QH અથવા QR મળી શકે. આ જ રીતે, H ને અનુરૂપ બીજી શક્યતા માટે Q અથવા R મળે.

તેથી પરિણામો HQ અથવા HR હોઈ શકે છે અને છેલ્લે, R ને અનુરૂપ, બીજી શક્યતામાં H અથવા Q મળે, આથી પરિણામો RH અથવા RQ મળશે.

આમ, નિદર્શાવકાશ S={QH, QR, HQ, HR, RH, RQ}

(ii) એક વર્ષમાં વ્યસ્ત ધોરીમાર્ગ પર થયેલા અકસ્માતોની સંખ્યા જાણવા માટે થયેલ નિરીક્ષણ 0 (કોઈ અકસ્માત નહી) અથવા 1 અથવા 2, અથવા કોઈક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા.

આમ, આ પ્રયોગ સાથે જોડાયેલ નિદર્શાવકાશ S= {0,1,2,...} છે.

**ઉદાહરણ 4 :** એક સિક્કો ઉછાળો. જો તે છાપ બતાવે તો આપણે થેલામાંથી એક દડો કાઢીશું. તે થેલામાં 3 વાદળી અને 4 સફેદ દડા છે. જો તે કાંટો બતાવે તો આપણે પાસો ઉછાળીશું. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ વર્ણવો.

**ઉકેલ :** આપણે વાદળી દડાઓને $B_1$, $B_2$, $B_3$ અને સફેદ દડાઓને $W_1$, $W_2$, $W_3$, $W_4$ વડે દર્શાવીએ. હવે આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

S = { $HB_1$, $HB_2$, $HB_3$, $HW_1$, $HW_2$, $HW_3$, $HW_4$, T1, T2, T3, T4, T5, T6} થશે.

અહીં, $HB_i$ નો અર્થ સિક્કા ઉપર છાપ H અને દડો $B_i$ મળેલ છે. $HW_i$ નો અર્થ સિક્કા ઉપર છાપ અને દડો $W_i$ મળેલ છે. આ જ રીતે, T*i* નો અર્થ સિક્કા ઉપર કાંટો અને પાસા ઉપર *i* મળેલ છે.

**ઉદાહરણ 5 :** પ્રથમ વખત છાપ મળે ત્યાં સુધી એક સિક્કાને ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ દર્શાવો.

**ઉકેલ :** આ પ્રયોગમાં એક સિક્કાને ઉછાળતાં શક્ય છે કે પ્રથમ વખતનું પરિણામ છાપ મળે. પરંતુ, જો પ્રથમ વખતે કાંટો મળે તો બીજી વાર સિક્કો ઉછાળવો પડે. જો બીજા પ્રયત્ને છાપ મળે તો પ્રયોગનું પરિણામ TH બને. જો બીજા પ્રયત્ને પણ T મળે તો ત્રીજી વાર પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરવું પડશે અને ત્યારે જો H મળે તો પરિણામ TTH બને. આમ, જ્યાં સુધી H મળે ત્યાં સુધી પુનરાવર્તન કરતા રહીએ તો નિદર્શાવકાશ,

S= {H, TH, TTH, TTTH, TTTTH,...}

## સ્વાધ્યાય 16.1

નીચે આપેલા પ્રશ્નો 1 થી 7 માં દર્શાવેલ પ્રયોગો માટે પ્રત્યેક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ દર્શાવો :

1. એક સિક્કાને ત્રણ વાર ઉછાળવામાં આવે છે.
2. એક પાસાને બે વાર ફેંકવામાં આવે છે.
3. એક સિક્કાને ચાર વાર ઉછાળવામાં આવે છે.
4. એક સિક્કાને ઉછાળ્યો છે અને એક પાસાને ફેંક્યો છે.
5. એક સિક્કાને ઉછાળવામાં આવ્યો છે અને સિક્કા પર છાપ મળે ત્યારે પાસાને ફેંકવામાં આવે છે.
6. ઓરડા X માં 2 છોકરા અને 2 છોકરીઓ છે તથા ઓરડા Y માં 1 છોકરો અને 3 છોકરીઓ છે. પહેલા ઓરડા પસંદ કરવામાં આવે છે અને પછી એક વ્યક્તિ પસંદ કરવામાં આવે છે તેવા પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ દર્શાવો.
7. એક કોથળામાં એક પાસો લાલ રંગનો, એક સફેદ રંગનો અને અન્ય એક પાસો ભૂરા રંગનો રાખ્યો છે. એક પાસો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કર્યો છે અને તેને ફેંકવામાં આવે છે પાસાનો રંગ અને તેની ઉપરની બાજુ પરની સંખ્યા નોંધવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ વર્ણવો.
8. એક પરીક્ષણમાં બે બાળકોવાળાં કુટુંબો પૈકી પ્રત્યેકમાં છોકરા-છોકરીઓની સંખ્યા નોંધવામાં આવે છે.

(i) જો જન્મેલ બાળક છોકરો છે કે છોકરી તે ક્રમમાં જાણવામાં આપણી રુચિ હોય તો તેનો નિદર્શાવકાશ શું થશે ?

(ii) જો આપણી રુચિ કુટુંબમાં છોકરીઓની સંખ્યા જાણવાની હોય તો નિદર્શાવકાશ શું થશે ?

**9.** એક ડબામાં 1 લાલ અને 3 સમાન સફેદ દડા રાખ્યા છે. બે દડા એક પછી એક પાછા મૂક્યા વગર ડબામાંથી યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો.

**10.** એક ઘટનામાં એક સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે છે. જો તેના પર છાપ આવે તો તે સિક્કાને ફરીથી ઉછાળવામાં આવે છે. જો પ્રથમ વખત ઉછાળવાથી તેના પર કાંટો મળે તો એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ શોધો.

**11.** ધારો કે ગોળાઓના એક ઢગલામાંથી 3 ગોળા યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. પ્રત્યેક ગોળાની ચકાસણી કરીને તેને ખરાબ (D) અથવા સારો (N) માં વર્ગીકરણ કરાય છે. આ ઘટનાનો નિદર્શાવકાશ જણાવો.

**12.** એક સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે. જો પરિણામ છાપ મળે તો પાસો ફેંકવામાં આવે છે. જો પાસા પર યુગ્મ સંખ્યા દેખાય તો પાસાને ફરીથી ફેંકવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ શું છે ?

**13.** કાગળની ચાર ચબરખી પર 1, 2, 3 અને 4 સંખ્યાઓ લખી છે. આ ચબરખીને એક ડબામાં મૂકીને સારી રીતે મિશ્ર કરી દીધી છે. એક વ્યક્તિ ડબામાંથી પાછી મૂક્યા વગર એક પછી એક બે ચબરખીઓ કાઢે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ વર્ણવો.

**14.** એક પ્રયોગમાં એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે અને જો પાસા ઉપર યુગ્મ સંખ્યા મળે તો એક સિક્કો એક વાર ઉછાળવામાં આવે છે. જો પાસા ઉપર અયુગ્મ સંખ્યા મળે તો સિક્કાને બે વાર ઉછાળે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ લખો.

**15.** એક સિક્કાને ઉછાળ્યો છે. જો તેના પર કાંટો દેખાય તો 2 લાલ અને 3 કાળા દડા સમાવતા એક ડબામાંથી એક દડો કાઢવામાં આવે છે. જો તે છાપ બતાવે તો આપણે એક પાસો ફેંકીએ છીએ. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ શોધો.

**16.** એક પાસાને વારંવાર જ્યાં સુધી તેના પર 6 ન દેખાય ત્યાં સુધી ફેંકવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ શું છે ?

## 16.3 ઘટના

આપણે યાદચ્છિક પ્રયોગ અને તે પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. કોઈ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ એ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ બધા જ પ્રશ્નો માટે સાર્વત્રિક ગણ હોય છે.

એક સિક્કાને બે વાર ઉછાળવાના પ્રયોગનો વિચાર કરો. આ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ S = {HH, HT, TH, TT} છે.

હવે ધારી લો કે આપણો રસ માત્ર એક છાપ ધરાવતાં પરિણામોમાં છે. આ ઘટના ઘટે તેને અનુકૂળ S નાં ઘટકો માત્ર HT અને TH છે તે આપણને જ્ઞાત છે. આ બે ઘટકો ગણ E = { HT, TH} રચે છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે E એ નિદર્શાવકાશ S નો ઉપગણ છે. આ જ રીતે આપણને જુદી જુદી ઘટનાઓ અને S ના ઉપગણો વચ્ચે નીચે દર્શાવેલ સંગતતા મળે છે :

| ઘટનાનું વર્ણન | 'S' નો અનુરૂપ ઉપગણ |
|---|---|
| કાંટાની સંખ્યા બે છે. | A = {TT} |
| કાંટાની સંખ્યા ઓછામાં ઓછી એક છે. | B = {HT, TH, TT} |
| છાપની સંખ્યા વધુમાં વધુ એક છે. | C = {HT, TH, TT} |
| બીજી વાર ઉછાળતાં છાપ નથી મળતી. | D = { HT, TT} |
| છાપની સંખ્યા મહત્તમ બે છે. | S = {HH, HT, TH, TT} |
| છાપની સંખ્યા બે કરતાં વધારે છે. | $\phi$ |

ઉપર્યુક્ત ચર્ચા પરથી એ વાત સ્પષ્ટ છે કે નિદર્શાવકાશના કોઈપણ ઉપગણને અનુરૂપ એક ઘટના ઉદ્ભવે છે અને કોઈપણ ઘટનાને અનુરૂપ નિદર્શાવકાશનો એક ઉપગણ હોય છે. આ સંદર્ભમાં એક ઘટનાને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

**વ્યાખ્યા :** *નિદર્શાવકાશ S ના કોઈ પણ ઉપગણ E ને ઘટના કહે છે.*

### 16.3.1 ઘટનાનો ઉદ્ભવ

એક પાસો ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરો. ધારો કે ઘટના પાસા પરની સંખ્યા ચારથી નાની હોય તેને E દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. જો પાસા પર હકીકતમાં 1 દેખાય તો આપણે કહીશું કે ઘટના E ઉદ્ભવી છે. ખરેખર તો જો પરિણામ 2 અથવા 3 હોય, તો પણ આપણે કહીશું કે ઘટના E ઉદ્ભવી છે.

આમ, જ્યારે પ્રયોગનું પરિણામ $\omega$ એ પ્રકારનું હોય કે $\omega \in E$ તો પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ S ની ઘટના E ઉદ્ભવી છે એ કહી શકાય અને જો પરિણામ $\omega$ એવું હોય કે $\omega \notin E$, તો આપણે કહીશું કે ઘટના E ઉદ્ભવી નથી.

### 16.3.2 ઘટનાઓના પ્રકાર

ઘટનાઓનું તેમના ઘટકોના આધારે જુદા જુદા પ્રકારોમાં વર્ગીકરણ કરી શકાય છે.

#### 1. અશક્ય અને ચોક્કસ ઘટનાઓ

ખાલી (રિક્ત) ગણ $\phi$ અને નિદર્શાવકાશ S પણ ઘટનાઓ દર્શાવે છે. વાસ્તવમાં $\phi$ ને *અશક્ય ઘટના (impossible event)* અને S એટલે કે પૂર્ણ નિદર્શાવકાશને *ચોક્કસ ઘટના (certain event)* કહે છે.

આ સમજવા માટે ચાલો પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ છે.

ધારો કે ઘટના E એ "પાસા પર દેખાતી સંખ્યા 7 નો ગુણિત છે." શું આપ ઘટના E ના ઉપગણ લખી શકો છો ?

સ્પષ્ટપણે આ પ્રયોગનું કોઈ પણ પરિણામ ઘટના E ની શરતને સંતોષી શકે તેમ નથી, એટલે કે નિદર્શાવકાશનો કોઈ પણ ઘટક ઘટના E ના ઉદ્ભવને નક્કી નથી કરતો. આમ, આપણે કહી શકીએ કે ખાલીગણ જ ઘટના E ને અનુરૂપ ગણ છે. બીજા શબ્દોમાં, આપણે કહી શકીએ કે પાસાની ઉપરની બાજુએ 7 નો ગુણિત દેખાય એ અશક્ય ઘટના છે.

આ રીતે ઘટના $E = \phi$ એક અશક્ય ઘટના છે.

હવે ચાલો આપણે એક અન્ય ઘટના F "પાસા ઉપર મળતી સંખ્યા યુગ્મ છે અથવા અયુગ્મ". વિશે વિચાર કરીએ. સ્પષ્ટપણે $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,\} = S$ એટલે કે બધાં જ પરિણામ ઘટના F ઉદ્ભવે તે ચોક્કસપણે દર્શાવે છે. આમ, $F = S$ એ ચોક્કસ ઘટના છે.

#### 2. પ્રાથમિક અથવા મૂળભૂત ઘટના

જો ઘટના E માં નિદર્શાવકાશનું એક જ નિદર્શ બિંદુ, ઘટક તરીકે હોય (એટલે કે E એ એકાકી હોય) તો ઘટના E ને *પ્રાથમિક* અથવા *મૂળભૂત ઘટના* કહે છે. જે પ્રયોગનાં નિદર્શાવકાશમાં $n$ ભિન્ન ઘટકો હોય, તેમાં ચોક્કસપણે $n$ મૂળભૂત ઘટનાઓ હોય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, એક સિક્કાને બેવાર ઉછાળવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

$$S=\{HH, HT, TH, TT\}$$ છે.

અહીં, આપણે નિદર્શાવકાશની ચાર પ્રાથમિક ઘટનાઓ નીચે દર્શાવેલ છે :

$E_1= \{HH\}$, $E_2=\{HT\}$, $E_3= \{ TH\}$ અને $E_4=\{TT\}$.

### 3. સંયુક્ત ઘટના

જો કોઈ ઘટનામાં એક કરતાં વધારે નિદર્શ બિંદુ હોય, તો તેને સંયુક્ત ઘટના કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે એક સિક્કાને ત્રણવાર ઉછાળવાના પ્રયોગ માટે નીચે દર્શાવેલ ઘટનાઓ સંયુક્ત ઘટનાઓ છે :

E: 'બરાબર એક છાપ દર્શાવે'

F: 'ઓછામાં ઓછી એક છાપ દર્શાવે'

G: 'વધુમાં વધુ એક છાપ દર્શાવે' વગેરે.

આ ઘટનાઓને અનુરૂપ S ના ઉપગણ નીચે દર્શાવેલ છે :

E={HTT, THT, TTH}

F={HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH}

G= {TTT, THT, HTT, TTH}

ઉપરના પ્રત્યેક ઉપગણમાં એક કરતાં વધારે નિદર્શ બિંદુ છે તેથી આ બધી સંયુક્ત ઘટનાઓ છે.

## 16.3.3 ઘટનાઓનું બીજગણિત

ગણસિદ્ધાંતના પ્રકરણમાં આપણે બે કે તેથી વધુ ગણોની યોગ, છેદ, તફાવત, ગણનો પૂરકગણ જેવી ગણક્રિયાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ જ રીતે બે કે તેથી વધુ ઘટનાઓનું સંયોજન ગણ સંકેતના સમાન ઉપયોગ દ્વારા કરી શકાય.

ધારો કે એક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ S ની ઘટનાઓ A, B, C છે.

### 1. પૂરક ઘટના

પ્રત્યેક ઘટના A ની સાપેક્ષે એક ઘટના A′ ઉદ્ભવે છે. તેને ઘટના A ની પૂરક ઘટના કહે છે. A′ ને ઘટના 'A-નહિ' પણ કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે ત્રણ સિક્કાને એકવાર ઉછાળવાનો પ્રયોગ લઈએ. ઘટનાની સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} છે. ધારો કે A={HTH, HHT, THH} એ ઘટના માત્ર એકવાર કાંટો આવે તે દર્શાવે છે. પરિણામ HTT હોય તો ઘટના A ઉદ્ભવી નથી. પરંતુ આપણે કહી શકીએ કે ઘટના 'A-નહિ' ઉદ્ભવી છે. આમ, દરેક પરિણામ કે જે A માં નથી તે દર્શાવવા માટે આપણે કહીએ છીએ કે ઘટના 'A-નહિ' ઉદ્ભવી છે. આમ, ઘટના A ની પૂરક ઘટના એટલે કે 'A-નહિ' અથવા

ઘટના $A' = \{HHH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

અથવા $A' = \{\omega : \omega \in S$ અને $\omega \notin A\} = S - A$.

**2. ઘટના 'A અથવા B' :** યાદ કરો કે બે ગણ A અને B નો યોગ સંકેતમાં $A \cup B$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. જેઓ A માં હોય અથવા

B માં હોય અથવા બંનેમાં હોય તેવા અને માત્ર તેવા જ ઘટકોથી બનતો ગણ $A \cup B$ છે.

જ્યારે ગણ A અને ગણ B કોઈ નિદર્શાવકાશ સાથે સંકળાયેલ બે ઘટનાઓ હોય ત્યારે ઘટના $A \cup B$ એ A અથવા B અથવા બંનેનું નિરૂપણ કરે છે. ઘટના $A \cup B$ ને A અથવા B પણ કહેવામાં આવે છે. તેથી,

ઘટના A અથવા B $= A \cup B = \{\omega : \omega \in A$ અથવા $\omega \in B\}$

વ્યાપક રીતે $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega_i : \omega_i$ એ ઓછામાં ઓછા એક ગણ $A_i$ માં છે.$\}$

**3. ઘટના A અને B :** આપણે જાણીએ છીએ બે ગણોનો છેદ $A \cap B$ છે. જે A અને B બંનેમાં સામાન્ય હોય એવા ઘટકોનો ગણ એટલે કે જે A અને B બંનેના સભ્યો હોય તેવા ઘટકોથી $A \cap B$ બને છે.

જો A અને B બે ઘટનાઓ હોય, તો ગણ $A \cap B$ એ ઘટના A અને B દર્શાવે છે.

આમ, $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ અને $\omega \in B\}$

વ્યાપક રીતે $\bigcap_{i ? 1}^{n} A_i = \{\omega_i : \omega_i$ એ પ્રત્યેક $i$ માટે ગણ $A_i$ માં છે.$\}$

ઉદાહરણ તરીકે એક પાસાને બે વાર ફેંકવાના પ્રયોગમાં ધારો કે ઘટના A 'પહેલી વાર પાસાને ફેંકતા સંખ્યા 6' મળે છે અને ઘટના B બે વાર પાસાને ફેંકતાં 'મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 11' મળે છે તે દર્શાવે છે.

$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$, અને

$B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

તેથી $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

નોંધ કરો કે ગણ $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$ પહેલીવાર પાસાને ફેંકતા 6 મળે છે અને બે વાર ફેંકતા મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો ન્યૂનતમ 11 થાય છે' ને વ્યક્ત કરે છે.

**4. ઘટના 'A પણ B-નહિ' :** આપણે જાણીએ છીએ કે A–B જે A માં હોય પરંતુ B માં ન હોય એવા બધા ઘટકોનો ગણ છે. એટલા માટે ગણ A–B એ ઘટના A પરંતુ B-નહિ ને વ્યક્ત કરે છે. આપણે જાણીએ છીએ કે $A - B = A \cap B'$.

**ઉદાહરણ 6 :** એક પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. એક અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક મળે તેને ઘટના A અને એક અયુગ્મ પૂર્ણાંક પ્રાપ્ત થાય તેને ઘટના B તરીકે દર્શાવવામાં આવેલ છે. આપેલ ઘટનાઓ (i) A અથવા B (ii) A અને B (iii) A પરંતુ B નહિ (iv) 'A-નહિ' મેળવો.

**ઉકેલ :** અહીં, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 5\}$ અને $B = \{1, 3, 5\}$ છે.

સ્પષ્ટપણે

(i) A અથવા $B = A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(ii) A અને B $= A \cap B = \{3, 5\}$

(iii) A પરંતુ B નહિ $= A - B = \{2\}$

(iv) A નહિ $= A' = \{1, 4, 6\}$

### 16.3.4 પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ :

પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ છે. ધારો કે ઘટના A 'એક અયુગ્મ સંખ્યા દર્શાવે છે' અને ઘટના B 'એક યુગ્મ સંખ્યા દર્શાવે છે' ને રજૂ કરે છે.

સ્પષ્ટપણે ઘટના A એ ઘટના B થી તદ્દન જુદી છે અને એથી ઊલટું પણ સત્ય છે. બીજા શબ્દોમાં, ઘટના A અને ઘટના B એકસાથે ઉદ્ભવે છે તેને સુનિશ્ચિત કરે તેવું કોઈ પણ પરિણામ ઉદ્ભવતું નથી.

અહીં, $A = \{1, 3, 5\}$ અને $B = \{2, 4, 6\}$

સ્પષ્ટ છે કે $A \cap B = \phi$, એટલે કે A અને B પરસ્પર અલગ ગણ છે.

વ્યાપક રીતે જો બેમાંથી કોઈ પણ એક ઘટનાનો ઉદ્ભવ એ બીજી ઘટનાના ઉદ્ભવને નિવારે છે, એટલે કે જે એકસાથે ઉદ્ભવી શકતી નથી, તેવી બે ઘટનાઓ A અને B ને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહે છે. આ સંજોગોમાં ગણ A અને B પરસ્પર અલગ ગણ હોય છે.

ફરીથી એક પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગમાં, ઘટના A એક અયુગ્મ સંખ્યા મળે તે અને ઘટના B 4 થી નાની સંખ્યા મળે તે લઈએ.

દેખીતું જ $A = \{1, 3, 5\}$ અને $B = \{1, 2, 3\}$

હવે, $3 \in A$ અને $3 \in B$

તેથી, A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ નથી.

**નોંધ :** નિદર્શાવકાશની પ્રાથમિક ઘટનાઓ હંમેશાં પરસ્પર નિવારક હોય છે.

### 16.3.5 નિઃશેષ ઘટનાઓ :

એક પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. આપણી પાસે $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ છે. ચાલો નીચે આપેલ ઘટનાઓને વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

A : '4 થી નાની સંખ્યા દેખાય છે',

B : '2 થી મોટી પરંતુ 5 થી નાની સંખ્યા દેખાય છે',

અને C : '4 કરતાં મોટી સંખ્યા દેખાય છે'.

ત્યારે $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$ અને $C = \{5, 6\}$. આપણે જોઈએ છીએ કે

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} = S.$$

આવી ઘટનાઓ A, B અને C ને ***નિઃશેષ ઘટનાઓ*** કહે છે. વ્યાપક રીતે, જો $E_1, E_2, ..., E_n$ એ નિદર્શાવકાશ S ની $n$ ઘટનાઓ હોય અને જો

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

તો $E_1, E_2, ...., E_n$ ને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહે છે. બીજા શબ્દોમાં, જો પ્રયોગને કરવા પર આમાંની ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ચોક્કસપણે ઉદ્ભવે છે, તો ઘટનાઓ $E_1, E_2, ..., E_n$ નિઃશેષ કહેવાય છે.

એથી વિશેષ, જો બધા $i \neq j$ માટે $E_i \cap E_j = \phi$ એટલે કે ઘટનાઓ $E_i$ અને $E_j$ પરસ્પર નિવારક હોય અને $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ હોય, તો ઘટનાઓ $E_1, E_2, ..., E_n$ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય છે.

ચાલો હવે કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

**ઉદાહરણ 7 :** બે પાસાઓ ફેંકવામાં આવે છે અને પાસાઓ પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો લખવામાં આવે છે. ચાલો હવે આપણે આ પ્રયોગ સાથે સંબંધિત નીચે આપેલ ઘટનાઓ વિશે વિચાર કરીએ :

A : 'પ્રાપ્ત સરવાળો યુગ્મ સંખ્યા છે'

B : 'પ્રાપ્ત સરવાળો 3 નો ગુણક છે'

C : 'પ્રાપ્ત સરવાળો 4 કરતાં નાનો છે'

D : 'પ્રાપ્ત સરવાળો 11 કરતાં મોટો છે'

આ ઘટનાઓમાંથી કઈ જોડની ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક છે ?

**ઉકેલ :** અહીં, નિદર્શાવકાશ $S = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ માં 36 ઘટકો છે અને ઘટનાઓ

$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6),$

$(5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ અને $D = \{(6, 6)\}$ મળે છે.

$$A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$$

તેથી, A અને B પરસ્પર નિવારક નથી.

આ જ પ્રમાણે, $A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$ અને $B \cap D \neq \phi$.

આમ, જોડ (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) ની ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક નથી.

વળી, $C \cap D = \phi$ અને તેથી C અને D એ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

**ઉદાહરણ 8 :** એક સિક્કાને ત્રણવાર ઉછાળવામાં આવે છે. નીચે આપેલ ઘટનાઓનો વિચાર કરો :

A : 'કોઈ છાપ મળતી નથી',

B : 'એક જ છાપ મળે છે' અને

C : 'ઓછામાં ઓછી બે છાપ મળે છે'.

શું આ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓનો ગણ છે ?

**ઉકેલ :** પરિણામનો નિદર્શાવકાશ

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ અને $A = \{TTT\}$, $B = \{HTT, THT, TTH\}$,

$C = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

હવે, $A \cup B \cup C = \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\} = S$

તેથી A, B અને C નિઃશેષ ઘટનાઓ છે.

વળી, $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ અને $B \cap C = \phi$

આથી, ગણ પરસ્પર અલગ છે, એટલે કે ઘટનાનો પરસ્પર નિવારક છે.

આમ A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે.

## સ્વાધ્યાય 16.2

**1.** એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે. ધારો કે ઘટના E 'પાસા પર સંખ્યા 4 દર્શાવે છે' અને ઘટના F 'પાસા પર યુગ્મ સંખ્યા દર્શાવે છે' શું E અને F પરસ્પર નિવારક છે ?

**2.** એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે. નીચે આપેલ ઘટનાઓનું વર્ણન કરો :

(i) A : સંખ્યા 7 કરતાં નાની છે. (ii) B : સંખ્યા 7 કરતાં મોટી છે.

(iii) C : સંખ્યા 3 નો ગુણક છે. (iv) D : સંખ્યા 4 કરતાં નાની છે.

(v) E : 4 થી મોટી યુગ્મ સંખ્યા છે. (vi) F : સંખ્યા 3 કરતાં નાની નથી.

તથા $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cap F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$, $F'$ શોધો.

**3.** એક પ્રયોગમાં પાસાની એક જોડને ફેંકવામાં આવે છે અને તેમના ઉપર દેખાતી સંખ્યાઓની નોંધ કરવામાં આવે છે. નીચે આપેલ ઘટનાઓનું વર્ણન કરો :

A : સંખ્યાઓનો સરવાળો 8 કરતાં વધુ છે.

B : બંને પાસાઓ ઉપર સંખ્યા 2 દેખાય છે.

C : બંને સંખ્યાઓનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 7 છે અને 3 નો ગુણિત છે.

આ ઘટનાઓની કઇ જોડની ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક છે ?

**4.** ત્રણ સિક્કાઓને એકવાર ઉછાળવામાં આવે છે. જો ત્રણ છાપ દેખાય તેને ઘટના A , બે છાપ અને એક કાંટો દેખાય તેને ઘટના B, ત્રણ કાંટા દેખાય તેને ઘટના C અને પહેલા સિક્કા ઉપર છાપ દેખાય તેને ઘટના D દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. કઈ ઘટનાઓ (i) પરસ્પર નિવારક છે ? (ii) પ્રાથમિક છે ? (iii) સંયુક્ત છે ?

**5.** ત્રણ સિક્કા એકવાર ઉછાળવામાં આવે છે. નીચેની ઘટનાઓનું વર્ણન કરો :

(i) પરસ્પર નિવારક બે ઘટનાઓ

(ii) પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ત્રણ ઘટનાઓ

(iii) પરસ્પર નિવારક ન હોય તેવી બે ઘટનાઓ

(iv) પરસ્પર નિવારક છે, પરંતુ નિઃશેષ ન હોય તેવી બે ઘટનાઓ

(v) પરસ્પર નિવારક હોય પણ નિઃશેષ ન હોય તેવી ત્રણ ઘટનાઓ

**6.** બે પાસાઓ ફેંકવામાં આવે છે. ઘટનાઓ A, B અને C નીચે આપેલ છે.

A : પહેલા પાસા ઉપર યુગ્મ સંખ્યા મળે છે.

B : પહેલા પાસા ઉપર અયુગ્મ સંખ્યા મળે છે.

C : પાસાઓ ઉપર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો 5 કે 5 થી ઓછો છે.

નીચે આપેલ ઘટનાઓ વર્ણવો :

(i) $A'$ (ii) B નહિ (iii) A અથવા B

(iv) A અને B (v) A પરંતુ C નહીં (vi) B અથવા C

(vii) B અને C (viii) $A' \cap B' \cap C'$

**7.** ઉપર્યુક્ત પ્રશ્ન 6 પરથી નીચે આપેલાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો (તમારા જવાબનું કારણ આપો) :

(i) A અને B પરસ્પર નિવારક છે.

(ii) A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ છે.

(iii) $A = B'$

(iv) A અને C પરસ્પર નિવારક છે.

(v) A અને B′ પરસ્પર નિવારક છે.

(vi) A′, B′ અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ છે.

## 16.4 સંભાવનાનો પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ

આ પ્રકરણના આગળના વિભાગોમાં આપણે યાદચ્છિક પ્રયોગ, નિદર્શાવકાશ અને આ પ્રયોગોને સંબંધિત ઘટનાઓ વિશે વિચાર કર્યો છે. આપણે આપણા રોજિંદા જીવનમાં કોઈ ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના માટે અનેક શબ્દોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. સંભાવનાનો સિદ્ધાંત કોઈ ઘટના ઉદ્ભવશે કે નહિ તેની સંભાવનાનું માપ આપવાનો પ્રયાસ છે.

આગળના વર્ગોમાં આપણે કોઈ પ્રયોગના કુલ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા જાણતા હોઈએ તો કોઈ ઘટનાની સંભાવના જાણી શકાય તેવી કેટલીક રીતો વિશે અભ્યાસ કર્યો.

કોઈ ઘટનાની સંભાવના જાણવા માટે બીજી એક રીત, પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ છે. આ અભિગમ અનુસાર સંભાવના નક્કી કરવા માટે, પૂર્વધારણાઓ અથવા નિયમો નક્કી કરવામાં આવ્યા છે.

ધારો કે કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ S છે. જેનો પ્રદેશ એ S નો ઘાતગણ અને સહપ્રદેશ [0,1] છે અને જે નીચેની પૂર્વધારણાઓનું સમાધાન કરે છે એવું વિધેય તે સંભાવના વિધેય P છે.

(i) કોઈપણ ઘટના E માટે, $P(E) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) જો E અને F પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

પૂર્વધારણા (iii) પરથી ફલિત થાય છે કે $P(\phi) = 0$. તેને સાબિત કરવા માટે $F = \phi$ લેતાં E અને $\phi$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે, તેથી પૂર્વધારણા (iii) પરથી આપણને

$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi)$ અથવા $P(E) = P(E) + P(\phi)$ એટલે કે $P(\phi) = 0$ મળે છે .

ધારો કે $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ નિદર્શાવકાશ S નાં પરિણામ છે એટલે કે $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ છે.

સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા પરથી એવું તારણ નીકળે છે કે,

(i) પ્રત્યેક $\omega_i \in S$ માટે $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$

(ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$

(iii) કોઈ પણ ઘટના A માટે, $P(A) = \sum P(\omega_i)$, $\omega_i \in A$.

**નોંધ** અત્રે એ નોંધનીય છે કે એકાકી $\{\omega_i\}$ ને પ્રાથમિક ઘટના કહે છે અને સંકેતની સુવિધાને માટે $P(\{\omega_i\})$ ના સ્થાને $P(\omega_i)$ લખાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, એક સિક્કાને ઉછાળવાના પ્રયોગના પ્રત્યેક પરિણામ H અને T ની સંભાવના $\frac{1}{2}$ નિર્ધારિત કરી શકીએ.

એટલે કે $P(H) = \frac{1}{2}$ અને $P(T) = \frac{1}{2}$ (1)

સ્પષ્ટપણે આ નિર્ધારણ બંને શરતોને સંતોષે છે, એટલે કે પ્રત્યેક સંખ્યા ન તો શૂન્યથી નાની છે અને ન તો એકથી મોટી છે અને

$$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

આમ, આ પરિસ્થિતિમાં આપણે કહી શકીએ કે H ની સંભાવના $= \frac{1}{2}$ અને T ની સંભાવના $= \frac{1}{2}$

ચાલો, આપણે $P(H) = \frac{1}{4}$ અને $P(T) = \frac{3}{4}$ લઈએ.

શું આ નિર્ધારણ પૂર્વધારણાની રીતની શરતોનું સમાધાન કરશે ?

હા, આ પરિસ્થિતિમાં H ની સંભાવના $= \frac{1}{4}$ અને અને T ની સંભાવના $= \frac{3}{4}$ છે.

સંભાવનાની બંને પૂર્વધારણાઓ (1) અને (2), H અને T ની સંભાવના માટે સ્વીકાર્ય છે.

હકીકતમાં બંને પરિણામોની સંભાવનાઓ માટે સંખ્યાઓ ક્રમશઃ $p$ અને $(1 - p)$ નક્કી કરી શકીએ, જેથી $0 \le p \le 1$ અને $P(H) + P(T) = p + (1 - p) = 1$.

આ સંભાવના-નિર્ધારણ પણ સંભાવનાના પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમનું સમાધાન કરે છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે કોઈ પ્રયોગનાં પરિણામોની સાથે સંભાવના વિતરણ અનેક (વધુ ઉચિતપણે, અનંત) રીતે કરી શકાય છે.

**ઉદાહરણ 9 :** ધારો કે એક નિદર્શાવકાશ $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ છે. નીચે દર્શાવેલમાંથી દરેક પરિણામ માટે કઈ કઈ સંભાવના નિર્ધારણ સ્વીકાર્ય છે ?

| પરિણામ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| (b) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (c) | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| (d) | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{2}$ |
| (e) | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |

**ઉકેલ :** (a) શરત (i) : પ્રત્યેક સંખ્યા $P(\omega_i)$ ધન છે અને એક કરતાં નાની છે.

શરત (ii) : સંભાવનાઓનો સરવાળો $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

તેથી, આ નિર્ધારણ માન્ય છે.

(b) શરત (i): પ્રત્યેક સંખ્યા $P(\omega_i)$ એ 0 અથવા 1 છે.

શરત (ii) સંભાવનાઓનો સરવાળો = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 તેથી આ નિર્ધારણ માન્ય છે.

(c) શરત (i) બે સંભાવનાઓ $P(\omega_5)$ અને $P(\omega_6)$ ઋણ છે. તેથી આ નિર્ધારણ માન્ય નથી.

(d) $P(\omega_6) = \frac{3}{2} > 1$ છે. તેથી આ નિર્ધારણ માન્ય નથી.

(e) સંભાવનાનો સરવાળો = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1 છે. તેથી આ નિર્ધારણ માન્ય નથી.

### 16.4.1 ઘટનાની સંભાવના

એક યંત્ર દ્વારા નિર્મિત પેન પૈકી ત્રણ પેનના પરીક્ષણમાં એમને સારી (ખામીરહિત) અને ખરાબ (ખામીયુક્ત) માં વર્ગીકરણ કરવા માટે લેવામાં આવી. ધારો કે આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ S છે. આ પ્રયોગના ફળસ્વરૂપ આપણને 0, 1, 2 કે 3 ખરાબ પેન મળી શકે છે.

આ પ્રયોગને સંગત નિદર્શાવકાશ S = {BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG},

જ્યાં, B એ ખામીયુક્ત પેન અને G એ ખામીરહિત પેન દર્શાવે છે.

ધારો કે પરિણામો માટે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંભાવના લેવામાં આવી છે :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| નિદર્શ બિંદુ : | BBB | BBG | BGB | GBB | BGG | GBG | GGB | GGG |
| સંભાવના : | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

ધારો કે ઘટના A : માત્ર એક જ ખામીયુક્ત પેન છે અને ઘટના B : ઓછામાં ઓછી બે પેન ખામીયુક્ત છે. આમ, A = {BGG, GBG, GGB} અને B = {BBG, BGB, GBB, BBB}

હવે $P(A) = \sum P(\omega_i),\ \forall \omega_i \in A$

$$= P(BGG) + P(GBG) + P(GGB) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

આપણે એક નોંધ કરીએ કે $\forall\, \omega_i$ સંકેત 'પ્રત્યેક $\omega_i$ માટે' એમ દર્શાવે છે. $\forall$ તર્કનો સંકેત છે.

અને $P(B) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$

$$= P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ચાલો એક અન્ય પ્રયોગ 'એક સિક્કાને બે વાર ઉછાળવો' વિશે વિચાર કરીએ.

આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ S = {HH, HT, TH, TT} છે.

ધારો કે જુદાં જુદાં પરિણામો માટે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંભાવના નક્કી કરવામાં આવી છે :

$$P(HH) = \frac{1}{4},\ P(HT) = \frac{1}{7},\ P(TH) = \frac{2}{7},\ P(TT) = \frac{9}{28}$$

સ્પષ્ટ છે કે આ સંભાવનાની પસંદગી તેની પૂર્વધારણાયુક્ત ધારણાની શરતોનું પાલન કરે છે. ચાલો હવે આપણે ઘટના E : 'સિક્કાને બે વાર ઉછાળતા એક સમાન પરિણામ મળે છે' ની સંભાવના જાણીએ. અહીં, E = {HH, TT}

હવે, પ્રત્યેક $w_i \in E$ માટે, $P(E) = \Sigma\, P(w_i)$

$$= P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4} + \frac{9}{28} = \frac{4}{7}$$

ઘટના F : 'ફક્ત બે છાપ હોય', તેના માટે આપણી પાસે F = {HH} અને $P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$

### 16.4.2 સમસંભાવી પરિણામોની સંભાવના :

ધારો કે એક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ છે.

ધારો કે બધાં જ પરિણામ સમસંભાવી છે, એટલે કે પ્રત્યેક મૂળભૂત ઘટનાના ઉદ્ભવની સંભાવના સમાન છે. આથી પ્રત્યેક $\omega_i \in S$ માટે, $P(\omega_i) = p$, જ્યાં $0 \le p \le 1$

હવે, $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$. તેથી $p + p + ... + p$ ($n$ વખત) $= 1$

એટલે કે $np = 1$ અથવા $p = \frac{1}{n}$

ધારો કે નિદર્શાવકાશ S ની કોઈ એક ઘટના E, એવી છે કે $n(S) = n$ અને $n(E) = m$, જો પ્રત્યેક પરિણામ સમસંભાવી હોય, તો એવું ફલિત થાય છે છે કે

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E ને અનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{કુલ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા}}$$

### 16.4.3 ઘટના 'A અથવા B' ની સંભાવના :

ચાલો આપણે ઘટના 'A અથવા B' ની સંભાવના એટલે કે $P(A \cup B)$ જાણીએ.

ધારો કે A = {HHT, HTH, THH} અને B = {HTH, THH, HHH} એ એક સિક્કાને ત્રણવાર ઉછાળવો એ પ્રયોગની બે ઘટનાઓ છે.

સ્પષ્ટ છે કે $A \cup B$ = {HHT, HTH, THH, HHH}

હવે, $P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

જો બધાં જ પરિણામો સમસંભાવી હોય તો,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$$

અને $P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$

તેથી, $P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$

અહીં, સ્પષ્ટ છે કે $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$

બિંદુઓ HTH અને THH, એ A અને B માં સામાન્ય ઘટકો છે. P(A) + P(B) ની ગણતરીમાં બિંદુઓ HTH અને THH ની

સંભાવનાઓ, એટલે કે $A \cap B$ નાં ઘટકો બે વાર સમાવ્યાં છે. આમ, $P(A \cup B)$ ની સંભાવના મેળવવા માટે આપણે $A \cap B$ માં આવેલા નિદર્શ બિંદુઓની સંભાવનાને $P(A) + P(B)$ માંથી બાદ કરીશું.

એટલે કે $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

આમ, આપણે જોયું કે $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

વ્યાપક રીતે જો, A અને B એ કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ઘટનાઓ હોય, તો ઘટનાની સંભાવનાની વ્યાખ્યાને આધારે, આપણી પાસે

$$P(A \cup B) = \sum P(\omega_i), \quad \forall \omega_i \in A \cup B.$$

વળી, $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$,

આપણી પાસે

$$P(A \cup B) = \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A - B)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B - A\right]$$

(કારણ કે $A - B$, $A \cap B$ અને $B - A$ પરસ્પર નિવારક છે.) વળી, ..(1)

$$P(A) + P(B) = \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B\right]$$

$$= \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A - B) \cup (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (B - A) \cup (A \cap B)\right]$$

$$= \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A - B)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (B - A)\right] + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in (A \cap B)\right]$$

$$= P(A \cup B) + \left[\sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B\right]$$ [$\because$ (1) પરથી]

$$= P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

આમ, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

આ સૂત્રની વૈકલ્પિક સાબિતી નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે પણ આપી શકાય છે :

$A \cup B = A \cup (B - A)$ અહીં A અને $B - A$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

અને $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ અહીં $A \cap B$ અને $B - A$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

સંભાવનાની પૂર્વધારણા (iii) દ્વારા આપણને પ્રાપ્ત થાય છે કે,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \quad ...(2)$$

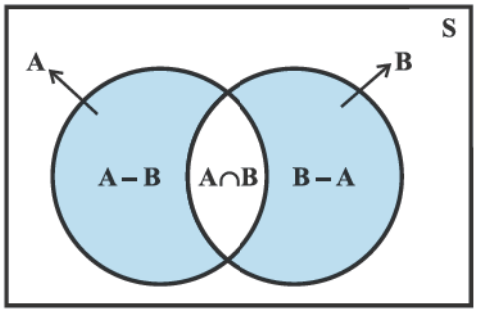
અને $$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \quad ... (3)$$

(2) માંથી (3) ને બાદ કરતાં

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

અથવા $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

આ પરિણામને વેન-આકૃતિ (આકૃતિ 16.1) નાં અવલોકન દ્વારા પણ પ્રસ્થાપિત કરી શકાય.




**આકૃતિ 16.1**

જો A અને B અલગ ગણો હોય, એટલે કે તે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય, તો $A \cap B = \phi$

તેથી, $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

આમ, પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ A અને B માટે આપણને

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ મળે છે.

આ સંભાવનાની પૂર્વધારણા (iii) છે.

નોંધ : ખરેખર આ 'સાબિતી' અસત્ય છે. પૂર્વધારણા સાબિત ન થાય. વળી તેના પરથી જ સૂત્ર

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ મળ્યું છે.

### 16.4.4 ઘટના 'A-નહિ' ની સંભાવના

1 થી 10 સુધી અંકિત પૂર્ણાંકોવાળા દસ પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું કાઢવાના પ્રયોગની ઘટના A = {2, 4, 6, 8} વિશે વિચાર કરીએ.

સ્પષ્ટ છે કે અહીં નિદર્શાવકાશ S = {1, 2, 3, ...,10} છે.

હવે જો બધાં જ પરિણામો 1, 2, ...,10 ને સમસંભાવી ધારી લઈએ તો દરેક પરિણામની સંભાવના $\frac{1}{10}$ થશે.

હવે $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

સાથે જ ઘટના 'A-નહિ' = A′ = {1, 3, 5, 7, 9, 10}

હવે $P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

આ પ્રકારે, $P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$

સાથે જ આપણને એ પણ ખબર છે કે A′ અને A પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે. એટલે કે

$A \cap A' = \phi$ અને $A \cup A' = S$

અથવા $P(A \cup A') = P(S)$

હવે, $P(A) + P(A') = 1$, પૂર્વધારણા (ii) અને (iii) ના ઉપયોગ દ્વારા

અથવા $P(A') = P(A \text{ નહિં}) = 1 - P(A)$

હવે જ્યાં સુધી અન્ય કોઈ સૂચના ન હોય ત્યાં સુધી આપણે સમસંભાવી પરિણામોવાળા પ્રયોગો માટે કેટલાંક ઉદાહરણો અને પ્રશ્નો વિશે વિચાર કરીશું.

**ઉદાહરણ 10 :** સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની એક થોકડીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે.

(i) પત્તું ચોકટનું હોય.

(ii) પત્તું એક્કો ન હોય.

(iii) પત્તું કાળા રંગનું હોય. (એટલે કે કાળીનું અથવા ફુલ્લીનું )

(iv) પત્તું ચોકટનું ન હોય.

(v) પત્તું કાળા રંગનું ન હોય.

તો ખેંચવામાં આવેલાં પત્તાંની સંભાવના શોધો.

**ઉકેલ :** જ્યારે સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની એક થોકડીમાંથી એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે ત્યારે સંભવિત પરિણામોની સંખ્યા 52 હોય છે.

(i) ધારો કે ઘટના A ખેંચવામાં આવેલું પત્તું ચોકટનું છે એ દર્શાવે છે. સ્પષ્ટ છે કે A ના ઘટકોની સંખ્યા 13 છે.

તેથી, $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

એટલે કે ચોકટનું પત્તું ખેંચવાની સંભાવના $= \frac{1}{4}$ છે.

(ii) ધારો કે ઘટના B ખેંચવામાં આવેલું પત્તું એક્કો છે.

તેથી 'ખેંચવામાં આવેલું પત્તું એક્કો ન હોય' તેને B' વડે દર્શાવાય.

હવે $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

(iii) ધારો કે 'ખેંચવામાં આવેલું પત્તું કાળા રંગનું છે' એ ઘટના C દ્વારા દર્શાવાય છે.

તેથી ઘટના C ના ઘટકોની સંખ્યા = 26 છે.

એટલે કે $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

આમ, કાળા રંગનું પત્તું ખેંચવામાં આવે તેની સંભાવના $= \frac{1}{2}$.

(iv) આપણે ઉપરના (i) માં જોયું ઘટના A, 'ખેંચવામાં આવેલ પત્તું ચોકટનું હોય' તે દર્શાવે છે. તેથી ઘટના A' અથવા 'A–નહિ' એમ દર્શાવે છે કે ખેંચવામાં આવેલું પત્તું ચોકટનું નથી.

હવે $P(A\text{–નહિ}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(v) 'ખેંચવામાં આવેલ પત્તું કાળા રંગનું ન હોય' એટલે કે ઘટના C–નહિ અથવા C' દર્શાવે છે.

હવે $P(C\text{–નહિ}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

આમ, પત્તું કાળા રંગનું ન હોય તેની સંભાવના = $\frac{1}{2}$ છે.

**ઉદાહરણ 11 :** એક થેલામાં 9 તકતી છે. તે પૈકી 4 લાલ રંગની, 3 ભૂરા રંગની અને 2 પીળા રંગની છે. પ્રત્યેક તકતી આકાર અને માપમાં સમરૂપ છે. થેલામાંથી એક તકતી યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. જો તે (i) લાલ રંગની હોય, (ii) પીળા રંગની હોય, (iii) ભૂરા રંગની હોય, (iv) ભૂરા રંગની ન હોય, (v) લાલ રંગની અથવા ભૂરા રંગની હોય તે અનુસાર કાઢવામાં આવેલ તકતીની સંભાવના શોધો.

**ઉકેલ :** તકતીની કુલ સંખ્યા 9 છે, તેથી સંભવિત પરિણામોની કુલ સંખ્યા 9 થશે. ધારો કે ઘટનાઓ A, B, C એવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવી છે કે,

A : કાઢવામાં આવેલ તકતી લાલ રંગની છે.

B : કાઢવામાં આવેલ તકતી પીળા રંગની છે.

C : કાઢવામાં આવેલ તકતી ભૂરા રંગની છે.

(i) લાલ રંગની તકતીની સંખ્યા = 4, એટલે કે $n$ (A) = 4 તેથી, $P(A) = \frac{4}{9}$

(ii) પીળા રંગની તકતીની સંખ્યા = 2, એટલે કે $n$ (B) = 2

તેથી, $P(B) = \frac{2}{9}$

(iii) ભૂરા રંગની તકતીની સંખ્યા = 3, એટલે કે $n(C) = 3$

તેથી, $P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(iv) સ્પષ્ટપણે ઘટના 'તકતી ભૂરા રંગની નથી' એ 'C–નહિ' જ છે, આપણે જાણીએ છીએ કે,

$P(C\text{–નહિ}) = 1 - P(C)$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(v) ઘટના 'લાલ રંગની તકતી અથવા ભૂરા રંગની તકતી' ને ગણ 'A ∪ C' દ્વારા દર્શાવી શકાય. હવે 'A અને C' પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે, તેથી,

$P(A \text{ અથવા } C) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$

**ઉદાહરણ 12 :** બે વિદ્યાર્થીઓ અનિલ અને આશિમા એક પરીક્ષામાં હાજર રહે છે. અનિલની પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.05 અને આશિમાની પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.10 છે. બંનેની પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.02 છે. નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો :

(a) અનિલ અને આશિમા બંને પૈકી કોઈ પણ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થઈ શકે.

(b) બંનેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થાય.

(c) બંનેમાંથી માત્ર એક પરીક્ષામાં પાસ થશે.

**ઉકેલ :** ધારો કે ઘટનાઓ E તથા F 'અનિલ પરીક્ષામાં પાસ થઈ જશે' અને 'આશિમા પરીક્ષામાં પાસ થઈ જશે.' તે ક્રમમાં દર્શાવે છે.

તેથી $P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.10$ અને $P(E \cap F) = 0.02$.

હવે (a) ઘટના 'બંનેમાંથી કોઈ પણ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થઈ શકે' ને $E' \cap F'$ વડે દર્શાવી શકાય, કારણ કે

$E'$ ઘટના 'E–નહિ' એટલે કે 'અનિલ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થાય' તથા $F'$ ઘટના 'F–નહિ', એટલે કે 'આશિમા પરીક્ષામાં પાસ નહિ થાય' તે દર્શાવે છે.

વળી, $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (દે માર્ગનનો નિયમ)

હવે, $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$\therefore P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

તેથી $P(E' \cap F') = P((E \cup F)') = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P (બંનેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ પરીક્ષામાં પાસ નહિ થાય.)

= 1 – P(બંને પાસ થશે.)

$= 1 - 0.02 = 0.98$

(c) ઘટના 'બંનેમાંથી માત્ર એક જ પાસ થશે' એ નીચે દર્શાવેલ ઘટનાને સમાન છે :

અનિલ પાસ થશે અને આશિમા પાસ નહિ થાય અથવા અનિલ પાસ નહિ થાય અને આશિમા પાસ થશે એટલે કે $E \cap F'$ અથવા $E' \cap F$. અહીં, $E \cap F'$ અને $E' \cap F$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

તેથી P (બંનેમાંથી માત્ર એક જ પાસ થશે.)

= P ($E \cap F'$ અથવા $E' \cap F$)

$= P(E \cap F') + P(E' \cap F)$

$= P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

**ઉદાહરણ 13 :** બે પુરુષો અને બે સ્ત્રીઓના સમૂહમાંથી બે વ્યક્તિઓની એક સમિતિની રચના કરવાની છે. જ્યારે સમિતિમાં (a) કોઈ પુરુષ ન હોય ? (b) એક પુરુષ હોય? (c) બંનેય પુરુષ હોય, તે ઘટનાની સંભાવના શું થશે ?

**ઉકેલ :** સમૂહમાં વ્યક્તિઓની કુલ સંખ્યા = 2 + 2 = 4. આ ચાર વ્યક્તિઓમાંથી બે વ્યક્તિઓને ${}^4C_2$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય છે.

(a) સમિતિમાં કોઈ પુરુષ ન હોવાનો અર્થ એ છે કે સમિતિમાં બે સ્ત્રીઓ છે. બે સ્ત્રીઓમાંથી બે ને પસંદ ${}^2C_2 = 1$ પ્રકારે કરી શકાય.

તેથી P (કોઈ પુરુષ નહિ.) $= \dfrac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \dfrac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 3} = \dfrac{1}{6}$

(b) સમિતિમાં એક પુરુષ હોવાનું તાત્પર્ય છે કે તેનામાં એક સ્ત્રી છે. 2 પુરુષોમાંથી 1 પુરુષની પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા ${}^2C_1$ તથા 2 સ્ત્રીઓમાંથી 1 સ્ત્રીની પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા ${}^2C_1$ છે. બંને પસંદગીઓ એક સાથે કરવાના પ્રકારની સંખ્યા ${}^2C_1 \times {}^2C_1$ છે.

તેથી P (એક પુરુષ) $= \dfrac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_2} = \dfrac{2 \times 2}{2 \times 3} = \dfrac{2}{3}$

(c) બે પુરુષોની પસંદગી $^2C_2$ પ્રકારે થઈ શકે છે.

આથી $$P\ (\text{બે પુરુષ}) = \frac{^2C_2}{^4C_2} = \frac{1}{^4C_2} = \frac{1}{6}$$

## સ્વાધ્યાય 16.3

**1.** નિદર્શાવકાશ $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ નાં પરિણામો માટે નીચે દર્શાવેલમાંથી કયું સંભાવનાં નિર્ધારણ માન્ય નથી :

| પરિણામ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ | $\omega_6$ | $\omega_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 0.1 | 0.01 | 0.05 | 0.03 | 0.01 | 0.2 | 0.6 |
| (b) | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |
| (c) | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 |
| (d) | – 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | – 0.2 | 0.1 | 0.3 |
| (e) | $\frac{1}{14}$ | $\frac{2}{14}$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{4}{14}$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{6}{14}$ | $\frac{15}{14}$ |

**2.** એક સિક્કાને બે વાર ઉછાળતાં, ઓછામાં ઓછી એક વાર કાંટો મળે તેની સંભાવના શું થશે?

**3.** એક પાસાને ફેંકવામાં આવ્યો છે. નીચે આપેલ ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(i) એક અવિભાજ્ય સંખ્યા આવે.

(ii) 3 કે 3 થી મોટી સંખ્યા આવે.

(iii) 1 કે 1 થી નાની સંખ્યા આવે.

(iv) 6 થી મોટી સંખ્યા આવે.

(v) 6 થી નાની સંખ્યા આવે.

**4.** તાસની 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે.

(a) નિદર્શાવકાશમાં કેટલાં બિંદુ છે ?

(b) પત્તું કાળીનો એક્કો હોય તેની સંભાવના શું છે?

(c) પત્તું (i) એક્કો હોય (ii) કાળા રંગનું હોય તેની સંભાવના શોધો.

**5.** એક સમતોલ સિક્કો જેની એક બાજુ પર 1 અને બીજી બાજુ પર 6 અંકિત કરેલ છે. આ સિક્કો તથા એક સમતોલ પાસો બંનેને ઉછાળવામાં આવે છે. મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો (i) 3 હોય (ii) 12 હોય, તેની સંભાવના શોધો.

**6.** શહેર પરિષદમાં ચાર પુરુષો અને છ સ્ત્રીઓ છે. જો એક સમિતિ માટે યાદચ્છિક રીતે એક પરિષદ-સભ્ય પસંદ કરવામાં આવ્યા છે, તો એક સ્ત્રી-સભ્યની પસંદ થવાની સંભાવના કેટલી?

**7.** એક સમતોલ સિક્કાને ચાર-વાર ઉછાળવામાં આવે છે અને એક વ્યક્તિ પ્રત્યેક છાપ (H) પર ₹ 1 જીતે છે અને પ્રત્યેક કાંટા (T) પર ₹ 1.50 હારે છે. આ પ્રયોગનાં નિદર્શાવકાશ પરથી શોધો કે ચાર વાર સિક્કાને ઉછાળ્યા પછી તે કેટલી રકમ પ્રાપ્ત કરી શકે છે તથા આ પ્રત્યેક રકમની સંભાવના શોધો.

**8.** ત્રણ સિક્કા એક વાર ઉછાળવામાં આવે છે. નીચે આપેલ ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) 3 છાપ મળે. (ii) 2 છાપ મળે. (iii) ઓછામાં ઓછી 2 છાપ મળે.

(iv) વધુમાં વધુ 2 છાપ મળે. (v) એક પણ છાપ નહિ. (vi) 3 કાંટા મળે.

(vii) માત્ર બે જ કાંટા મળે. (viii) એક પણ કાંટો નહિ. (ix) વધુમાં વધુ બે કાંટા મળે.

**9.** જો કોઈ ઘટના A ની સંભાવના $\frac{2}{11}$ હોય, તો ઘટના 'A–નહિ' ની સંભાવના શોધો.

**10.** શબ્દ 'ASSASSINATION' માંથી એક અક્ષર યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. (i) તે એક સ્વર હોય (ii) એક વ્યંજન હોય તો પસંદ કરેલા અક્ષરની સંભાવના શોધો.

**11.** એક લોટરીમાં એક વ્યક્તિ1 થી 20 સુધીની સંખ્યાઓમાંથી છ જુદી જુદી સંખ્યાઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે અને જો એ પસંદ કરેલી છ સંખ્યાઓ લોટરી સમિતિએ પૂર્વનિર્ધારિત કરેલ છ સંખ્યાઓ સાથે મેળ ખાતી હોય તો એ વ્યક્તિ ઇનામ જીતી જાય છે. આ લોટરીની રમતમાં ઇનામ જીતવાની સંભાવના શું છે?

[**સૂચન :** સંખ્યાઓ પ્રાપ્ત થવાનો ક્રમ મહત્ત્વપૂર્ણ નથી.]

**12.** ચકાસો કે નીચેની સંભાવનાઓ P(A) અને P(B) સુસંગત રીતે વ્યાખ્યાયિત છે.

(i) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

**13.** નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા ભરો :

| | **P(A)** | **P(B)** | **$P(A \cap B)$** | **$P(A \cup B)$** |
|---|---|---|---|---|
| (i) | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | ... |
| (ii) | 0.35 | ... | 0.25 | 0.6 |
| (iii) | 0.5 | 0.35 | ... | 0.7 |

**14.** $P(A) = \frac{3}{5}$ અને $P(B) = \frac{1}{5}$ આપેલ છે. જો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો P(A અથવા B) શોધો.

**15.** ઘટનાઓ E અને F એવા પ્રકારની છે કે $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ અને P(E અને F) $= \frac{1}{8}$, તો (i) P(E અથવા F), (ii) P( E–નહિ અને F–નહિ) શોધો.

**16.** ઘટનાઓ E અને F એવા પ્રકારની છે કે P( E–નહિ અથવા F–નહિ) = 0.25, ચકાસો કે E અને F પરસ્પર નિવારક છે કે નહિ?

**17.** ઘટનાઓ A અને B એવા પ્રકારની છે કે P(A) = 0.42, P(B) = 0.48 અને P(A અને B) = 0.16. (i) P(A–નહિ), (ii) P(B–નહિ) અને (iii) P(A અથવા B) શોધો.

**18.** એક શાળાના ધોરણ XI નાં 40 % વિદ્યાર્થી ગણિત ભણે છે અને 30 % જીવવિજ્ઞાન ભણે છે. વર્ગના 10 % વિદ્યાર્થી ગણિત અને જીવવિજ્ઞાન બંને ભણે છે. આ ધોરણનો એક વિદ્યાર્થી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે, તો આ વિદ્યાર્થી ગણિત અથવા જીવવિજ્ઞાન ભણતો હોય તેની સંભાવના શોધો.

**19.** એક પ્રવેશ કસોટીને બે પરીક્ષાના આધાર પર શ્રેણીબદ્ધ કરવામાં આવે છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા વિદ્યાર્થીની

પહેલી પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.8 છે અને બીજી પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.7 છે. બંનેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના 0.95 છે. બંને પરીક્ષામાં પાસ થવાની સંભાવના શું છે?

**20.** એક વિદ્યાર્થીની અંતિમ પરીક્ષાના અંગ્રેજી અને હિંદી બન્ને વિષયો પાસ કરવાની સંભાવના 0.5 છે અને બંનેમાંથી કોઈ પણ વિષય પાસ ન કરવાની સંભાવના 0.1 છે. જો અંગ્રેજીની પરીક્ષા પાસ કરવાની સંભાવના 0.75 હોય, તો હિંદીની પરીક્ષા પાસ કરવાની સંભાવના શું છે?

**21.** એક ધોરણના 60 વિદ્યાર્થીઓમાંથી NCC ને 30, NSS ને 32 અને બંનેને 24 વિદ્યાર્થીઓએ પસંદ કર્યા છે. જો આ બધામાંથી એક વિદ્યાર્થી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો આપેલ ઘટનાઓની સંભાવના શોધો.

(i) વિદ્યાર્થીએ NCC અથવા NSS ને પસંદ કર્યા છે.

(ii) વિદ્યાર્થીએ NCC અને NSS માંથી એક પણ પસંદ કર્યા નથી.

(iii) વિદ્યાર્થીએ NSS ને પસંદ કર્યું છે. પરંતુ NCC ને પસંદ કર્યું નથી.

## પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

**ઉદાહરણ 14 :** રજાઓમાં વીણાએ ચાર શહેરો A, B, C અને D ની યાદચ્છિક ક્રમમાં યાત્રા કરી છે. શું સંભાવના છે કે એણે

(i) A ની યાત્રા B ના પહેલાં કરી ?

(ii) A ની યાત્રા B ના પહેલાં અને B ની યાત્રા C ના પહેલાં કરી ?

(iii) A ની યાત્રા પહેલાં અને B ની છેલ્લે યાત્રા કરી ?

(iv) A ની યાત્રા સૌથી પહેલાં અથવા બીજા ક્રમે કરી ?

(v) A ની યાત્રા B ના તરત પહેલાં જ કરી ?

**ઉકેલ :** વીણા દ્વારા ચાર શહેરો A, B, C અને D ની યાત્રાના જુદા જુદા પ્રકારોની સંખ્યા 4! એટલે કે 24 છે. તેથી $n$ (S) = 24. આમ, આ પ્રયોગના નિદર્શાવકાશમાં 24 ઘટકો છે. એ બધા પરિણામ સમસંભાવી ધારી લઈએ તો આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

S = {ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC,
BDAC, BDCA, BCAD, BCDA, CABD, CADB, CBDA, CBAD,
CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA}

(i) ધારો કે ઘટના E : વીણા A ની યાત્રા B ના પહેલાં કરે છે, તે દર્શાવે છે. તેથી

E = {ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB, ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB}

આમ, આ પ્રકારે $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

(ii) ધારો કે ઘટના F : વીણા A ની યાત્રા B પહેલાં અને B ની યાત્રા C ના પહેલાં કરે છે.
તે દર્શાવે છે. અહીં F = {ABCD, DABC, ABDC, ADBC}

તેથી, $P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

વિદ્યાર્થીઓને સૂચના આપવામાં આવે છે કે (iii), (iv) અને (v) ની સંભાવના સ્વ-પ્રયત્ને શોધે.

**ઉદાહરણ 15 :** જ્યારે તાસનાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી 7 પત્તાનો એક સમૂહ બનાવવામાં આવે તો જેમાં (i) બધા બાદશાહનો સમાવેશ હોય (ii) 3 બાદશાહ હોય (iii) ઓછામાં ઓછા 3 બાદશાહ હોય એ ઘટનાની સંભાવના શોધો.

**ઉકેલ :** 7 પત્તાંના સમૂહોની કુલ શક્ય સંખ્યા = ${}^{52}C_7$

(i) 4 બાદશાહો સહિત સમૂહોની સંખ્યા = ${}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3$ (બાકીનાં 48 પત્તાંમાંથી અન્ય 3 પત્તાંની પસંદગી થશે.)

તેથી P ( સમૂહમાં 4 બાદશાહ) = $\dfrac{{}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_7} = \dfrac{1}{7735}$

(ii) 3 બાદશાહ અને 4 બાદશાહ સિવાયનાં પત્તાંવાળા સમૂહોની સંખ્યા = ${}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4$

તેથી P (સમૂહમાં 3 બાદશાહ) = $\dfrac{{}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4}{{}^{52}C_7} = \dfrac{9}{1547}$

(iii) P(ઓછામાં ઓછા 3 બાદશાહ) = P(3 બાદશાહ અથવા 4 બાદશાહ)

= P(3 બાદશાહ) + P(4 બાદશાહ)

$$= \frac{9}{1547} + \frac{1}{7735} = \frac{46}{7735}$$

**ઉદાહરણ 16 :** જો A, B, C એ કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ત્રણ ઘટનાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

**ઉકેલ :** જ્યારે $E = B \cup C$ હોય, ત્યારે

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$$

$$= P(A)+P(E)-P(A \cap E) \quad ...(1)$$

હવે, $P(E) = P(B \cup C)$

$$= P(B)+P(C)-P(B \cap C) \quad ... (2)$$

વળી, $A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [ગણોના યોગ પર છેદનો વિભાજનનો નિયમ]

આથી, $P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[A \cap B \cap C] \quad ... (3)$$

(2) અને (3) નો (1) માં ઉપયોગ કરતાં

$$P[A \cup B \cup C] = P(A)+P(B)+P(C)-P(B \cap C) - P(A \cap B)-P(A \cap C)+P(A \cap B \cap C)$$

**ઉદાહરણ 17 :** એક રિલે દોડમાં પાંચ ટુકડીઓ A, B, C, D અને E એ ભાગ લીધો છે.

(a) A, B અને C ક્રમમાં પહેલા, બીજા અને ત્રીજા સ્થાને આવે તેની સંભાવના શું છે?

(b) A, B અને C પ્રથમ ત્રણ સ્થાને (કોઈ પણ ક્રમમાં) રહે તેની સંભાવના શું છે?

(ધારી લો કે બધા જ અંતિમ ક્રમ સમસંભાવી છે.)

**ઉકેલ :** જો આપણે પ્રથમ ત્રણ સ્થાનો માટે અંતિમ સ્થિતિનાં નિદર્શાવકાશ વિશે વિચાર કરીએ તો જાણીશું કે આમાં $^5P_3$, એટલે કે $\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ નિદર્શ બિંદુ છે અને પ્રત્યેકની સંભાવના $\frac{1}{60}$ છે.

(a) A, B અને C ક્રમશઃ પહેલાં, બીજા અને ત્રીજા સ્થાન પર રહે છે. એના માટે એક જ અંતિમ ક્રમ ABC છે.

તેથી P(A, B અને C ક્રમશઃ પહેલા, બીજા અને ત્રીજા સ્થાન પર રહે છે.) $= \frac{1}{60}$

(b) A, B અને C પહેલાં ત્રણ સ્થાનો પર છે. એના માટે A, B અને C માટે 3! પ્રકાર છે. તેથી આ ઘટનાને સંગત 3! નિદર્શ બિંદુ મળશે.

તેથી, P (A, B અને C પહેલા ત્રણ સ્થાનો પર રહે.) $= \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

## પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 16

1. એક પેટીમાં 10 લાલ, 20 ભૂરી અને 30 લીલી લખોટીઓ છે. તે પેટીમાંથી 5 લખોટીઓ યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. તો

   (i) બધી લખોટીઓ ભૂરી હોય. (ii) ઓછામાં ઓછી એક લખોટી લીલી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

2. સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 4 પત્તાં ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચવામાં આવેલાં પત્તાંમાં 3 ચોકટના અને એક કાળીનું પત્તું હોય એ ઘટનાની સંભાવના કેટલી ?

3. એક પાસાની બે બાજુઓમાંથી પ્રત્યેક પર સંખ્યા '1' દર્શાવેલ છે, ત્રણ બાજુઓમાં પ્રત્યેક પર સંખ્યા '2' દર્શાવેલ છે અને એક બાજુ પર સંખ્યા'3' છે. જો આ પાસાને એકવાર ફેંકવામાં આવે તો નીચે આપેલ શોધો :

   (i) P(2) (ii) P(1 અથવા 3) (iii) P(3 નહિ)

4. એક લોટરીની દસ સમાન ઇનામવાળી 10,000 ટિકિટ વેચવામાં આવી છે. જો તમે (a) એક ટિકિટ (b) બે ટિકિટ (c) 10 ટિકિટ ખરીદો છો તો કોઈ પણ ઇનામ ન મળે તેની સંભાવના શોધો.

5. 100 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 40 અને 60 વિદ્યાર્થીઓના બે વર્ગ બનાવ્યા છે. જો તમે અને તમારો એક મિત્ર 100 વિદ્યાર્થીઓમાં છો તો

   (a) તમે બંને એક જ વર્ગમાં છો તેની સંભાવના શું છે ?

   (b) તમે બંને અલગ અલગ વર્ગોમાં છો તેની સંભાવના શું છે ?

6. ત્રણ વ્યક્તિઓને માટે ત્રણ પત્ર લખાઈ ગયા છે અને દરેક માટે સરનામું લખેલ એક પરબીડિયાં છે. પત્રોને યાદચ્છિક રીતે પરબીડિયામાં મૂક્યા છે. પ્રત્યેક પરબીડિયામાં એક જ પત્ર છે. ઓછામાં ઓછો એક પત્ર પોતાના સાચા પરબીડિયામાં મૂકાયો છે તેની સંભાવના શોધો.

7. A અને B બે ઘટનાઓ એવા પ્રકારની છે કે $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$ અને $P(A \cap B) = 0.35$

   (i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A' \cap B')$ (iii) $P(A \cap B')$ (iv) $P(B \cap A')$ શોધો.

**8.** એક સંસ્થાનાં કર્મીઓમાંથી 5 કર્મીઓને વ્યવસ્થા સમિતિ માટે પસંદ કરવામાં આવ્યા છે. આ પાંચ કર્મીઓની વિગતો નીચે દર્શાવેલ છે :

| ક્રમ | નામ | જાતિ | ઉંમર (વર્ષમાં) |
|---|---|---|---|
| 1. | હરીશ | પુ | 30 |
| 2. | રોહન | પુ | 33 |
| 3. | શીતલ | સ્ત્રી | 46 |
| 4. | એલિસ | સ્ત્રી | 28 |
| 5. | સલીમ | પુ | 41 |

આ સમૂહમાંથી પ્રવક્તાનાં પદ માટે યાદચ્છિક રીતે એક વ્યક્તિને પસંદ કરવામાં આવી છે. પ્રવક્તા પુરુષ હોય અથવા 35 વર્ષથી વધારે ઉંમરના હોય તેની સંભાવના શું થશે?

**9.** 0, 1, 3, 5 અને 7 અંકોના ઉપયોગથી (i) પુનરાવર્તન સિવાય (ii) પુનરાવર્તન સહિત ગોઠવણી કરતાં 5 વડે વિભાજ્ય હોય એવી 4 અંકોની 5000 કરતાં મોટી સંખ્યા બને તેની સંભાવના શોધો.

**10.** કોઈ પેટીના તાળામાં ચાર આંટા લાગે છે. તેનામાં પ્રત્યેક પર 0 થી 9 સુધી 10 અંક છાપેલા છે. તાળું ચાર આંકડાઓના એક વિશેષ ક્રમ (આંકડાઓના પુનરાવર્તન સિવાય) અનુસાર જ ખૂલે છે. એ વાતની શું સંભાવના છે કે કોઈ વ્યક્તિ પેટી ખોલવા માટે સાચા ક્રમની જાણ મેળવી લે?

## સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે સંભાવનાના પૂર્વધારણાયુક્ત અભિગમ વિશે અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણની મુખ્ય વિશેષતાઓ નીચે દર્શાવેલ છે :

- નિદર્શાવકાશ : તમામ શક્ય પરિણામોનો ગણ
- નિદર્શ બિંદુ : નિદર્શાવકાશનો ઘટક
- ઘટના : નિદર્શાવકાશનો એક ઉપગણ
- અશક્ય ઘટના : ખાલીગણ
- ચોક્કસ ઘટના : પૂર્ણ નિદર્શાવકાશ
- પૂરક ઘટના અથવા નહિ-ઘટના : $A'$ અથવા $S - A$
- ઘટના **A** અથવા **B** : ગણ $A \cup B$
- ઘટના **A** અને **B** : ગણ $A \cap B$
- ઘટના **A,** પરંતુ **B** નહિ : ગણ $A - B$
- પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ : જો $A \cap B = \phi$ તો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.
- નિઃશેષ અને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ : જો $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ અને $E_i \cap E_j = \phi, \forall i \neq j$ તો ઘટનાઓ $E_1, E_2, ..., E_n$ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ છે.

- સંભાવના : પ્રત્યેક નિદર્શ બિંદુ $\omega_i$ ને સંગત સંખ્યા $P(\omega_i)$ એવી મળે કે જેથી

  (i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$ (ii) બધા જ $\omega_i \in S$ માટે $\sum P(\omega_i) = 1$

  (iii) બધા જ $\omega_i \in A$, માટે $P(A) = \sum P(\omega_i)$ જ્યાં $P(\omega_i)$ એ પરિણામ $\omega_i$ની સંભાવના કહેવાય છે.

- સમસંભાવી પરિણામ : સમાન સંભાવનાવાળા બધાં પરિણામ

- ઘટનાની સંભાવના : એક સમસંભાવી પરિણામોવાળા સાન્ત નિદર્શાવકાશ માટે ઘટના A ની સંભાવના

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$, જ્યાં $n(A)$ = ગણ A ના ઘટકોની સંખ્યા અને $n(S)$ = ગણ S ના ઘટકોની સંખ્યા

- જો A અને B કોઈ બે ઘટનાઓ હોય તો

  P(A અથવા B) = P(A) + P(B) – P(A અને B)

  અથવા $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- જો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય, તો P(A અથવા B) = P(A) + P(B)

- કોઈ ઘટના A માટે

  P( A-નહિ) = 1 – P(A)

## *Historical Note*

Probability theory like many other branches of mathematics, evolved out of practical consideration. It had its origin in the 16th century when an Italian physician and mathematician Jerome Cardan (1501–1576) wrote the first book on the subject "Book on Games of Chance" (*Biber de Ludo Aleae*). It was published in 1663 after his death.

In 1654, a gambler Chevalier de Metre approached the well known French Philosopher and Mathematician Blaise Pascal (1623–1662) for certain dice problem. Pascal became interested in these problems and discussed with famous French Mathematician Pierre de Fermat (1601–1665). Both Pascal and Fermat solved the problem independently. Besides, Pascal and Fermat, outstanding contributions to probability theory were also made by Christian Huygenes (1629–1665), a Dutchman, J. Bernoulli (1654–1705), De Moivre (1667–1754), a Frenchman Pierre Laplace (1749–1827), the Russian P.L Chebyshev (1821–1897), A. A Markov (1856–1922) and A. N Kolmogorove (1903–1987). Kolmogorov is credited with the axiomatic theory of probability. His book '*Foundations of Probability*' published in 1933, introduces probability as a set function and is considered a classic.