પ્રકરણ 2

એકમ અને માપન (UNITS AND MEASUREMENT)

2.1 પ્રસ્તાવના
2.2 એકમોની આંતરરાષ્ટ્રીય પદ્ધતિ
2.3 લંબાઈનું માપન
2.4 દળનું માપન
2.5 સમયનું માપન
2.6 સાધનની ચોકસાઈ, સચોટતા અને માપનમાં ત્રુટિ
2.7 સાર્થક અંકો
2.8 ભૌતિકરાશિનાં પરિમાણો
2.9 પારિમાણિક સૂત્રો અને પારિમાણિક સમીકરણો
2.10 પારિમાણિક વિશ્લેષણ અને તેના ઉપયોગો
સારાંશ
સ્વાધ્યાય
વધારાનું સ્વાધ્યાય

2.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

કોઈ પણ ભૌતિકરાશિનાં માપન એક નિશ્ચિત, આધારભૂત, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ આંતરરાષ્ટ્રીય માન્યતા પ્રાપ્ત પ્રમાણભૂત માપ સાથેની સરખામણી કરવામાં આવે છે. ભૌતિકરાશિનાં આ પ્રમાણિત માપને **એકમ** કહે છે. ભૌતિકરાશિનાં માપનોનાં પરિણામને ચોક્કસ સંખ્યા (આંકડાકીય માપ)ની સાથે એકમ લખીને રજૂ કરવામાં આવે છે. જોકે, ભૌતિકરાશિઓની સંખ્યા ખૂબ જ વધારે છે. છતાં તેમને રજૂ કરવા માટે મર્યાદિત સંખ્યામાં એકમોની જરૂર પડે છે, કારણ કે ભૌતિકરાશિઓ એકબીજા સાથે આંતર સંબંધો ધરાવે છે. મૂળભૂત ભૌતિકરાશિ કે પાયાની ભૌતિકરાશિઓના એકમોને **મૂળભૂત એકમો** કે **પાયાના એકમો** કહે છે. આ મૂળભૂત એકમોનાં પદમાં બાકીની બધી જ ભૌતિકરાશિઓના એકમો દર્શાવી શકાય છે. આ રીતે મેળવેલ ભૌતિકરાશિઓના એકમોને **સાધિત એકમો** કહે છે. મૂળભૂત એકમો અને સાધિત એકમોના સમૂહને **એકમ પદ્ધતિ** કહે છે.

2.2 એકમોની આંતરરાષ્ટ્રીય પદ્ધતિ (THE INTERNATIONAL SYSTEM OF UNITS)

જુદા જુદા દેશોના વૈજ્ઞાનિકો વર્ષો સુધી માપન માટે જુદી જુદી એકમ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરતાં હતા. થોડાં વર્ષો પૂર્વે આવી ત્રણ એકમ પદ્ધતિઓ, CGS એકમ પદ્ધતિ, FPS (બ્રિટિશ) એકમ પદ્ધતિ અને MKS એકમ પદ્ધતિ વ્યાપકરૂપે ઉપયોગમાં લેવાતી હતી.

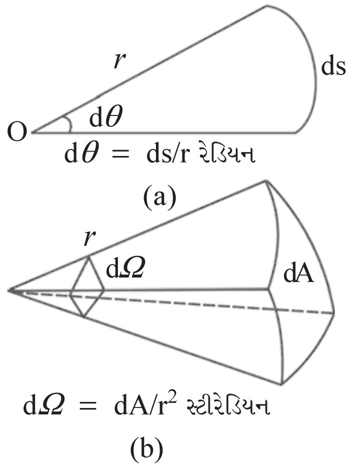
આ ત્રણેય એકમ પદ્ધતિમાં લંબાઈ, દળ અને સમયના મૂળભૂત એકમો નીચે મુજબ છે :

- CGS એકમ પદ્ધતિમાં સેન્ટિમીટર, ગ્રામ, સેકન્ડ
- FPS એકમ પદ્ધતિમાં ફૂટ, પાઉન્ડ, સેકન્ડ
- MKS એકમ પદ્ધતિમાં મીટર, કિલોગ્રામ, સેકન્ડ હતા.

હાલમાં ''સિસ્ટીમ ઈન્ટરનેશનલ'' (Systeme Internationale d' Unites) (ફ્રેન્ચ ભાષામાં આંતરરાષ્ટ્રીય એકમ પદ્ધતિ) આંતરરાષ્ટ્રીય સ્તરે સ્વીકારાયેલ એકમ પદ્ધતિ છે. આ એકમ પદ્ધતિને સંકેતમાં SI વડે દર્શાવાય છે. સંકેત અને એકમોના સંકેતાક્ષરો સાથે SI ને 1971માં તોલમાપ સંસ્થાની સામાન્ય સભામાં તૈયાર કરવામાં આવી અને તેને વૈજ્ઞાનિક, ટેક્નિકલ, ઔદ્યોગિક અને વ્યાપારક્ષેત્રે આંતરરાષ્ટ્રીય સ્તરે ઉપયોગ કરવાની ભલામણ કરી. SI એકમોમાં દશક પદ્ધતિનો ઉપયોગ થતો હોવાથી આ પદ્ધતિ અંતર્ગત એકમોનાં રૂપાંતરણો ખૂબ સરળ અને

સુવિધાભર્યાં હોય છે. આપણે આ પુસ્તકમાં SI એકમોનો જ ઉપયોગ કરીશું.

SI પદ્ધતિમાં સાત મૂળભૂત એકમોનો સમાવેશ થાય છે જેને કોષ્ટક 2.1માં દર્શાવેલ છે. આ સાત મૂળભૂત એકમો ઉપરાંત બીજા બે પૂરક એકમો આપવામાં આવ્યા. જેને નીચે જણાવેલી ભૌતિકરાશિઓ માટે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે : (a) સમતલકોણ ($d\theta$) : આકૃતિ 2.1(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ચાપની લંબાઈ (ds) અને તેની ત્રિજ્યા (r)ના ગુણોત્તરને સમતલકોણ ($d\theta$) કહે છે. (b) ઘનકોણ ($d\Omega$) : આકૃતિ 2.1(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ ગોળાના પૃષ્ઠ પરનાં ક્ષેત્રફળ (dA)એ ગોળાનાં કેન્દ્ર સાથે આંતરેલ કોણ અને તેની ત્રિજ્યા (r)ના વર્ગના ગુણોત્તરને ઘનકોણ ($d\Omega$) કહે છે. સમતલકોણનો એકમ રેડિયન અને તેનો સંકેત rad તથા ઘનકોણનો એકમ સ્ટીરેડિયન છે જેનો સંકેત sr છે. બંને ભૌતિકરાશિઓ પરિમાણરહિત છે.



આકૃતિ 2.1 (a) સમતલીય કોણ ($d\theta$)
(b) ઘનકોણ ($d\Omega$)નું ચિત્રાત્મક નિરૂપણ

કોષ્ટક 2.1 SI ભૌતિકરાશિ અને એકમો*

મૂળભૂત ભૌતિકરાશિ	SI એકમો		
	એકમનું નામ	સંજ્ઞા	વ્યાખ્યા
લંબાઈ	મીટર	m	શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશ 1/299, 792, 458 સેકન્ડમાં કાપેલા અંતરને 1 મીટર કહે છે. (1983)
દળ	કિલોગ્રામ	kg	ફ્રાંસમાં પેરિસ પાસે સેવ્રે ખાતેના International Bureau of Weights and Measuresમાં રાખેલ પ્લેટિનમ-ઈરિડિયમ મિશ્રધાતુમાંથી બનાવેલ નળાકાર નમૂનાના દળને 1 kg કહે છે. (1889)
સમય	સેકન્ડ	s	સિઝિયમ-133 પરમાણુની ધરાસ્થિતિના બે અતિસૂક્ષ્મ ઊર્જાના સ્તરો વચ્ચેની ઈલેક્ટ્રૉનની સંક્રાંતિને અનુલક્ષીને ઉત્સર્જિત વિકિરણનાં 9, 192, 631, 770 દોલનો માટેના સમયગાળાને એક સેકન્ડ કહે છે.
વિદ્યુતપ્રવાહ	ઍમ્પિયર	A	અનંત લંબાઈ ધરાવતા તેમજ અવગણ્ય આડછેદવાળા બે સુરેખ પરસ્પર સમાંતર તારને શૂન્યાવકાશમાં એકબીજાથી 1m અંતરે રાખી દરેક તારમાંથી સમાન વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર કરતાં તેમની 1m લંબાઈ દીઠ તેમની વચ્ચે પરસ્પર 2×10^{-7}N બળ લાગે, તો દરેક તારમાં વહેતા વિદ્યુતપ્રવાહનાં મૂલ્યને એક ઍમ્પિયર કહે છે. (1948)
થરમૉડાયનેમિક તાપમાન	કેલ્વિન	K	પાણીના ટ્રીપલ પૉઈન્ટના તાપમાનના 1/273.16મા ભાગને થરમૉડાયનેમિક માપક્રમ પર એક કેલ્વિન કહેવામાં આવે છે. (1967)
દ્રવ્યનો જથ્થો	મોલ	mol	0.012 kg દળ ધરાવતાં કાર્બન (C^{12})માં જેટલી સંખ્યાના પરમાણુ છે, તેટલા જ ઘટકકણ ધરાવતાં દ્રવ્યના જથ્થાને મોલ કહે છે. (1971)
જ્યોતિ તીવ્રતા (દિપ્તી તીવ્રતા)	કેન્ડેલા	cd	આપેલ દિશામાં 540×10^{12} Hz આવૃત્તિ ધરાવતા વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરતાં અને તે જ દિશામાં 1/683 W/sr જેટલી વિકિરણ તીવ્રતા ધરાવતા ઉદ્ગમની દિપ્તી તીવ્રતાને કેન્ડેલા કહે છે. (1979)

* *કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ મૂલ્યો યાદ રાખવાની કે પરીક્ષામાં પૂછવા નહિ. અહીં તેમનાં મૂલ્યો માપનની ચોકસાઈ સૂચવવા માટે જ આપવામાં આવેલ છે. ટેક્નોલૉજીના વિકાસ સાથે વધુ સચોટતા સાથેનું માપન કરવા માટે માપનની રીતમાં સુધારા થયા છે. આ પ્રગતિ સાથે તાલમેલ મેળવવા માટે મૂળભૂત એકમોની વ્યાખ્યાઓમાં સુધારા કરવામાં આવ્યા છે.*

કોષ્ટક 2.2 (SI એકમ ઉપરાંત) સામાન્ય ઉપયોગ માટેના અન્ય એકમો

નામ	સંકેત	SI એકમમાં મૂલ્ય
મિનિટ	min	60 s
કલાક	h	60 min = 3600 s
દિવસ	d	24h = 86400 s
વર્ષ	y	365.25 d = 3.156×10^7 s
ડિગ્રી	^{o}	$1^o = (\pi/180)$ rad
લિટર	L	1 dm^3 = 10^{-3} m^3
ટન	t	10^3 kg
કૅરેટ	c	200 mg
બાર	bar	0.1 MPa = 10^5Pa
ક્યુરિ	Ci	3.7×10^{10} s^{-1}
રૉન્ટજન	R	2.58×10^{-4} C/kg
ક્વિન્ટલ	q	100 kg
બાર્ન	b	100 fm^2 = 10^{-28} m^2
આરે	a	1 dam^2 = 10^2 m^2
હેક્ટર	ha	1 hm^2 = 10^4 m^2
પ્રમાણિત વાતાવરણ દબાણ	atm	101325 Pa = 1.013×10^5 Pa

મોલ એકમ સાથે કયા મૂળભૂત કણોની વાત કરીએ છીએ તે સ્પષ્ટ કરવું જોઈએ. આ કણો તરીકે પરમાણુઓ, અણુઓ, આયનો, ઇલેક્ટ્રૉન અથવા આવા મૂળભૂત કણોનો સમૂહ હોઈ શકે.

આપણે એવી જ ભૌતિકરાશિના એકમોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ જેના એકમો SIના સાત મૂળભૂત (પરિશિષ્ટ A6) એકમો દ્વારા મેળવી શકાય છે. (પરિશિષ્ટ A 6.1)માં કેટલાક સાધિત એકમો SI પદ્ધતિના સાત મૂળભૂત એકમો સ્વરૂપે દર્શાવેલ છે. કેટલાક (પરિશિષ્ટ A 6.2) સાધિત એકમોને વિશિષ્ટ નામ આપવામાં આવેલ છે અને કેટલાક સાધિત એકમો વિશિષ્ટ નામ અને SI પદ્ધતિના મૂળ સાત એકમોનાં સંયોજનથી બનાવેલ છે. (પરિશિષ્ટ A 6.3) તમારા સંદર્ભ માટે આ બધા જ એકમો પરિશિષ્ટ A 6.2 અને A 6.3માં દર્શાવેલ છે. સામાન્ય રીતે ઉપયોગમાં લેવાતા એકમો કોષ્ટક 2.2માં દર્શાવેલ છે.

SI એકમોનાં ગુણાકાર અને ભાગાકારને પૂર્વગો અને તેના એકમ સ્વરૂપે પરિશિષ્ટ A2માં દર્શાવેલ છે. ભૌતિકરાશિઓ, રાસાયણિક તત્ત્વો અને ન્યુક્લિઇડ્સની સંજ્ઞાઓ માટેનાં સામાન્ય નિર્દેશો પરિશિષ્ટ (A7)માં તથા તમારા માર્ગદર્શન અને સંદર્ભ માટે SI એકમો તથા અન્ય કેટલાક એકમો સંબંધિત નિર્દેશો પરિશિષ્ટ (A8)માં આપેલા છે.

2.3 લંબાઈનું માપન (MEASUREMENT OF LENGTH)

લંબાઈનાં માપનની કેટલીક પ્રત્યક્ષ રીતોથી તમે સૌ પરિચિત છો. ઉદાહરણ તરીકે, 10^{-3} m થી 10^2 m ના ક્રમની લંબાઈના માપન માટે મીટરપટ્ટી વાપરવામાં આવે છે. (10^{-4} mના ક્રમની લંબાઈનું ચોકસાઈપૂર્વક માપન કરવા વર્નિયર કેલિપર્સનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.) માઇક્રોમીટર સ્ક્રૂગેજ, સ્ફેરોમીટરનો ઉપયોગ 10^{-5} m જેટલી નાની લંબાઈના માપન માટે થાય છે. આ માપક્રમના વિસ્તારથી મોટા અંતરના માપન માટે કેટલીક વિશિષ્ટ પરોક્ષ રીતોનો ઉપયોગ કરવો પડે છે.

2.3.1 મોટા અંતરનું માપન (Measurement of Large Distance)

2.3.1 મોટા અંતરનું માપન (Measurement of Large Distance) : ખૂબ જ મોટા અંતરનું માપન જેમકે ગ્રહ અથવા તારાનું પૃથ્વીથી અંતર સીધેસીધું મીટરપટ્ટીથી આપણે માપી શકીએ નહિ. આવા કિસ્સાઓમાં **દૃષ્ટિસ્થાનભેદની રીત (Parallax Method)** મહત્ત્વની છે.

જ્યારે તમે એક પેન્સિલને તમારી આંખ સામે રાખી તેની પૃષ્ઠભૂમિ (ધારો કે દીવાલ) પર કોઈ એક બિંદુની સાપેક્ષે પેન્સિલને ડાબી આંખ A વડે (જમણી આંખ બંધ રાખીને) જુઓ અને ત્યાર બાદ તે જ બિંદુની સાપેક્ષે જમણી આંખ B વડે (ડાબી આંખ બંધ રાખીને) જુઓ ત્યારે તમે નોંધી શકો છો કે દીવાલ પરનાં બિંદુની સાપેક્ષે બંને કિસ્સામાં પેન્સિલનું સ્થાન બદલાય છે. આ બાબતને **દૃષ્ટિસ્થાનભેદ** કહે છે. બે અવલોકન સ્થાન (A અને B) વચ્ચેનાં અંતરને **બેઝિઝ (પાયો) (Basis)** કહે છે. આ ઉદાહરણમાં basis બે આંખો વચ્ચેનું અંતર છે.

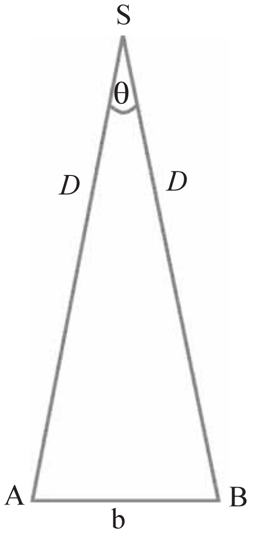
દૃષ્ટિસ્થાનભેદની રીતથી પૃથ્વીથી ઘણે દૂર આવેલ ગ્રહ Sનું અંતર D નક્કી કરવા માટે પૃથ્વી પરનાં બે જુદાં જુદાં અવલોકન સ્થાનો (વેધશાળા) A અને B પરથી એક જ સમયે ગ્રહ Sનું અવલોકન કરવામાં આવે છે (આકૃતિ 2.2). A અને B વચ્ચેનું અંતર AB = b છે. બંને સ્થાનોની અવલોકન દિશાઓએ ગ્રહ સાથે આંતરેલ ખૂણો θ માપવામાં આવે છે. આકૃતિ 2.2માં $\angle$ASBને θ વડે દર્શાવેલ છે, જેને **દૃષ્ટિસ્થાનભેદ કોણ** કહે છે.

ગ્રહ ઘણા જ દૂર હોવાથી, $\frac{b}{D} << 1$ અને તેથી ખૂણો θ ખૂબ જ નાનો હોય છે. આવી સ્થિતિમાં આપણે ABને, S કેન્દ્ર અને D ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના b લંબાઈની ચાપ તરીકે લઈ શકીએ.

∴ ત્રિજ્યા AS = BS, AB = b = Dθ

જ્યાં, θ રેડિયનમાં છે.

$$\therefore D = \frac{b}{\theta} \qquad 2.1$$



આકૃતિ 2.2 દ્ષ્ટિસ્થાનભેદની રીત

અંતર Dનું મૂલ્ય નક્કી થયા બાદ આ જ પદ્ધતિથી ગ્રહનું પરિમાણ અથવા કોણીય વ્યાસ (Angular Diameter) નક્કી કરી શકીએ. જો કોઈ ગ્રહનો વ્યાસ d અને કોણીય વ્યાસ α હોય (ગ્રહનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ વડે પૃથ્વી પરના કોઈ એક અવલોકન સ્થળે આંતરાતો ખૂણો) તો

$$\alpha = d/D \qquad 2.2$$

પૃથ્વી પરનાં તે જ અવલોકનો સ્થળેથી કોણ αનું માપન કરી શકાય છે. ગ્રહનાં વ્યાસાંત બિંદુઓનું અવલોકન ટેલિસ્કોપ વડે પૃથ્વી પરથી કરતાં મળતી બે અવલોકન-દિશા વચ્ચેનો ખૂણો એટલે કોણીય વ્યાસ α. ગ્રહ અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર D જાણીતું હોવાથી સમીકરણ 2.2 વડે વ્યાસ dનું મૂલ્ય નક્કી કરી શકાય છે.

> **ઉદાહરણ 2.1** નીચે આપેલ ખૂણાનાં મૂલ્યોને રેડિયન માપક્રમમાં શોધો : (a) 1° (ડિગ્રી) (b) $1'$ (minute of arc અથવા arcmin) (c) $1''$ (second of arc અથવા arc of second). $360^{\circ} = 2\pi$ rad, $1^{\circ} = 60'$ તથા $1' = 60''$નો ઉપયોગ કરો.

ઉકેલ (a) આપણે જાણીએ છીએ કે $360^{\circ} = 2\pi$ rad

$\therefore 1^{\circ} = (\pi/180)$ rad $= 1.745 \times 10^{-2}$ rad

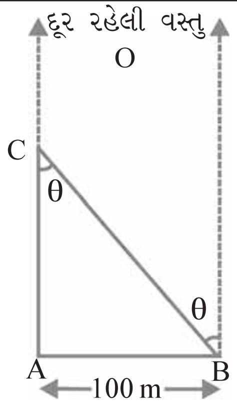
(b) $1^{\circ} = 60' = 1.745 \times 10^{-2}$ rad

$1' = 2.908 \times 10^{-4}$ rad $\cong 2.91 \times 10^{-4}$ rad

(c) $1' = 60'' = 2.908 \times 10^{-4}$ rad

$1'' = 4.847 \times 10^{-6}$ rad $\cong 4.85 \times 10^{-6}$ rad ◀

> **ઉદાહરણ 2.2** એક વ્યક્તિ તેની સામે આવેલા એક મિનારાનું અંતર પોતાનાથી કેટલું છે તે નક્કી કરવા માગે છે. આ માટે વ્યક્તિ મિનારા Cની સામે કોઈ એક બિંદુ A પાસે ઊભા રહીને ACની સીધી રેખામાં ઘણે દૂર આવેલ એક વસ્તુ Oને નિહાળે છે. ત્યાર બાદ વ્યક્તિ ACને લંબદિશામાં 100 m ચાલીને B બિંદુએ પહોંચે છે. B સ્થાનેથી વ્યક્તિ વસ્તુ O અને મિનારા Cને નિહાળે છે. વસ્તુ O ઘણી જ દૂર હોવાથી વ્યાવહારિક રીતે અવલોકન દિશા BO અને AO એકરૂપ બને છે. પરંતુ તે નોંધે છે કે Cની સીધી દૃષ્ટિરેખા, મૂળ દૃષ્ટિ રેખાથી $\theta = 40^{\circ}$ જેટલી ખસી છે. (θ = દૃષ્ટિ સ્થાનભેદ કોણ) તો વ્યક્તિનાં મૂળ સ્થાન Aથી મિનારા Cનું અંતર નક્કી કરો.



આકૃતિ 2.3

ઉકેલ અહીં, દૃષ્ટિસ્થાનભેદ કોણ $\theta = 40^{\circ}$

આકૃતિ 2.3 પરથી સ્પષ્ટ છે કે, AB = AC tan θ

$\therefore$ AC = AB / tanθ = 100 m / tan 40°

= 100 m / 0.8391 = 119 m ◀

> **ઉદાહરણ 2.3** પૃથ્વીનાં બે વ્યાસાંત બિંદુઓ A અને Bથી એક સાથે ચંદ્રનું અવલોકન કરતાં બંને અવલોકન દિશાઓ A ચંદ્ર પાસે $\theta = 1^{\circ}54'$ જેટલો ખૂણો આંતરે છે. જો પૃથ્વીનો વ્યાસ 1.276×10^{7} m હોય, તો ચંદ્ર અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ અહીં, $\theta = 1^{\circ}54' = 114'$

$= (114 \times 60)'' \times (4.85 \times 10^{-6})$ rad

$= 3.32 \times 10^{-2}$ rad $\quad (1'' = 4.85 \times 10^{-6}$rad)

હવે, b = AB = 1.276×10^{7} m

ચંદ્ર અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર સમીકરણ (2.1) મુજબ,

$$D = b/\theta = \frac{1.276 \times 10^{7}}{3.32 \times 10^{-2}} = 3.84 \times 10^{8} \text{ m}$$ ◀

> **ઉદાહરણ 2.4** સૂર્યનો કોણીય વ્યાસનું માપ $1920''$ છે. સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર $D = 1.496 \times 10^{11}$ m છે તો સૂર્યનો વ્યાસ કેટલો થાય ?

ઉકેલ સૂર્યનો કોણીય વ્યાસ α

$= 1920''$

$= 1920 \times 4.85 \times 10^{-6}$ rad

$= 9.31 \times 10^{-3}$rad

∴ સૂર્યનો વ્યાસ

$d = \alpha D$

$= (9.31 \times 10^{-3}) \times (1.496 \times 10^{11})$ m

$= 1.39 \times 10^{9}$ m ◀

2.3.2 ખૂબ જ સૂક્ષ્મ અંતરોનો અંદાજ મેળવવો : અણુના પરિમાણ (Estimation of Very Small Distance : Size of Molecule)

ખૂબ જ સૂક્ષ્મ અંતરો, જેમકે અણુનું પરિમાણ (10^{-8} m થી 10^{-10} m)ના માપન માટે આપણે સ્ક્રૂગેજ કે તેના જેવા માપનના બીજા સાધનનો ઉપયોગ કરી શકીએ નહિ. માઇક્રોસ્કૉપની પણ કેટલીક મર્યાદાઓ છે. જેની તપાસ કરવી છે તે તંત્રને જોવા માટે ઑપ્ટિકલ માઇક્રોસ્કૉપ એ દશ્યપ્રકાશનો ઉપયોગ કરે છે. પ્રકાશ તરંગ પ્રકૃતિ ધરાવતો હોવાને કારણે ઉપયોગમાં લીધેલ પ્રકાશની તરંગલંબાઈ જેટલા જ વિભેદન માટે જ ઑપ્ટિકલ માઇક્રોસ્કૉપને વાપરી શકાય. (આ બાબતમાં વિસ્તૃત સમજૂતી તમે ધોરણ 12 ભૌતિકવિજ્ઞાનના પાઠ્યપુસ્તકમાં મેળવશો.) દશ્યપ્રકાશની તરંગલંબાઈ 4000 Å થી 7000 Å (1 ઍંગસ્ટ્રોમ = 1 Å = 1 × 10^{10} m)ના ક્રમની હોય છે. પરિણામે ઑપ્ટિકલ માઇક્રોસ્કૉપ વડે આ ક્રમથી નાના પરિમાણવાળા કણોનું વિભેદન કરી શકાતું નથી. ત્યાર બાદ વિકસાવવામાં આવેલ ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપમાં દશ્યપ્રકાશને બદલે ઇલેક્ટ્રૉન બીમનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ઇલેક્ટ્રૉન બીમને યોગ્ય રીતે ડિઝાઇન કરેલ વિદ્યુત અને ચુંબકીયક્ષેત્રો દ્વારા કેન્દ્રિત કરવામાં આવે છે. આવા ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપની વિભેદનશક્તિ પણ સીમિત હોય છે કારણ કે, ઇલેક્ટ્રૉન પણ તરંગપ્રકૃતિ ધરાવે છે. (તમે ધોરણ 12માં આ બાબતનો વધુ અભ્યાસ કરશો.) ઇલેક્ટ્રૉનની તરંગલંબાઈ એક ઍન્ગસ્ટ્રોમ (1 Å) કરતાં પણ નાની હોય છે. 0.6 Å વિભેદન ધરાવતાં ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપ બનાવવામાં આવ્યા છે. હાલમાં વિકસાવવામાં આવેલ ટનલિંગ માઇક્રોસ્કૉપની પણ વિભેદન મર્યાદા 1 Å કરતાં સારી છે. તેની મદદથી અણુઓનાં પરિમાણનો અંદાજ મેળવવો શક્ય બન્યો છે.

ઓલિક ઍસિડના અણુના પરિમાણનો અંદાજ મેળવવાની એક સરળ રીત નીચે આપેલ છે. ઑલિક ઍસિડ સાબુ જેવું એક પ્રવાહી છે. જેના અણુનું પરિમાણ 10^{-9} mના ક્રમ જેટલું મોટું છે.

આ પ્રયુક્તિનો મુખ્ય હેતુ પાણીની સપાટી પર ઑલિક ઍસિડનું એક આણ્વીય સ્તર (Mono-Molecular Layer) બનાવવાનો છે.

આ માટે આપણે 1 cm^3 ઓલિક ઍસિડને આલ્કોહૉલમાં મિશ્ર કરી 20 cm^3નું દ્રાવણ બનાવીશું. તૈયાર થયેલ આ દ્રાવણમાંથી આપણે 1 cm^3 દ્રાવણ લઈ ફરીથી આલ્કોહૉલમાં 20 cm^3 દ્રાવણ તૈયાર કરીશું. આ દ્રાવણની સાંદ્રતા, ઓલિક ઍસિડના પ્રતિ cm^3 દીઠ $\left(\frac{1}{20 \times 20}\right) cm^3$ થશે.

ત્યાર બાદ મોટા પહોળા પાત્રમાં પાણી ભરી તેના પર લાયકોપોડિયમ (Lycopodium) પાવડરનો હલકો છંટકાવ કરી પાણીની સપાટી પર તેનું સ્તર બનાવવામાં આવે છે. હવે તૈયાર કરેલ ઓલિક ઍસિડનાં દ્રાવણનાં એક બુંદને સપાટી પર મૂકવામાં આવે છે ત્યારે આ બુંદ સપાટી પર પાતળું, મોટું અને લગભગ વર્તુળાકારે પ્રસરીને એક અણુની જાડાઈનું સ્તર બનાવે છે. આ રીતે તૈયાર થયેલ ઓલિક ઍસિડના પાતળા સ્તરનું ક્ષેત્રફળ A નક્કી કરવા માટે તેના વ્યાસ તરત જ માપવામાં આવે છે.

ધારો કે પાણીની સપાટી પર ઓલિક ઍસિડનાં n બુંદ નાખ્યાં. પ્રારંભમાં દરેક બુંદનું અંદાજિત કદ (V cm^3) શોધીએ છીએ.

દ્રાવણમાં n બુંદનું કદ $= nV$ cm^3

દ્રાવણમાં ઓલિક ઍસિડનું કદ $= nV\left(\frac{1}{20 \times 20}\right) cm^3$

ઓલિક ઍસિડનું દ્રાવણ પાણીની સપાટી પર ખૂબ જ ઝડપથી પ્રસરણ પામી t જાડાઈનું પાતળું સ્તર બનાવતું હોય અને તે સ્તરનું ક્ષેત્રફળ A cm^2 હોય તો,

$$t = \frac{\text{પાતળા સ્તરનું કદ}}{\text{સ્તરનું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$\therefore\ t = \frac{nV}{20 \times 20A} \text{ cm}$$

જો આપણે સ્વીકારીએ કે તૈયાર થયેલ સ્તર એક આણ્વીય સ્તર છે, તો સ્તરની જાડાઈ (t) ઓલિક ઍસિડના અણુનું પરિમાણ સૂચવે છે. અહીં મળતી જાડાઈનું મૂલ્ય 10^{-9} mના ક્રમનું હોય છે.

▶ *ઉદાહરણ 2.5* જો ન્યુક્લિયસનું પરિમાણ (જે 10^{-15} m થી 10^{-14} mના વિસ્તારનું છે.) વધારીને એક તીક્ષ્ણપિનની અણી (tip)ના જેટલી કરવામાં આવે, તો પરમાણુનું અંદાજિત પરિમાણ શું હોઈ શકે ? (પિનની અણીનો વિસ્તાર 10^{-5} m થી 10^{-4} m ક્રમનો ધારો.)

ઉકેલ ન્યુક્લિયસના માપક્રમનો વિસ્તાર 10^{-15} m થી 10^{-14} mના ક્રમનો છે. પિનની અણી (tip)ના માપક્રમનો વિસ્તાર 10^{-5} m થી 10^{-4} m જેટલો છે. એટલે કે માપક્રમ 10^{10} ગણો કરવો પડે. લગભગ 10^{-10} mના પરિમાણવાળા પરમાણુનું પરિમાણ વધારીને 1 mના ક્રમનું કરવાનું છે. આમ, પરમાણુમાં રહેલા ન્યુક્લિયસની સાઇઝ 1 m ત્રિજ્યાવાળા ગોળાના કેન્દ્ર પર રહેલ પિનની અણી (tip) જેટલી નાની હશે. ◀

2.3.3 લંબાઈનો વિસ્તાર (Range of Lengths)

આપણે વિશ્વમાં નિહાળી શકતાં પદાર્થોનાં પરિમાણ ખૂબ જ વિશાળ વિસ્તારમાં ફેલાયેલા છે. આ પરિમાણોમાં પરમાણુનાં ન્યુક્લિયસનાં 10^{-14} m જેટલાં સૂક્ષ્મ પરિમાણથી લઈને અવલોકિત વિશ્વના 10^{26} m જેટલા વિશાળ માપક્રમનો સમાવેશ થાય છે.

ખૂબ જ સૂક્ષ્મ અંતર અને ખૂબ જ મોટા અંતર માટેના કેટલાક વિશિષ્ટ એકમોનો ઉપયોગ આપણે કરીશું જે નીચે મુજબ છે :

1 ફર્મી = 1 fm = 10^{-15} m

1 ઍંગસ્ટ્રોમ = 1 Å = 10^{-10} m

1 એસ્ટ્રોનોમિકલ યુનિટ = 1 AU (સૂર્ય અને પૃથ્વીની વચ્ચેના સરેરાશ અંતરને 1 AU કહે છે.) = 1.496×10^{11} m

1 પ્રકાશવર્ષ = 1 ly = 9.46×10^{15} m (પ્રકાશે 1 વર્ષમાં 3×10^8 m s^{-1} જેટલી ઝડપથી કાપેલ અંતર)

1 પાર્સેક = 3.08×10^{16} m (જે અંતરે પૃથ્વીની ભ્રમણકક્ષાની સરેરાશ ત્રિજ્યા વડે 1″ (Arc second) જેટલો ખૂણો અંતરાય છે તે અંતરને 1 પાર્સેક કહે છે.)

2.4 દળનું માપન (MEASUREMENT OF MASS)

દ્રવ્યમાન પદાર્થનો મૂળભૂત ગુણધર્મ છે. તે પદાર્થની અવકાશમાં સ્થિતિ, દબાણ કે તાપમાન પર આધારિત નથી. દ્રવ્યમાનનો SI એકમ કિલોગ્રામ (kg) છે. આંતરરાષ્ટ્રીય તોલમાપ સંસ્થા (BIPM) દ્વારા આપવામાં આવેલ કિલોગ્રામની આંતરરાષ્ટ્રીય પ્રતિકૃતિ દુનિયાના જુદા જુદા દેશોની પ્રયોગશાળામાં ઉપલબ્ધ છે. ભારતમાં તેને નવી દિલ્હી ખાતે રાષ્ટ્રીય ભૌતિકવિજ્ઞાન પ્રયોગશાળા (NPL)માં રાખવામાં આવેલ છે.

પરમાણુઓ અને અણુઓનાં દ્રવ્યમાન માટે કિલોગ્રામ એકમ સુવિધાભર્યો ન હોવાથી અણુઓ અને પરમાણુઓનાં દ્રવ્યમાન માટે એક મહત્ત્વનો એકમ નક્કી કરવામાં આવ્યો છે. જેને **યુનિફાઈડ ઍટોમિક માસ યુનિટ (u) (Unified Atomic Mass Unit)** કહે છે. જેની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે.

1 યુનિફાઇડ ઍટોમિક માસ = ઈલેક્ટ્રૉન સહિત કાર્બન સમસ્થાનિક $\left({}^{12}_{6}C\right)$ના એક પરમાણુનો $\frac{1}{12}$મો ભાગ

$= 1.66 \times 10^{-27}$kg

સામાન્ય વસ્તુનાં દ્રવ્યમાનનું માપન પ્રોવિઝન સ્ટોર્સમાં જોવા મળતી સામાન્ય તુલા વડે કરી શકાય છે. વિશ્વમાં જોવા મળતાં વિશાળ પદાર્થો, ગ્રહો, તારા વગેરેનું દ્રવ્યમાન ન્યૂટનનાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળના નિયમ (જુઓ પ્રકરણ 8) વડે નક્કી કરી શકાય છે. પરમાણુઓ/પરમાણુનાં ઘટક કણો જેવા સૂક્ષ્મ કણોનું દ્રવ્યમાન માસ સ્પેક્ટ્રોગ્રાફ વડે નક્કી કરવામાં આવે છે. જેમાં સમાન વિદ્યુત અને ચુંબકીય ક્ષેત્રમાં વીજભારિત કણના ગતિમાર્ગની ત્રિજ્યા તેના દળને સપ્રમાણ હોય છે.

2.4.1 દળના માપક્રમનો વિસ્તાર (Range of Masses)

આપણને વિશ્વમાં જોવા મળતા પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાન જુદા જુદા અને વિશાળ માપક્રમની શ્રેણીમાં હોય છે. માપક્રમની આ શ્રેણીમાં ઈલેક્ટ્રૉનના 10^{-30} kg જેટલા સૂક્ષ્મ દળથી લઈને અવલોકિત વિશ્વનાં 10^{55} kg જેટલાં મોટા દળનો સમાવેશ થાય છે. કોષ્ટક 2.4માં વિશિષ્ટ દળ ધરાવતા કેટલાક પદાર્થોના વિસ્તાર અને તેનો માપક્રમ દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 2.3 લંબાઈનો વિસ્તાર અને માપક્રમ

વસ્તુનું પરિમાણ અથવા અંતર	લંબાઈ (m)
પ્રોટોનનું પરિમાણ (Size)	10^{-15}
પરમાણુમાં ન્યુક્લિયસનું પરિમાણ (Size)	10^{-14}
હાઈડ્રોજન અણુનું પરિમાણ (Size)	10^{-10}
વિશિષ્ટ વિષાણુ (Virus)ની લંબાઈ	10^{-8}
પ્રકાશની તરંગલંબાઈ	10^{-7}
લાલ રક્તકણોનું પરિમાણ (Size)	10^{-5}
કાગળની જાડાઈ	10^{-4}
દરિયાની સપાટીથી માઉન્ટ એવરેસ્ટની ઊંચાઈ	10^{4}
પૃથ્વીની ત્રિજ્યા	10^{7}
પૃથ્વીથી ચંદ્રનું અંતર	10^{8}
પૃથ્વીથી સૂર્યનું અંતર	10^{11}
સૂર્યથી પ્લૂટોનું અંતર	10^{13}
આપણી આકાશગંગાનું પરિમાણ (Size)	10^{21}
પૃથ્વીથી એન્ડ્રોમેડા આકાશગંગાનું અંતર	10^{22}
અવલોકીય વિશ્વની પરિસીમા સુધીનું અંતર	10^{26}

કોષ્ટક 2.4 દળનો વિસ્તાર અને માપક્રમ

વસ્તુ	દળ (kg)
ઇલેક્ટ્રૉન	10^{-30}
પ્રોટોન	10^{-27}
યુરેનિયમ પરમાણુ	10^{-25}
લાલ રુધિર કણ	10^{-13}
ધૂળનો કણ	10^{-9}
વરસાદનું બુંદ	10^{-6}
મચ્છર	10^{-5}
દ્રાક્ષ	10^{-3}
માનવ	10^{2}
ઑટોમોબાઇલ	10^{3}
બોઇંગ 747 ઍરક્રાફ્ટ	10^{8}
ચંદ્ર	10^{23}
પૃથ્વી	10^{25}
સૂર્ય	10^{30}
મીલ્કી-વે આકાશગંગા	10^{41}
અવલોકીય વિશ્વ	10^{55}

2.5 સમયનું માપન (MEASUREMENT OF TIME)

કોઈ પણ સમયગાળાનાં માપન માટે આપણને ઘડિયાળની જરૂર પડે છે. પરંતુ હવે આપણે **સમયના પરમાણ્વીય માનક** (Atomic Standard) કે જે સિઝિયમ પરમાણુમાં થતાં આવર્ત દોલનો પર આધારિત છે, તેનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. તેના પરથી **સિઝિયમ ઘડિયાળ** કે જેને ઘણી વાર **ઍટોમિક ક્લૉક** કહે છે, તે રચાયેલ છે અને તે રાષ્ટ્રીય માનક તરીકે વપરાય છે. આવા માનક ઘણીબધી પ્રયોગશાળાઓમાં ઉપલબ્ધ છે. સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળમાં સિઝિયમ-133 પરમાણુની સંક્રાંતિને અનુલક્ષીને ઉત્સર્જિત વિકિરણનાં 9, 192, 631, 770 પૂર્ણ દોલનો માટેના સમયગાળાને એક સેકન્ડ તરીકે ગણવામાં આવે છે. જેવી રીતે કાંડા ઘડિયાળ (Wrist Watch)માં સંતુલન ચક્રનાં દોલનો અથવા ક્વાર્ટ્ઝ ઘડિયાળમાં ક્વાર્ટ્ઝ ક્રીસ્ટલનાં દોલનો સમયનું નિયમન કરે છે. તેવી જ રીતે સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળમાં સિઝિયમ પરમાણુનાં દોલનો સમયને નિયમન કરે છે.

સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળ ખૂબ જ ચોકસાઈ ધરાવે છે. સૈદ્ધાંતિક રીતે આવી ઘડિયાળો પોર્ટેબલ (સરળતાથી હેરફેર કરી શકાય તેવી) માનક ઉપલબ્ધ કરાવે છે. ચાર સિઝિયમ ઘડિયાળો દ્વારા સમયગાળો 'સેકન્ડ' અને 'આવૃત્તિ'ના રાષ્ટ્રીય માનક જાળવી રાખવામાં આવે છે. ભારતીય પ્રમાણભૂત સમય (ઇન્ડિયન સ્ટાન્ડર્ડ ટાઈમ-IST)ને જાળવી રાખવા માટે નવી દિલ્હી ખાતે રાષ્ટ્રીય ભૌતિક પ્રયોગશાળા (NPL)માં સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળનો ઉપયોગ થાય છે.

આપણા દેશમાં સમય, આવૃત્તિ વગેરેના ભૌતિક માનકોની જાળવણી અને સુધારાની જવાબદારી NPLની છે. અત્રે નોંધો કે, ભારતીય પ્રમાણભૂત સમય (IST) આ ઍટોમિક ઘડિયાળોનાં સમૂહ સાથે સાંકળવામાં આવેલ છે. સમય-માપનની અનિશ્ચિતતા $\pm 1 \times 10^{-13}$ (એટલે કે 10^{13} માં 1 ભાગ) સુધીની મેળવી શકાય તેટલી ચોક્કસ કાર્યક્ષમતા સિઝિયમ ઍટોમિક ઘડિયાળની હોય છે. આ દર્શાવે છે કે આવી રચના વડે સમય-માપનમાં અનિશ્ચિતતા 10^{13} માં 1 ભાગથી ઓછી હોય છે. આ ઘડિયાળો એક વર્ષમાં 3 માઇક્રો સેકન્ડથી વધુ આગળ કે પાછળ થતી નથી. સમય-માપનની આ પ્રચંડ ચોકસાઈને ધ્યાનમાં રાખીને લંબાઈના SI એકમોને પ્રકાશ વડે (1/299, 792, 458) સેકન્ડમાં કાપેલ અંતર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. (કોષ્ટક 2.1)

વિશ્વમાં ઘટતી ઘટનાઓમાં સમય અંતરાલ (Time Interval)નો વિસ્તાર ખૂબ જ વિશાળ છે. કોષ્ટક 2.5માં કેટલાક વિશિષ્ટ સમય અંતરાલોનો વિસ્તાર અને ક્રમ દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 2.3 અને 2.5માં દર્શાવેલ સંખ્યાઓમાં આશ્ચર્યજનક સંયોગ છે. જો તેનું ધ્યાનપૂર્વક અવલોકન કરવામાં આવે તો તમે જોઈ શકશો કે વિશ્વમાં મોટામાં મોટા અને સૂક્ષ્મમાં સૂક્ષ્મ પદાર્થોની લંબાઈના માપક્રમનો ગુણોત્તર 10^{41} છે તથા તેટલું જ રસપ્રદ એ પણ છે કે, વિશ્વની ઘટનાઓ સાથે સંકળાયેલ સૌથી મોટા અને સૌથી નાના સમય અંતરાલોનો ગુણોત્તર પણ 10^{41} છે. આ સંખ્યા 10^{41} કોષ્ટક 2.4માં ફરી વાર આવે છે. જેમાં કેટલાક પદાર્થોનાં વિશિષ્ટ દ્રવ્યમાન દર્શાવેલ છે. આપણા વિશ્વમાં મહત્તમ અને લઘુતમ દ્રવ્યમાન ધરાવતા પદાર્થોનાં દળોનો ગુણોત્તર પણ લગભગ $(10^{41})^2$ ક્રમનો છે. શું આ મોટી સંખ્યાઓનો આશ્ચર્યજનક સંયોગ માત્ર આકસ્મિક છે ?

2.6 સાધનની સચોટતા, ચોકસાઈ તથા માપનમાં ત્રુટિ (ACCURACY, PRECISION OF INSTRUMENTS AND ERRORS IN MEASUREMENT)

સમગ્ર પ્રાયોગિક વિજ્ઞાન અને ટેક્નોલૉજીનો મુખ્ય આધાર માપન પર રહેલો છે. માપન માટે ઉપયોગમાં લેવાતાં કોઇ પણ સાધન વડે લીધેલા માપનનાં પરિણામોમાં કેટલીક અચોકસાઈ જોવા મળે છે. આ અચોકસાઈને ત્રુટિ કહે છે. માપનનાં મૂલ્યો પર આધારિત કોઈ પણ ભૌતિકરાશિનાં મૂલ્યમાં **ત્રુટિ** જોવા મળે છે. પ્રથમ આપણે બે શબ્દો **ચોકસાઈ** અને **સચોટતા** વચ્ચેનો ભેદ જોઈશું. કોઈ રાશિનાં માપનનું મૂલ્ય તે રાશિનાં સાચા મૂલ્યની કેટલી નજીક છે. તેને ચોકસાઈ (Accuracy) કહે છે. આ માપન કેટલા વિભેદન (Resolution) અથવા સીમા (Limit) સુધી કરવામાં આવ્યું છે તેને સચોટતા (Precision) કહે છે.

માપનમાં ચોકસાઈનો આધાર સાધનનાં વિભેદન અથવા સીમા જેવી કેટલીક બાબતો ઉપર રહેલો છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક લંબાઈનું સાચું મૂલ્ય 3.678 cmની નજીક છે. એક પ્રયોગમાં 0.1 cm વિભેદન ધરાવતાં સાધન વડે તે જ લંબાઈનું માપ 3.5 cm મળે છે. બીજા પ્રયોગમાં વધુ વિભેદન 0.01 cm ધરાવતાં સાધન વડે લંબાઈનું માપન કરતાં તે 3.38 cm મળે છે. અહીં પ્રથમ માપ વધુ ચોકસાઈવાળું કહેવાય. (કારણ કે તે સાચા માપની વધુ નજીક છે.) પરંતુ તેમાં સચોટતા ઓછી છે. (સાધનનું વિભેદન 0.1 cm છે.) જ્યારે બીજું માપ ઓછી ચોકસાઈ ધરાવે છે. પરંતુ વધુ સચોટ છે. આમ, માપનમાં રહેલી ત્રુટિને કારણે

કોષ્ટક 2.5 સમયગાળાનો વિસ્તાર અને માપક્રમ

ઘટના	સમયગાળો (s)
કોઈ અતિ અસ્થાયી કણનો જીવનકાળ	10^{-24}
પ્રકાશ દ્વારા ન્યુક્લિયર અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય	10^{-22}
ઍક્સ-રે કિરણોનો આવર્તકાળ	10^{-19}
પરમાણ્વીય દોલનોનો આવર્તકાળ	10^{-15}
પ્રકાશ તરંગનો આવર્તકાળ	10^{-15}
કોઈ પરમાણુની ઉત્તેજિત અવસ્થાનો જીવનકાળ	10^{-8}
રેડિયો તરંગનો આવર્તકાળ	10^{-6}
ધ્વનિ તરંગનો આવર્તકાળ	10^{-3}
આંખના પલકારા (Wink) માટેનો સમય	10^{-1}
માનવ હૃદયના બે ક્રમિક ધડકનો (Beats) વચ્ચેનો સમય	10^{0}
પ્રકાશને ચંદ્રથી પૃથ્વી સુધી આવતાં લાગતો સમય	10^{0}
પ્રકાશને સૂર્યથી પૃથ્વી સુધી આવતાં લાગતો સમય	10^{2}
ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ	10^{4}
પૃથ્વીનો ભ્રમણકાળ	10^{5}
ચંદ્રનો ભ્રમણ અને પરિભ્રમણ કાળ	10^{6}
પૃથ્વીનો પરિભ્રમણ કાળ	10^{7}
નજીકના તારાથી પ્રકાશને આવતા લાગતો સમય	10^{8}
માનવનો સરેરાશ જીવનકાળ	10^{9}
ઈજિપ્તના પિરામિડનું આયુષ્ય	10^{11}
ડાયનોસોરના વિલુપ્ત થયા પછીનો વિતેલો સમય	10^{15}
વિશ્વનું આયુષ્ય	10^{17}

દરેક અવલોકન સન્નિકટ માપ દર્શાવે છે. સામાન્ય રીતે અવલોકનમાં ઉદ્‌ભવતી ત્રુટિઓને નીચે દર્શાવેલ બે ભાગમાં વર્ગીકૃત કરી શકાય : (a) વ્યવસ્થિત ત્રુટિ (b) આકસ્મિક ત્રુટિ.

વ્યવસ્થિત ત્રુટિ (Systematic Error)

વ્યવસ્થિત ત્રુટિઓ આપેલા પ્રયોગ દરમિયાન એક જ દિશામાં એટલે કે ધન અથવા ઋણ જ હોય છે. આ ત્રુટિઓના અમુક ઉદ્‌ગમો નીચે મુજબ છે :

(a) **સાધનની ત્રુટિ (Instrumental Error)** આ પ્રકારની ત્રુટિ સાધનમાં રહેલાં કોઈ ક્ષતિયુક્ત રચના કે સાધનમાં સ્કેલના ખામીયુક્ત કેલિબ્રેશન (અંકન), સાધનની શૂન્ય ત્રુટિ વગેરેને કારણે ઉદ્‌ભવે છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક થરમૉમિટરનાં તાપમાનનું અંકન વ્યવસ્થિત ન થયેલું હોય. (STP એ ઉકળતાં પાણીનું તાપમાન 100 °Cને બદલે 104 °C દર્શાવે.) વર્નિયર કેલિપર્સમાં તેના બંને જડબાં (Jaws) ભેગા હોય ત્યારે વર્નિયર માપક્રમનો શૂન્યનો કાપો મુખ્ય સ્કેલના શૂન્ય કાપા સાથે સંપાત ન થતો હોય, સામાન્ય મીટરપટ્ટીનો કોઈ એક છેડો ઘસાઈ ગયેલો હોય.

(b) **પ્રયોગની ટેક્નિક અથવા પદ્ધતિમાં રહેલી અપૂર્ણતા (Imperfection in Experimental Technique or Procedure)** ઉદાહરણ તરીકે થરમૉમિટરની મદદથી શરીરનું તાપમાન માપવામાં આવે છે ત્યારે થરમૉમિટરને બગલમાં મૂકીને માપેલ તાપમાન શરીરનાં વાસ્તવિક તાપમાન કરતાં હંમેશાં ઓછું જ તાપમાન દર્શાવે છે. પ્રયોગ દરમિયાન બાહ્ય પરિબળો (જેમકે, તાપમાન, દબાણ, પવનનો વેગ, ભેજમાં થતા ફેરફારો) પણ માપનમાં વ્યવસ્થિત ત્રુટિ ઉત્પન્ન કરે છે.

(c) **વ્યક્તિગત ત્રુટિ (Personal Error)** પ્રયોગ દરમિયાન અવલોકનકારની ખાસિયત (પૂર્વગ્રહ), સાધનોની અયોગ્ય ગોઠવણી અથવા પૂરતી સાવચેતી વગર વ્યક્તિગત બેદરકારીથી લીધેલ અવલોકનોને કારણે આ પ્રકારની ત્રુટિ ઉદ્‌ભવે છે. દા.ત., માપક્રમ પરની સોયની સ્થિતિનું અવલોકન લેતી વખતે સ્વભાવગત્ તમારું માથું સાચા સ્થાનને બદલે વધુ જમણી બાજુ રાખીને અવલોકન લેશો તો **દષ્ટિસ્થાનભેદ**ને કારણે **અવલોકન**માં ત્રુટિ આવશે.

પ્રાયોગિક ટેક્નિકમાં સુધારો કરીને વધુ સારી ગુણવત્તાવાળાં પ્રાયોગિક સાધનો પસંદ કરીને અને શક્ય હોય તેટલા વ્યક્તિગત પૂર્વગ્રહો દૂર કરીને અવલોકનના વ્યવસ્થિત ત્રુટિને લઘુતમ કરી શકાય છે. આપેલ પ્રાયોગિક ગોઠવણીમાં આવી ત્રુટિઓનો કેટલાંક પ્રમાણમાં અંદાજ કાઢીને જરૂરી સુધારો અવલોકનમાં લાગુ પાડી શકાય છે.

અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ (Random Error)

માપનમાં અનિયમિત રૂપે ઉદ્‌ભવતી ત્રુટિને **અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ** કહે છે અને તેથી તે ધન કે ઋણ તેમજ મૂલ્ય નાનું કે

મોટું હોઈ શકે છે. પ્રયોગ દરમિયાન પ્રયોગ પર અસર કરતાં પરિબળોમાં અનિયમિત અને આગાહી ન કરી શકાય તેવા ફેરફારો (દા.ત., તાપમાન, વૉલ્ટેજ સપ્લાય, પ્રાયોગિક ગોઠવણીનાં યાંત્રિક દોલનો વગેરેમાં ન ધારેલા ફેરફારો) અવલોકનકર્તા દ્વારા અવલોકન લેતી વખતે ઉદ્ભવેલ વ્યક્તિગત ત્રુટિઓ વગેરેને કારણે અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ ઉદ્ભવે છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક જ વ્યક્તિ એક જ અવલોકનનું વારંવાર પુનરાવર્તન કરે, તો દરેક વખતે તેનાં દ્વારા લેવાયેલ અવલોકનો જુદાં જુદાં હોઈ શકે છે.

લઘુતમ માપ ત્રુટિ (Least Count Error)

માપન માટેનાં સાધન વડે માપી શકાતાં નાનાંમાં નાનાં માપને તે સાધનનું **લઘુતમ માપ** કહે છે. આ સાધનથી મપાયેલાં મૂલ્યો કે અવલોકનો આટલા મૂલ્ય સુધી જ સચોટ છે.

લઘુતમ માપ ત્રુટિ એ સાધનના વિભેદન સાથે સંકળાયેલ ત્રુટિ છે. ઉદાહરણ તરીકે વર્નિયર કેલિપર્સનું લઘુતમ માપ 0.01cm, સ્ફેરોમીટરનું લઘુતમ માપ 0.001 cm છે. લઘુતમ માપ ત્રુટિનો સમાવેશ અવ્યવસ્થિત ત્રુટિમાં થાય છે. પરંતુ તેનું પ્રમાણ સીમિત હોય છે. આ ત્રુટિ વ્યવસ્થિત અને અવ્યવસ્થિત ત્રુટિ એમ બંને રીતે ઉદ્ભવે છે. જો આપણે લંબાઈનું માપન મીટરપટ્ટી વડે કરીએ, તો મીટર સ્કેલમાં બે ક્રમિક કાપા વચ્ચેનું અંકન 1 mm જેટલું હોય છે.

વધુ સચોટતા ધરાવતાં સાધનો સુધારેલ પ્રાયોગિક ટેક્નિક (પ્રવિધિ) વગેરેનો ઉપયોગ કરીને આપણે લઘુતમ માપત્રુટિ ઘટાડી શકીએ છીએ. અવલોકનનું ઘણી વાર પુનરાવર્તન કરીને મળતાં બધાં જ અવલોકનોનું સરેરાશ મૂલ્ય મળે છે જે માપેલ રાશિનાં સાચા મૂલ્યની ઘણું નજીક હોય છે.

2.6.1 નિરપેક્ષ ત્રુટિ, સાપેક્ષ ત્રુટિ અને પ્રતિશત ત્રુટિ (Absolute Error, Relative Error, Percentage Error)

(a) ધારો કે કોઈ એક જ ભૌતિકરાશિનાં કેટલાંક માપેલ અવલોકનોનાં મૂલ્યો a_1, a_2, a_3, ..., a_n છે. આપેલ પરિસ્થિતિઓમાં આ અવલોકનોનું સરેરાશ મૂલ્ય ભૌતિકરાશિનાં સાચા મૂલ્ય (વાસ્તવિક મૂલ્ય) તરીકે લઈ શકાય.

$$a_{mean} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \quad (2.4)$$

અથવા

$$a_{mean} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \quad (2.5)$$

આનું કારણ એ છે કે, અગાઉ સ્પષ્ટીકરણ કર્યું છે તેમ એવું સ્વીકારવું તર્કસંગત છે કે કોઈ પણ ભૌતિકરાશિનું વ્યક્તિગત માપન તે ભૌતિકરાશિનાં વાસ્તવિક મૂલ્યથી એટલું જ વધારે હોય છે જેટલું વાસ્તવિક મૂલ્યથી ઓછું હોવાની સંભાવના હોય.

કોઈ ભૌતિકરાશિનાં સાચાં મૂલ્ય અને વ્યક્તિગત માપેલ મૂલ્યના તફાવતનાં માનને તે અવલોકનની નિરપેક્ષ ત્રુટિ કહે છે. તેને $|\Delta a|$ વડે દર્શાવાય છે. ભૌતિકરાશિનું સાચું મૂલ્ય ન જાણતાં હોઈએ ત્યારે આપણે અવલોકનમાં સરેરાશ મૂલ્યને સાચા મૂલ્ય તરીકે ગણીએ છીએ.

પ્રત્યેક માપનમાં મળતી ત્રુટિ,

$$\Delta a_1 = a_1 - a_{mean}$$

$$\Delta a_2 = a_2 - a_{mean}$$

....

....

$$\Delta a_n = a_n - a_{mean}$$

અહીં ગણતરી પરથી કેટલાંક પરિણામમાં Δa ધન અને કેટલાંક પરિણામોમાં Δa ઋણ મળશે. પરંતુ નિરપેક્ષ ત્રુટિ $|\Delta a|$ હંમેશાં ધન થાય.

(b) તમામ અવલોકનોની નિરપેક્ષ ત્રુટિનાં મૂલ્યોનું સરેરાશ મૂલ્ય ભૌતિકરાશિની અંતિમ નિરપેક્ષ ત્રુટિ Δa_{mean} સૂચવે છે. એટલે કે,

$$\Delta a_{mean} = \left[\frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + ... + |\Delta a_n|}{n}\right]$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_n|}{n}$$

જો આપણે ભૌતિકરાશિનું કોઈ એક જ અવલોકન લઈએ તો તેનું મૂલ્ય $a_{mean} \pm \Delta a_{mean}$ મુજબના વિસ્તારમાં મળે.

એટલે કે, $a = a_{mean} \pm \Delta a_{mean}$

અથવા

$$a_{mean} - \Delta a_{mean} \le a \le a_{mean} + \Delta a_{mean}$$

આનો અર્થ એટલો જ થાય કે કોઈપણ ભૌતિકરાશિ aનું પ્રાયોગિક મૂલ્ય $(a_{mean} + \Delta a_{mean})$ અને $(a_{mean} - \Delta a_{mean})$ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના હોય છે.

(c) આપણે ઘણી વાર નિરપેક્ષ ત્રુટિને બદલે **સાપેક્ષ ત્રુટિ** અથવા **પ્રતિશત ત્રુટિ** (δa)નો ઉપયોગ કરીએ છીએ. **સાપેક્ષ ત્રુટિ એટલે ભૌતિકરાશિનાં માપનની સરેરાશ નિરપેક્ષ ત્રુટિ Δa_{mean} અને સરેરાશ સાચા મૂલ્ય a_{mean}નો ગુણોત્તર**

$$\text{સાપેક્ષ ત્રુટિ} = \frac{\Delta a_{mean}}{a_{mean}} \qquad 2.9$$

જ્યારે સાપેક્ષ ત્રુટિને ટકાવારીમાં દર્શાવાય છે ત્યારે તેને **પ્રતિશત ત્રુટિ** (δa) કહે છે.

આમ, પ્રતિશત ત્રુટિ

$$\delta a = \left(\frac{\Delta a_{mean}}{a_{mean}}\right) \times 100\ \% \qquad 2.10$$

હવે આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

▶ *ઉદાહરણ 2.6* રાષ્ટ્રીય પ્રયોગશાળામાં આવેલી પ્રમાણભૂત ઘડિયાળ સાથે બે ઘડિયાળોનું પરીક્ષણ કરવામાં આવે છે. પ્રમાણભૂત ઘડિયાળ જ્યારે બપોરના 12:00નો સમય દર્શાવે છે ત્યારે આ બે ઘડિયાળના સમય નીચે મુજબ મળે છે :

	ઘડિયાળ 1	ઘડિયાળ 2
સોમવાર	12:00:05	10:15:06
મંગળવાર	12:01:15	10:14:59
બુધવાર	11:59:08	10:15:18
ગુરુવાર	12:01:50	10:15:07
શુક્રવાર	11:59:15	10:14:53
શનિવાર	12:01:30	10:15:24
રવિવાર	12:01:19	10:15:11

જો તમે કોઈ પ્રયોગ કરી રહ્યાં હોય જેના માટે તમને ચોકસાઈ સાથે સમય અંતરાલ દર્શાવતી ઘડિયાળની આવશ્યકતા છે, તો આ બે પૈકી કઈ ઘડિયાળ લેવાનું મુનાસિબ માનશો ? શા માટે ?

ઉકેલ સાત દિવસની ઘડિયાળ-1નાં અવલોકનના ફેરફારનો વિસ્તાર 162 s છે અને ઘડિયાળ-2માં આ વિસ્તાર 31 s નો છે. ઘડિયાળ-1 દ્વારા લીધેલો સરેરાશ સમય, ઘડિયાળ-2 દ્વારા લીધેલા સરેરાશ સમયની સાપેક્ષમાં પ્રમાણભૂત સમયની વધુ નજીક છે. મહત્ત્વપૂર્ણ વાત એ છે કે ઘડિયાળની શૂન્ય ત્રુટિ ચોકસાઈપૂર્ણ કાર્ય માટે એટલી મહત્ત્વપૂર્ણ નથી જેટલું મહત્ત્વ તેના સમયમાં થતા ફેરફારનું છે. કારણ કે શૂન્ય ત્રુટિને સરળતાથી દૂર કરી શકાય છે. અહીં ઘડિયાળ-1ની તુલનામાં ઘડિયાળ-2ને પસંદ કરી શકાય. ◀

▶ *ઉદાહરણ 2.7* આપણે સાદા લોલકના દોલનના આવર્તકાળનું માપન કરીએ છીએ. જેમાં ક્રમિક અવલોકનોનાં માપ નીચે મુજબ મળે છે : 2.63 s, 2.56 s, 2.42 s, 2.71 s અને 2.80 s તો અવલોકનોમાં ઉદ્‌ભવતી નિરપેક્ષ ત્રુટિ, સાપેક્ષ ત્રુટિ અને પ્રતિશત ત્રુટિની ગણતરી કરો.

ઉકેલ લોલકના દોલનનો સરેરાશ આવર્તકાળ

$$T = \frac{(2.63+2.56+2.42+2.71+2.80)\ s}{5}$$

$$= \frac{13.12}{5}\ s$$

$$= 2.624\ s$$

$$= 2.62\ s$$

અહીં, સમયનું માપન 0.01 s ના વિભેદન સુધી કરેલ હોવાથી સમય માપનના દરેક અવલોકનો બે દશાંશ સ્થાન સહિત છે. તેથી દોલનના સરેરાશ આવર્તકાળને પણ બે દશાંશ સ્થાન સુધી લેવા યોગ્ય છે.

માપનમાં ઉદ્‌ભવેલી ત્રુટિઓ નીચે મુજબ છે :

2.63 s – 2.62 s = 0.01 s

2.56 s – 2.62 s = 0.06 s

2.42 s – 2.62 s = 0.20 s

2.71 s – 2.62 s = 0.09 s

2.80 s – 2.62 s = 0.18 s

અહીં નોંધો કે ત્રુટિઓના એકમ પણ માપેલ ભૌતિકરાશિઓના જ એકમો છે.

બધી જ નિરપેક્ષ ત્રુટિઓનું ગાણિતિક સરેરાશ (ગાણિતિક સરેરાશ માટે આપણે માત્ર મૂલ્યો જ લઈશું.)

$$\Delta T_{mean} = \frac{[(0.01+0.06+0.20+0.09+0.18)\ s]}{5}$$

$$= \frac{0.54\ s}{5}$$

$$= 0.11\ s$$

આનો અર્થ એ થાય કે સાદા લોલકના દોલનનો આવર્તકાળ (2.62 ± 0.11) s છે.

એટલે કે તેનું મૂલ્ય (2.62 + 0.11)s અને (2.62 – 0.11)s અથવા 2.73 s અને 2.51 s ની વચ્ચે આવેલ છે. અહીં બધી જ નિરપેક્ષ ત્રુટિનું સરેરાશ 0.11 s છે. આમ, આ મૂલ્યમાં સેકન્ડનાં દસમા ભાગ જેટલી ત્રુટિ પહેલેથીજ છે. તેથી દોલનના આવર્તકાળનું મૂલ્ય સેકન્ડના સોમા ભાગ સુધી દર્શાવવાનો કોઈ જ અર્થ નથી. આમ, તેને વધુ સાચી રીતે નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

$$T = 2.6 \pm 0.1\ s$$

કોઈ રેખાની લંબાઈ તમે કેવી રીતે માપશો ?

તમે કહેશો કે આ સ્તરે આવ્યા પછી આ કેવો તુચ્છ પ્રશ્ન ? પરંતુ જરા વિચારો કે આ રેખા સુરેખ ન હોય તો ? તમે તમારી નોટબુક કે બ્લેકબૉર્ડ પર વાંકીચૂંકી રેખા દોરો. આ રેખાની લંબાઈ માપવી બહુ મુશ્કેલ નથી. એક દોરી લઈ આ વાંકીચૂંકી રેખા પર તેને ગોઠવી દો. ત્યાર બાદ દોરીને ઉપાડીને તેની લંબાઈ માપી લો.

હવે કલ્પના કરો કે તમે કોઈ રાષ્ટ્રીય ધોરીમાર્ગ, નદી કે બે રેલવે સ્ટેશનો વચ્ચે આવેલા રેલપાટા કે બે રાજ્યો કે દેશો વચ્ચેની સીમારેખાની લંબાઈ માપો છો. આ માટે 1 મીટર કે 100 મીટર લંબાઈનું દોરડું લઈ તેને રેખા પર મૂકી અવારનવાર રેખા પર આગળ ને આગળ ગોઠવતા જાવ અને લંબાઈનું માપન કરો તો આ પ્રૉજેક્ટમાં માનવીય શ્રમ અને સમય તો ખૂબ જ વ્યય થાય તથા તે ખૂબ જ ખર્ચાળ બને છે, જે મેળવેલ ઉપલબ્ધીને અનુરૂપ ન કહેવાય. ઉપરાંત આ વિશાળ કાર્યમાં માપનમાં ત્રુટિ વધુ આવશે. આવી જ એક રસપ્રદ હકીકત છે કે, ફ્રાન્સ (France) અને બેલ્જિયમ (Belgium) વચ્ચે આવેલ આંતરરાષ્ટ્રીય સીમારેખાની લંબાઈની નોંધ બંને દેશોના રાજકીય દસ્તાવેજોમાં છે, પણ ઘણી જુદી જુદી છે.

એક ડગલું વધુ આગળ, કલ્પના કરો કે સમુદ્રતટ રેખા કે જ્યાં જમીન અને સમુદ્ર એકબીજાને મળે છે. રસ્તા અને નદીઓ તેની સરખામણીએ ઓછા વળાંકવાળા હોય છે. તે ઉપરાંત બધા જ દસ્તાવેજો જેમાં, આપણી શાળાનાં પુસ્તકોનો પણ સમાવેશ થાય છે. તેમાં ગુજરાત અથવા આંધ્રપ્રદેશના સમુદ્રતટની લંબાઈ અથવા બે રાજ્યો વચ્ચેની સીમારેખાની લંબાઈની માહિતી આપેલી હોય છે. રેલવે ટિકિટ પર સ્ટેશનની સાથે તેમની વચ્ચેનું અંતર છાપેલું હોય છે. આપ સૌએ રસ્તાઓના કિનારે લાગેલા પથ્થર જોયા હશે. જે જુદાં જુદાં શહેરો વચ્ચેનું અંતર દર્શાવે છે. અંતે આ બધું કેવી રીતે નક્કી કરેલ હશે ?

તમારે એ નક્કી કરવું પડશે કે માપન-પ્રક્રિયામાં કેટલી ત્રુટિ ચલાવી શકાય અને કેટલો ખર્ચ ભોગવી શકાય છે. જો તમારે લઘુતમ ત્રુટિ જોઈએ તો તે માટે ઊંચી ટેક્નોલૉજી અને વધુ ખર્ચની જરૂર પડશે. એ કહેવું પર્યાપ્ત છે કે આ માટે તમારે આધુનિક સ્તરનાં ભૌતિકવિજ્ઞાન, ગણિતશાસ્ત્ર, એન્જિનિયરિંગ અને ટેક્નોલૉજીની જરૂર પડશે. આ બાબતનો સંબંધ જ વિસ્તાર ખંડો (Fractals) સાથે સંબંધિત છે, જે કેટલાક સમયથી સૈદ્ધાંતિક ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ઘણું લોકપ્રિય છે. આમ છતાં જે આંકડા પ્રાપ્ત થાય છે તે કેટલા વિશ્વસનીય છે તે કહેવું મુશ્કેલ છે, જે ફ્રાન્સ અને બેલ્જિયમનો ઉદાહરણમાં સ્પષ્ટ છે. ફ્રાન્સ અને બેલ્જિયમની વાતમાં રહેલી આ વિસંગતતા, વિસ્તારખંડો (Fractals) અને અવ્યવસ્થાપન (Chaos) વિશેની આધુનિક ભૌતિકવિજ્ઞાનના એક પુસ્તકમાં પ્રથમ પાન પર રજૂ કરવામાં આવી છે.

નોંધો કે અહીં અંતિમ અંક 6 વિશ્વસનીય નથી કારણ કે આ અંક 5 તથા 7ની વચ્ચેનો કોઈ પણ હોઈ શકે. અહીં અવલોકનોમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા બે હોવાથી આપણે આમ દર્શાવી શકીએ છીએ. આ કિસ્સામાં બે સાર્થક અંક 2 તથા 6 છે. જેમાં અંક 2 વિશ્વસનીય છે. જ્યારે અંક 6 સાથે ત્રુટિ સંકળાયેલી છે. સાર્થક અંક વિશે વધુ વિસ્તારથી પરિચ્છેદ 2.7માં આપ શીખશો.

આ ઉદાહરણમાં સાપેક્ષ ત્રુટિ અથવા પ્રતિશત ત્રુટિ

$$\delta a = \frac{0.1}{2.6} \times 100 = 4\ \%$$ ◀

2.6.2 ત્રુટિઓનું સંયોજન (Combination of Errors)

આપણે કોઈ પ્રયોગ કરીએ જેમાં ઘણાંબધાં અવલોકનો હોય, તો આપણે ચોક્કસ જાણવું જોઈએ કે બધાં જ અવલોકનોની સંયુક્ત ત્રુટિ કેટલી હશે. ઉદાહરણ તરીકે પદાર્થમાં દ્રવ્યની ઘનતા તેના દળને કદ વડે ભાગતા મળે. જો તેના દળ અને પરિમાણનાં માપનમાં ત્રુટિ હોય, તો આપણે તે જાણવું જોઈએ કે દ્રવ્યની ઘનતામાં કેટલી ત્રુટિ હશે. ત્રુટિનો આવો અંદાજ મેળવવા માટે કેટલીક ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ દ્વારા ત્રુટિનું સંયોજન શીખવું પડશે. આ માટે નીચે મુજબની પ્રક્રિયાને અનુસરીશું :

(a) સરવાળા અથવા તફાવતની ત્રુટિ (Error of a sum or a difference)

ધારો કે બે ભૌતિકરાશિઓ A અને Bનાં માપેલાં મૂલ્યો અનુક્રમે, $A \pm \Delta A$, $B \pm \Delta B$ છે. જ્યાં ΔA અને ΔB તેમની નિરપેક્ષ ત્રુટિઓ છે. આપણે $Z = A + B$માં ઉદ્ભવેલી ત્રુટિ ΔZ શોધવી છે. સરવાળો કરતાં

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B)$$

Zમાં શક્ય મહત્તમ ત્રુટિ $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$

તફાવત $Z = A - B$ માટે

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B)$$
$$= (A - B) \pm \Delta A \pm \Delta B$$

અથવા $\therefore \pm \Delta Z = \pm \Delta A \pm \Delta B$

અહીં Zની શક્ય મહત્તમ ત્રુટિ ફરીથી $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$ છે. **આ પરથી, નિયમ : બે ભૌતિકરાશિઓનો સરવાળો કે બાદબાકી હોય ત્યારે અંતિમ પરિમાણની નિરપેક્ષ ત્રુટિ દરેક રાશિની સ્વતંત્ર નિરપેક્ષ ત્રુટિઓના સરવાળા જેટલી હોય છે.**

▶ *ઉદાહરણ 2.8* થરમૉમિટર વડે બે પદાર્થોનાં માપવામાં આવેલા તાપમાનો અનુક્રમે : $t_1 = 20\ ^{\circ}C \pm 0.5\ ^{\circ}C$ અને $t_2 = 50\ ^{\circ}C \pm 0.5\ ^{\circ}C$ છે. બંને પદાર્થોનાં તાપમાનનો તફાવત અને તેમાં ઉદ્ભવેલ ત્રુટિની ગણતરી કરો.

ઉકેલ $t' = t_2 - t_1 = (50\ ^{\circ}C \pm 0.5\ ^{\circ}C) - (20\ ^{\circ}C \pm 0.5\ ^{\circ}C)$ $t' = 30\ ^{\circ}C \pm 1\ ^{\circ}C$ ◀

(b) ગુણાકાર અથવા ભાગાકારની ત્રુટિ (Error of a product or a quotient)

ધારો કે Z = AB તથા A અને Bનાં માપેલ મૂલ્યો અનુક્રમે (A ± ΔA) અને (B ± ΔB) છે તો,

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B)$$
$$= AB \pm B\Delta A + A\Delta B + \Delta A\Delta B$$

સમીકરણની ડાબી બાજુને Z વડે અને જમણી બાજુને AB વડે ભાગતાં

$$1 \pm \frac{\Delta Z}{Z} = 1 \pm \left(\frac{\Delta A}{A}\right) \pm \left(\frac{\Delta B}{B}\right) \pm \left(\frac{\Delta A}{A}\right)\left(\frac{\Delta B}{B}\right)$$

ΔA અને ΔB સૂક્ષ્મ હોવાથી ગુણાકારવાળું અંતિમ પદ અવગણતાં અહીં મહત્તમ સાપેક્ષ ત્રુટિ, $\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$

તમે સરળતાથી ચકાસી શકો છો કે ઉપર્યુક્ત પરિણામ ભાગાકાર માટે પણ સાચું છે.

આ પરથી, નિયમ : બે ભૌતિકરાશિઓનો ગુણાકાર અથવા ભાગાકાર કરવામાં આવે તો અંતિમ પરિણામમાં ઉદ્ભવતી સાપેક્ષ ત્રુટિ ગુણકોની સાપેક્ષ ત્રુટિના સરવાળા જેટલી હોય છે.

▶ *ઉદાહરણ 2.9* અવરોધ R = V/I, જ્યાં V = (100 ± 5) V અને I = (10 ± 0.2)A છે, તો Rમાં પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો.

ઉકેલ Vમાં પ્રતિશત ત્રુટિ 5 % અને Iમાં પ્રતિશત ત્રુટિ 2 % છે.

Rમાં ઉદ્ભવતી કુલ પ્રતિશત ત્રુટિ = 5 % + 2 % = 7 % ◀

▶ *ઉદાહરણ 2.10* R_1 = 100 ± 3 ohm અને R_2 = 200 ± 4 ohm અવરોધ ધરાવતા બે અવરોધોને (a) શ્રેણીમાં (b) સમાંતરે જોડેલ છે. (a) શ્રેણી-જોડાણનો તથા (b) સમાંતર જોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ શોધો. (a) માટે સંબંધ $R = R_1 + R_2$ તથા (b) માટે

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ અને } \frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2} \text{નો}$$

ઉપયોગ કરો.

ઉકેલ (a) શ્રેણી-જોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ

$$R = R_1 + R_2 = (100 \pm 3)\text{ ohm} + (200 \pm 4)\text{ ohm}$$
$$= 300 \pm 7\text{ ohm.}$$

(b) સમાંતર જોડાણનો સમતુલ્ય અવરોધ

$$R' = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{200}{3} = 66.7\text{ohm}$$

હવે, $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ પરથી,

$$\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2} \text{ મળે.}$$

$$\Delta R' = (R'^2)\frac{\Delta R_1}{R_1^2} + (R'^2)\frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$
$$= \left(\frac{66.7}{100}\right)^2 3 + \left(\frac{66.7}{200}\right)^2 4$$
$$= 1.8$$

આમ, R′ = 66.7 ± 1.8 ohm

(સાર્થક અંકોના નિયમોને અનુસરીને અહીં ΔRને 2ને બદલે 1.8 વડે દર્શાવેલ છે.) ◀

(c) ઘાતાંક ધરાવતી ભૌતિકરાશિનાં માપનમાં ત્રુટિ (Error in Case of a Measured Quantity Raised to a Power)

ધારો કે, $Z = A^2$

$$\text{તો } \frac{\Delta Z}{Z} = \left(\frac{\Delta A}{A}\right) + \left(\frac{\Delta A}{A}\right) = 2\left(\frac{\Delta A}{A}\right)$$

આમ, A^2માં સાપેક્ષ ત્રુટિ Aની સાપેક્ષ ત્રુટિ કરતાં બે ગણી છે.

વ્યાપક રૂપે, $Z = \frac{A^p B^q}{C^r}$

$$\text{તો } \frac{\Delta Z}{Z} = p\left(\frac{\Delta A}{A}\right) + q\left(\frac{\Delta B}{B}\right) + r\left(\frac{\Delta C}{C}\right)$$

આ પરથી, નિયમ : k જેટલો ઘાતાંક ધરાવતી ભૌતિકરાશિમાં ઉદ્ભવતી સાપેક્ષ ત્રુટિ વ્યક્તિગત રાશિની સાપેક્ષ ત્રુટિના k ગણી હોય છે.

▶ *ઉદાહરણ 2.11* જો $Z = \frac{A^4 B^{\frac{1}{3}}}{CD^{\frac{3}{2}}}$ હોય, તો Zમાં સાપેક્ષ ત્રુટિ શોધો.

ઉકેલ Zમાં ઉદ્ભવતી સાપેક્ષ ત્રુટિ

$$\frac{\Delta Z}{Z} = 4\left(\frac{\Delta A}{A}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta B}{B}\right) + \left(\frac{\Delta C}{C}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\Delta D}{D}\right)$$ ◀

▶ *ઉદાહરણ 2.12* સાદા લોલકનાં દોલનોનો આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ છે. 1mmની ચોકસાઈ સાથે માપેલ લંબાઈ L = 20cm અને 1 s વિભેદનવાળી કાંડા ઘડિયાળથી 100 દોલનો માટે માપેલ સમય 90 s જેટલો મળે છે, તો gનું મૂલ્ય કેટલી ચોકસાઈથી નક્કી થયું હશે ?

ઉકેલ $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$

અહીં, $T = \frac{t}{n}$ અને $\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$ માટે $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t}$

L અને tમાં ઉદ્ભવતી ત્રુટિ લઘુતમ માપ ત્રુટિ જેટલી છે.

$$\text{માટે, } \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = \frac{0.1}{20.0} + 2\left(\frac{1}{90}\right) = 0.027$$

આમ, gમાં ઉદ્ભવતી પ્રતિશત ત્રુટિ, $100\left(\frac{\Delta g}{g}\right) = 100\left(\frac{\Delta L}{L}\right) + 2 \times 100\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = 3\ \%$ ◀

2.7 સાર્થક અંકો (SIGNIFICANT FIGURES)

ઉપર ચર્ચા કરી તેમ દરેક માપનમાં ત્રુટિઓ હોય છે. આમ, માપનમાં પરિણામો એવી રીતે દર્શાવવાં જોઈએ કે જેથી માપનની સચોટતા સ્પષ્ટ થાય. સામાન્ય રીતે માપનમાં દર્શાવાતાં પરિણામો એક સંખ્યા હોય છે, જેમાં બધા જ

વિશ્વસનીય અંકો તથા પ્રથમ અચોક્કસ અંકનો સમાવેશ થાય છે. **વિશ્વસનીય અંકો** અને **પ્રથમ અચોક્કસ અંક**ને સંખ્યાના સાર્થક અંકો કહે છે. જો આપણે કહીએ કે સાદા લોલકના દોલનનો આવર્તકાળ 1.62 s છે. જેમાં અંક 1 અને 6 વિશ્વસનીય અને નિશ્ચિત છે, જ્યારે અંક 2 અચોક્કસ છે. આમ, અવલોકનના માપમાં ત્રણ સાર્થક અંક છે. એક પદાર્થની લંબાઈ માપન બાદ 287.5 cm નોંધવામાં આવે છે. જેમાં ચાર સાર્થક અંક છે. અહીં અંક 2, 8 અને 7 ચોક્કસ છે. પરંતુ અંક 5 અચોક્કસ છે. સ્પષ્ટ છે કે, માપનનાં પરિણામમાં સાર્થક અંકોથી વધુ અંક દર્શાવવા બિનજરૂરી અને ભ્રમિત હોય છે, કારણ કે તે માપનની સચોટતાની બાબતે ગેરમાર્ગે દોરે છે.

કોઈ પણ સંખ્યામાં સાર્થક અંકો નક્કી કરવાના નિયમો નીચે આપેલ ઉદાહરણો દ્વારા સમજી શકાય છે. જેમ આગળ જણાવ્યું તેમ સાર્થક અંક માપનની સચોટતા દર્શાવે છે જે સાધનની લઘુતમ માપ પર આધારિત હોય છે. **કોઈ માપનને જુદા જુદા એકમોમાં પરિવર્તિત કરવાથી સાર્થક અંકોની સંખ્યા બદલાતી નથી.** આ મહત્ત્વપૂર્ણ નોંધ નીચે દર્શાવેલ મોટા ભાગનાં માપનોને સ્પષ્ટ કરે છે.

(1) ઉદાહરણ તરીકે લંબાઈ 2.308 cmમાં ચાર સાર્થક અંક છે. પરંતુ જુદા જુદા એકમોના સંદર્ભે આ લંબાઈ 0.02308 m અથવા 23.08 mm અથવા 23080 μm દર્શાવી શકીએ. આ તમામ સંખ્યાઓમાં સાર્થક અંક સમાન (2, 3, 0, 8) એટલે કે ચાર છે. જે દર્શાવે છે કે સાર્થક અંક નક્કી કરવા માટે દશાંશચિહ્ન કયા સ્થાને છે તેનું કોઈ જ મહત્ત્વ નથી. ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણ પરથી નીચે મુજબના નિયમો મળી શકે છે :

- **બધા જ શૂન્યેતર અંકો સાર્થક અંકો છે.**
- **સંખ્યામાં જો દશાંશચિહન હોય તો તે ગમે ત્યાં હોય તો પણ બે શૂન્યેતર અંકોની વચ્ચે આવેલા બધા જ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે.**
- **જો સંખ્યા 1 કરતાં નાની હોય તો દશાંશચિહનની જમણી તરફના પરંતુ પ્રથમ શૂન્યેતર અંકની ડાબી તરફના અંકો સાર્થક અંક નથી. (<u>0.00</u>2308)માં લીટી દોરેલ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક નથી.**
- **દશાંશચિહન સિવાયની સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યેતર અંકની જમણી તરફના શૂન્યાંકો સાર્થક અંક નથી.**

  (એટલે કે 123 m = 12300 cm = 123000 mm સંખ્યાઓમાં ત્રણ જ સાર્થક અંક છે. સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યો સાર્થક અંક નથી.) જોકે તમે હવે પછીનાં અવલોકનો જુઓ,
- **દશાંશચિહનવાળી સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યેતર અંક પછીના બધા જ શૂન્યાંકો સાર્થક અંકો છે.** (સંખ્યા 3.500 અથવા 0.06900માં ચાર સાર્થક અંક છે.)

(2) સંખ્યામાં અંતિમ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે કે નહિ તે બાબતે મૂંઝવણ થઈ શકે છે. ધારો કે કોઈ એક લંબાઈ 4.700m નોંધવામાં આવે છે. આ અવલોકન સૂચવે છે કે અહીં અંતિમ શૂન્યાંકનો ઉદ્દેશ માપનની સચોટતા દર્શાવવાનો છે. તેથી તે સાર્થક છે. (જો આ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક ન હોય તો તેને સ્પષ્ટરૂપે દર્શાવવાનો અર્થ નથી અને ત્યારે આપણે આ માપનને માત્ર 4.7 m દર્શાવ્યું હોત.) હવે ધારો કે આ માપનમાં આપણે એકમ બદલીએ 4.700 m = 470.0 cm = 4700 mm = 0.004700 km લખી શકીએ. અહીં છેલ્લાં માપનમાં દશાંશચિહ્ન વગરની સંખ્યામાં અંતિમ બે શૂન્યાંક છે. એટલે કે તેમાં બે સાર્થક અંક છે, એવો માપન (1) મુજબનો નિષ્કર્ષ ખોટો છે. તેમાં વાસ્તવિક રીતે ચાર સાર્થક અંક છે. માત્ર સંખ્યાના એકમ બદલવાથી સાર્થક અંકોની સંખ્યા બદલાતી નથી.

(3) **સાર્થક અંકો નક્કી કરવામાં આવી દ્વિધા દૂર કરવા માટેનો શ્રેષ્ઠ ઉપાય એ છે કે, માપનને વૈજ્ઞાનિક સંકેત (10 ની ઘાત સ્વરૂપે)માં દર્શાવવા જોઈએ.** આ સંકેત પદ્ધતિમાં દરેક સંખ્યાને $a \times 10^b$ના સ્વરૂપમાં લખવામાં આવે છે. જ્યાં a 1 થી 10 વચ્ચેની કોઈ સંખ્યા અને b 10નો ધન અથવા ઋણ ઘાતાંક છે. સંખ્યાનું સન્નિકટ મૂલ્ય દર્શાવવા માટે આપણે તેને પૂર્ણાંકન (Round Off) કરી શકીએ છીએ. એટલે કે ($a \le 5$) હોય ત્યારે તેને 1 અથવા ($5 < a \le 10$) હોય ત્યારે 10 લઈને સંખ્યાનું રાઉન્ડ ઑફ કરી શકીએ અને ત્યારે સંખ્યાને લગભગ 10^b સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ છીએ. અહીં 10ની ઘાત b ભૌતિકરાશિનાં **માનનો ક્રમ** દર્શાવે છે. ભૌતિકરાશિનાં મૂલ્યના માત્ર અંદાજની જરૂરિયાત હોય ત્યારે તે 10^bના ક્રમનું છે તેમ કહી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે પૃથ્વીનો વ્યાસ (1.28×10^7 m) 10^7mના ક્રમનો છે. તેના માનનો ક્રમ 7 છે. હાઇડ્રોજન પરમાણુનો વ્યાસ (1.06×10^{-10} m) 10^{-10} mના ક્રમનો છે. જેના માનનો ક્રમ −10 છે. એટલે કે પૃથ્વીનો વ્યાસ હાઇડ્રોજન પરમાણુના વ્યાસથી 17 માનના ક્રમ જેટલો મોટો છે. આમ પ્રથમ અંક પછી દશાંશચિહ્ન મૂકવાની એક પ્રથા છે. આમ કરવાથી ઉપર દર્શાવેલ ઉદાહરણ (a)માં ઉદ્ભવતી મૂંઝવણ દૂર થાય છે.

$4.700\text{m} = 4.700 \times 10^2 \text{ cm} = 4.700 \times 10^3 \text{ mm} = 4.700 \times 10^{-3} \text{ km}$

અહીં સાર્થક અંકોની સંખ્યા નક્કી કરવામાં 10ની ઘાતમાં વિસંગતતા છે. છતાં પણ વૈજ્ઞાનિક સંકેતમાં આધાર સંખ્યાના

બધા જ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક હોય છે. ઉપરના કિસ્સામાં દરેક સંખ્યાને ચાર સાર્થક અંક હોય છે.

આમ, વૈજ્ઞાનિક સંકેત સાથે દર્શાવેલી સંખ્યામાં આધાર સંખ્યા a પછી આવતાં શૂન્યાંકો અંગેની દ્વિધા દૂર થાય છે અને આ બધા જ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે.

(4) કોઈ પણ માપનને દર્શાવવાની વૈજ્ઞાનિક સંકેત પદ્ધતિ આદર્શ પદ્ધતિ છે.

પરંતુ આ પદ્ધતિ ન અપનાવેલી હોય ત્યારે અગાઉના ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ નિયમોનું પાલન કરવું પડે.

- **દશાંશચિહન વગરની 1થી મોટી સંખ્યા માટે અંતિમ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક નથી.**
- **દશાંશચિહનવાળી સંખ્યા માટે અંતિમ શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે.**

(5) 1થી નાની સંખ્યામાં રૂઢિગત રીતે દશાંશચિહ્નની ડાબી તરફ (જેમકે, 0.1250) આવેલા શૂન્યાંક સાર્થક અંક નથી પરંતુ માપનમાં આવી સંખ્યાના અંતમાં આવેલા શૂન્યાંકો સાર્થક અંક છે.

(6) ગુણક અથવા ભાજક કે જે Round Off (સંનિકટ) સંખ્યા ન હોય અને કોઈ માપનનું મૂલ્ય ન દર્શાવતી તે ચોક્કસ હોય છે અને તેમાં અનંત સાર્થક અંકો હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે $r = \frac{d}{2}$ અથવા $s = 2\pi r$માં કારક 2 એક ચોક્કસ સંખ્યા છે અને તેને 2.0, 2.00 અથવા 2.0000 જરૂરિયાત મુજબ લખી શકાય છે. આ જ પ્રમાણે, $T = \frac{t}{n}$ માં n એક ચોક્કસ સંખ્યા છે.

2.7.1 સાર્થક સંખ્યાની ગણિતીય પ્રક્રિયા માટેના નિયમો (Rules of Arithmatic Operation with Significant Figures)

કોઈ ભૌતિકરાશિનાં માપનનાં મૂલ્યોનાં સન્નિકટ મૂલ્યોને સમાવતી ગણતરીનું પરિણામ (દા.ત. એવાં મૂલ્યો જેમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા સીમિત છે.) માપનમાં મૂળ મૂલ્યોમાં રહેલી અનિશ્ચિતતા દર્શાવતી હોવી જોઈએ. માપેલ મૂલ્યો પર આધારિત આ પરિણામ, તે જેનાં પર આધારિત છે તે મૂળ માપેલાં મૂલ્યો કરતાં વધારે ચોકસાઈવાળું હોઈ શકે નહિ. આમ, સામાન્ય રીતે અંતિમ પરિણામમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા તે જેમાંથી મેળવેલ હોય તે મૂળ મૂલ્યોમાંના સાર્થક અંકો કરતાં વધુ ન હોવી જોઈએ. એટલે કે જો પદાર્થના દળનું માપન 4.237 g (ચાર સાર્થક અંકો) અને કદનું માપન 2.51 cm^3 માપેલ હોય તો 11 દશાંશસ્થાનો સુધીની ગાણિતિક ગણતરી દ્વારા તેની ઘનતા 1.68804780876 g/cm^3 મળે છે. સ્પષ્ટ છે કે ઘનતાનાં મૂલ્યની આ ગણતરી આટલી સચોટતા સાથે દર્શાવેલી હાસ્યાસ્પદ અને અસંગત છે કારણ કે જે માપનો પર આ ગણતરીનો આધાર છે તે માપનોની સચોટતા ઘણી ઓછી છે. ગાણિતિક ગણતરીના નીચે આપેલ નિયમો સ્પષ્ટતા કરે છે કે કોઈ પણ ગણતરીનાં અંતિમ પરિણામને એટલી સચોટતાથી દર્શાવવું જોઈએ કે જે ઇનપુટ તરીકે લીધેલા માપનનાં મૂલ્યોની સચોટતા સાથે સુસંગત હોય.

(1) સંખ્યાઓમાં ગુણાકાર કે ભાગાકારથી મળતાં અંતિમ પરિણામમાં એટલા જ સાર્થક અંક રાખવા જોઈએ જેટલા મૂળ સંખ્યાઓ પૈકીની જે સંખ્યામાં લઘુતમ સાર્થક અંક હોય.

એટલે કે ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં ઘનતાનાં મૂલ્યને ત્રણ સાર્થક અંક સાથે દર્શાવવા જોઈએ.

$$\text{ઘનતા} = \frac{4.237\ g}{2.51\ cm^3} = 1.69\ g/cm^3$$

આ જ રીતે, પ્રકાશની આપેલ ઝડપ $3.00 \times 10^8\ m\ s^{-1}$ (ત્રણ સાર્થક અંક)

અને એક વર્ષ (1 y = 365.25 d)માં

3.1557×10^7 s (પાંચ સાર્થક અંક) છે. તો પ્રકાશવર્ષમાં

9.47×10^{15} m (ત્રણ સાર્થક અંક) હોવા જોઈએ.

(2) સંખ્યાઓનાં સરવાળા-બાદબાકીથી તે સંખ્યાઓમાંથી લઘુતમ દશાંશસ્થાનો ધરાવતી સંખ્યામાં જેટલાં દશાંશસ્થાનો હોય તેટલાં જ દશાંશસ્થાનો અંતિમ પરિણામમાં રાખવાં જોઈએ.

ઉદાહરણ તરીકે 436.32 g, 227.2 g અને 0.301 gનો માત્ર ગણિતીય સરવાળો 663.821 g છે. આપેલ સંખ્યાઓ પૈકી સૌથી ઓછી સચોટતાવાળું માપ (227.2 g)માં દશાંશચિહન બાદ એક અંક છે. માટે અંતિમ પરિણામ 663.8 g Round off કરીને દર્શાવવું જોઈએ. આ જ રીતે લંબાઈનો તફાવત નીચે મુજબ દર્શાવવો જોઈએ :

$0.307\ m - 0.304\ m = 0.003\ m = 3 \times 10^{-3}\ m$

અહીં એ નોંધો કે ગુણાકાર અને ભાગાકાર માટેના નિયમ (1)નો ઉપયોગ કરીને આ ઉદાહરણમાં **સરવાળો** 664 *g* ન લખી શકાય તથા **બાદબાકી** માટે 3.00×10^{-3} m ન લખી શકાય. અહીં નિયમ (1) માપનની સચોટતાને યોગ્ય રીતે વ્યક્ત કરતો નથી. સરવાળા અને બાદબાકીનો નિયમ દશાંશ-સ્થાનોના પદમાં છે.

2.7.2 અનિશ્ચિત અંકોની સંન્નિકટતા (Rounding off the uncertain Digits)

સંન્નિકટ સંખ્યાઓની ગણતરીથી મેળવેલ જે પરિણામોમાં એક કરતાં વધુ અનિશ્ચિત અંકો હોય છે તેમને રાઉન્ડ ઑફ (Round off) કરવા જોઈએ. મોટા ભાગના કિસ્સાઓમાં સંખ્યાઓને યોગ્ય સાર્થક અંક સુધી Round off કરવાના નિયમો સ્પષ્ટ છે. સંખ્યા 2.74<u>6</u>ને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી રાઉન્ડ ઑફ કરતાં 2.75 મળે જ્યારે 2.743ને રાઉન્ડ ઑફ કરતાં 2.74 મળે છે. **પરંપરા મુજબ નિયમ એ છે કે, જો પડતો મૂકવામાં આવતો**

બિનસાર્થક અંક 5થી મોટો હોય. (આગળનાં ઉદાહરણમાં લીટી દોરેલ અંક) તો તે અંકના પૂર્વવર્તી અંકમાં 1નો વધારો કરવો અને જો અંક 5થી નાનો હોય તો કોઈ જ ફેરફાર કરવો નહિ. પરંતુ જો સંખ્યા 2.745 કે જેમાં બિનસાર્થક અંક 5 છે. ત્યારે શું ? અહીં પરંપરા એવી છે કે, પૂર્વવર્તી અંક બેકી હોય તો બિનસાર્થક અંક પડતો મૂકવો અને એકી સંખ્યા હોય તો તેમાં 1નો વધારો કરવો. માટે સંખ્યા 2.745ને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Rounded off કરતાં સંખ્યા 2.74 થાય. બીજી તરફ સંખ્યા 2.735ને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Rounded off કરતાં સંખ્યા 2.74 થાય. કારણ કે અહીં પૂર્વવર્તી અંક એકી છે.

અટપટી અથવા જટિલ લાંબી ગણતરી હોય ત્યારે મધ્યવર્તી પદોમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા કરતાં એક અંક વધુ રાખવો જોઈએ અને ગણતરીને અંતે યોગ્ય સાર્થક અંક સુધી Round off કરવી જોઈએ. આ જ રીતે ઘણા સાર્થક અંક ધરાવતી એક જાણીતી સંખ્યા શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ 2.99792458 $\times 10^8$ m/s ને Round off કરતાં તેનું સંનિકટ મૂલ્ય 3×10^8 m/s મળે છે. જેનો ઘણી વખત ગણતરીમાં ઉપયોગ કરીએ છીએ. છેલ્લે યાદ રાખો કે સૂત્રોમાં આવતો ચોક્કસ અંક જેમકે,

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ માં 2πના સાર્થક અંકોની સંખ્યા ખૂબ જ મોટી (અનંત) હોય છે. πનું મૂલ્ય = 3.1415926 .... ખૂબ વધુ સાર્થક અંકો માટે જાણીતું છે. સાર્થક અંકોની સંખ્યા મર્યાદિત હોય તેવા ચોક્કસ કિસ્સાઓમાં જરૂરિયાત પ્રમાણે πનું મૂલ્ય 3.142 અથવા 3.14 તમે લઈ શકો છો.

> ▶ *ઉદાહરણ 2.13* કોઈ ઘનની બધી જ બાજુનું માપેલ મૂલ્ય 7.203 m છે. યોગ્ય સાર્થક અંક સુધી ઘનનું કુલ પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ તથા કદ શોધો.

ઉકેલ માપેલ લંબાઈમાં સાર્થક અંકોની સંખ્યા 4 છે. આ માટે ગણતરી કરેલ ક્ષેત્રફળ અને કદનાં મૂલ્યોને પણ 4 સાર્થક અંકો સુધી Round off (સંનિકટ) કરવા જોઈએ.

ઘનનું પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ $= 6(7.203)^2$ m^2

$= 311.299254$ m^2

$= 311.3$ m^2

ઘનનું કદ $= (7.203)^3$ m^3

$= 373.714754$ m^3

$= 373.7$ m^3 ◀

> ▶ *ઉદાહરણ 2.14* 5.74 gનો એક પદાર્થ 1.2 cm^3 જેટલો અવકાશ રોકે છે. સાર્થક અંકોને ધ્યાનમાં રાખી તેની ઘનતા શોધો.

ઉકેલ દળનાં માપનમાં 3 સાર્થક અંક છે. જ્યારે કદનાં માપનમાં માત્ર બે સાર્થક અંક છે. તેથી ઘનતાને માત્ર બે સાર્થક અંકો સુધી દર્શાવી શકાય.

ઘનતા $= \frac{5.74}{1.2}$ g cm^{-3}

$= 4.8$ g cm^{-3} ◀

2.7.3 અંકગણિતીય ગણતરીનાં પરિણામોમાં અનિશ્ચિતતા નક્કી કરવાના નિયમો (Rules for Determining the Uncertainty in the Results of Arithmatic Calculations)

સંખ્યા/માપેલ રાશિની ગાણિતિક ગણતરીમાં અનિશ્ચિતતા અથવા ત્રુટિ નક્કી કરવાના નિયમો નીચે આપેલ ઉદાહરણો દ્વારા સમજી શકાય :

(1) એક પાતળી લંબચોરસ તકતીની લંબાઈ અને પહોળાઈનું માપન મીટરપટ્ટીથી કરતાં તે અનુક્રમે 16.2 cm અને 10.1 cm મળે છે. અહીં દરેક માપનમાં ત્રણ સાર્થક અંક છે. તેનો અર્થ એ થાય કે લંબાઈ l ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$l = 16.2 \pm 0.1$ cm

$= 16.2$ cm ± 0.6 %

આ જ રીતે, પહોળાઈ b ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$b = 10.1 \pm 0.1$ cm

$= 10.1$ cm ± 1 %

હવે ત્રુટિનાં સંયોજનના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને, બે (અથવા વધુ) પ્રાયોગિક મૂલ્યોનાં ગુણનફળમાં ત્રુટિ,

$l\,b = 163$ cm^2 ± 1.6 %

$= 163.62 \pm 2.6$ cm^2 થશે.

આ ઉદાહરણ અનુસાર આપણે અંતિમ પરિણામ આ મુજબ લખીશું.

$l\,b = 164 \pm 3$ cm^2

અહીં, લંબચોરસ તકતીનાં ક્ષેત્રફળની ગણતરીમાં અનિશ્ચિતતા અથવા ત્રુટિ 3 cm^2 છે.

(2) જો કોઈ પ્રાયોગિક મૂલ્યોનો ગણ n-સાર્થક અંકો સુધી દર્શાવેલ હોય, તો આ મૂલ્યોના સંયોજનથી મળતા પરિણામમાં પણ n-સાર્થક અંકો જ માન્ય છે.

પરંતુ જો પ્રાયોગિક મૂલ્યોની સંખ્યા ઘટાડવામાં આવે, તો સાર્થક અંકોની સંખ્યા ઘટાડી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, 12.9 g − 7.06 g બંને ત્રણ સાર્થક અંક દર્શાવે છે. પરંતુ તેને 5.84 g રૂપે મૂલ્યાંકિત ન કરી શકાય. પણ તેને 5.8 g દર્શાવાય કારણ કે સરવાળો કે બાદબાકીમાં અનિશ્ચિતતા અલગ રીતે સંયોજિત થાય છે. (સરવાળા કે બાદબાકી માટેની સંખ્યામાં લઘુતમ સાર્થક અંક નહિ પરંતુ લઘુતમ દશાંશસ્થાનો ધરાવતી સંખ્યા જોવાય છે.)

(3) સાર્થક સંખ્યાના મૂલ્યમાં અંકો સહિત દર્શાવેલ સાપેક્ષ ત્રુટિ માત્ર n પર આધારિત નથી. પરંતુ સંખ્યા તે સંખ્યા પર પણ આધારિત છે.

ઉદાહરણ તરીકે, દ્રવ્યમાન 1.02 g માપનમાં ચોકસાઈ ±0.01 g સુધી છે. જ્યારે આ જ રીતે બીજા માપન 9.89 gમાં પણ ચોકસાઈ ±0.01 g સુધીની છે.

1.02 gમાં સાપેક્ષ ત્રુટિ $= \pm\left(\frac{0.01}{1.02}\right) \times 100\ \%$

$= \pm 1\ \%$

આ જ રીતે 9.89 gમાં સાપેક્ષ ત્રુટિ, $= \left(\frac{\pm 0.01}{9.89}\right) \times 100\,\%$

$= \pm 0.1\ \%$

અંતમાં યાદ રાખો કે, **બહુપદીય ગણતરીમાં લઘુત્તમ સચોટ માપનના અંક કરતાં દરેક માપનમાં એક સાર્થક અંક વધારે રાખીને મધ્યવર્તી પરિણામોની ગણતરી કરવી જોઈએ. આ રીતે આંકડાઓ યોગ્ય કર્યા બાદ ગણિતીય પ્રક્રિયા કરવી જોઈએ.** અન્યથા Round off માં ત્રુટિ ઉદ્ભવશે. ઉદાહરણ તરીકે 9.58ના વ્યસ્તને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Round off કરતાં મળતું મૂલ્ય 0.104 છે. પરંતુ 0.104નાં વ્યસ્તને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Round off કરતાં મળતું મૂલ્ય 9.62 છે. જો આપણે $\frac{1}{9.58} = 0.1044$ લખ્યા હોત, તો તેના વ્યસ્તને ત્રણ સાર્થક અંક સુધી Round off કરતાં 9.58 મળે.

ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણ જટિલ બહુપદીની ગણતરીનાં મધ્યવર્તી પરિણામમાં (લઘુતમ સચોટ માપના અંકોની સાપેક્ષે) એક-અંક વધુ રાખવાની ધારણા ન્યાય સંગત છે તેમ દર્શાવે છે. જેથી સંખ્યાઓની Round off પ્રક્રિયામાં વધારાની ત્રુટિ નિવારી શકાય.

2.8 ભૌતિકરાશિનાં પરિમાણો (DIMENTIONS OF PHYSICAL QUANTITIES)

કોઈ ભૌતિકરાશિની પ્રકૃતિ તેનાં પરિમાણ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે. મેળવેલા એકમો દ્વારા વ્યક્ત થતી બધી જ ભૌતિકરાશિઓ સાત મૂળભૂત અથવા પાયાની રાશિઓનાં સંયોજનના પદમાં આપી શકાય છે. આ મૂળ સાત રાશિઓને આપણે ભૌતિક જગતનાં સાત પરિમાણ કહી શકીએ અને તેને ચોરસ કૌંસ [ ] (Square Brackets) સાથે દર્શાવી શકીએ છીએ. **આ રીતે લંબાઈનું પરિમાણ [L], દળનું [M], સમયનું [T], વિદ્યુતપ્રવાહનું [A], થરમૉડાયનેમિક તાપમાનનું [K], જ્યોતી તીવ્રતાનું [cd] અને દ્રવ્યના જથ્થાનું [mol] છે. કોઈ પણ ભૌતિકરાશિને વ્યક્ત કરવા માટે મૂળભૂત રાશિઓ પર મૂકવામાં આવતાં ઘાતાંકોને તે ભૌતિકરાશિના પરિમાણ કહે છે.** ધ્યાન રાખો કે કોઈ રાશિને ચોરસ કૌંસ [ ]માં મૂકવાનો અર્થ તે છે કે આપણે તે **રાશિના પરિમાણ** પર વિચાર કરીએ છીએ.

યંત્રશાસ્ત્રમાં બધી જ ભૌતિકરાશિઓને [L], [M] અને [T]નાં પરિમાણનાં પદોમાં વ્યક્ત કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે પદાર્થ દ્વારા ઘેરાયેલા કદને લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અથવા ત્રણ લંબાઈના ગુણાકાર દ્વારા વ્યક્ત કરવામાં આવે છે માટે કદનું પરિમાણ $[L] \times [L] \times [L] = [L]^3 = [L^3]$ છે. અહીં કદ, દળ અને સમય પર આધારિત ન હોવાથી એમ કહી શકાય કે કદમાં દળનું પરિમાણ શૂન્ય $[M^0]$, સમયનું પરિમાણ શૂન્ય $[T^0]$ અને લંબાઈમાં પરિમાણ ત્રણ છે. આ જ રીતે, બળને દ્રવ્યમાન અને પ્રવેગના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.

બળ = દળ × પ્રવેગ = દ્રવ્યમાન × લંબાઈ/(સમય)^2

બળનાં પરિમાણ $\frac{[M][L]}{[T]^2} = [MLT^{-2}]$ છે.

અહીં બળને દ્રવ્યમાનમાં 1, લંબાઈમાં 1 અને સમયમાં −2 પરિમાણ ધરાવે છે તથા બાકીની મૂળ રાશિઓમાં પરિમાણ શૂન્ય છે.

અહીં નોંધો કે આ પ્રકારની રજૂઆતમાં માનનો વિચાર કરવામાં આવતો નથી. તેમાં માત્ર ભૌતિકરાશિઓના પ્રકાર ને જ ધ્યાનમાં લેવાય છે. આમ, વેગમાં તફાવત, મૂળવેગ, સરેરાશ વેગ, અંતિમ વેગ અને ઝડપ તે બધા જ આ સંદર્ભમાં સમતુલ્ય છે. આ બધી રાશિઓને લંબાઈ/સમય તરીકે દર્શાવી શકાતી હોવાથી તેમના પરિમાણ $\frac{[L]}{[T]}$ અથવા $[LT^{-1}]$ છે.

2.9 પારિમાણિક સૂત્રો અને પારિમાણિક સમીકરણો (DIMENSIONAL FORMULAE AND DIMENSIONAL EQUATIONS)

આપેલ ભૌતિકરાશિને કેટલી અને કઈ મૂળભૂત રાશિઓ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે તે દર્શાવતા સમીકરણને તે ભૌતિકરાશિનું પારિમાણિક સૂત્ર કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે કદનું પારિમાણિક સૂત્ર $[M^0L^3T^0]$ અને ઝડપ અથવા વેગનું $[M^0LT^{-1}]$ છે. આ જ રીતે $[M^0LT^{-2}]$ એ પ્રવેગનું પારિમાણિક સૂત્ર અને $[ML^{-3}T^0]$ દળઘનતાનું પારિમાણિક સૂત્ર છે.

કોઈ ભૌતિકરાશિને તેના પારિમાણિક સૂત્ર સાથે લખવાથી મળતાં સમીકરણને તે **ભૌતિકરાશિનું પારિમાણિક સમીકરણ**

કહે છે. આમ, પારિમાણિક સમીકરણ એવું સમીકરણ છે કે જેમાં ભૌતિકરાશિને મૂળભૂત રાશિઓનાં પરિણામનાં પદોમાં નિરૂપણ કરેલ હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે કદ [V], ઝડપ [υ], બળ [F] અને દળઘનતા [ρ]નાં પારિમાણિક સમીકરણો નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય છે :

$$[V] = [M^0L^3T^0]$$
$$[\upsilon] = [M^0LT^{-1}]$$
$$[F] = [MLT^{-2}]$$
$$[\rho] = [ML^{-3}T^0]$$

ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતાં સમીકરણ પરથી પારિમાણિક સમીકરણ મેળવી શકાય છે. વિવિધ પ્રકારની ઘણીબધી ભૌતિકરાશિઓનાં પારિમાણિક સૂત્રો તે ભૌતિકરાશિનો અન્ય ભૌતિકરાશિ સાથેનો સંબંધ દર્શાવતાં સૂત્રો પરથી મેળવી, મૂળભૂત ભૌતિકરાશિના સંદર્ભમાં રજૂ કરેલાં પારિમાણિક સૂત્રો તમારા માર્ગદર્શન અને ત્વરિત સંદર્ભ માટે પરિશિષ્ટ 9માં આપેલ છે.

2.10 પારિમાણિક વિશ્લેષણ અને તેના ઉપયોગો (DIMENSIONAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS)

પરિમાણની સંકલ્પનાની જાણકારી ભૌતિક વર્તણૂકનાં વર્ણનમાં માર્ગદર્શન આપે છે અને પોતાનું એક પાયાનું મહત્ત્વ ધરાવે છે, કારણ કે સમાન પરિમાણો ધરાવતી ભૌતિકરાશિઓના જ સરવાળા અથવા બાદબાકી થઈ શકે. પારિમાણિક વિશ્લેષણનું સંપૂર્ણ જ્ઞાન, જુદી જુદી ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેના સંબંધો મેળવવામાં, તારવણી, ચોકસાઈ અને પારિમાણિક સુસંગતતાની અથવા જુદા જુદા ગણિતીય સૂત્રોમાં સમાંગ ચકાસણી કરવામાં મદદરૂપ છે. જ્યારે બે અથવા વધારે ભૌતિકરાશિઓના માનનો ગુણાકાર કરવામાં આવે ત્યારે, તેમના એકમોની સાથે સામાન્ય બીજગણિતીય સંજ્ઞાઓની જેમ જ ગણતરી કરવામાં આવે છે. અંશ અને છેદમાંના સમાન એકમો રદ કરી શકીએ છીએ. આ બાબત ભૌતિકરાશિનાં પરિમાણોને પણ લાગુ પાડી શકાય છે. આ રીતે સમીકરણની બંને બાજુએ દર્શાવાતી ભૌતિકરાશિની સંજ્ઞાઓમાં સમાન પરિમાણ હોવાં જોઈએ.

2.10.1 સમીકરણોની પારિમાણિક સુસંગતતાની ચકાસણી (Checking the Dimensional Consistency of Equations)

ભૌતિકરાશિનાં માનને ઉમેરીને ભેગા અથવા એકબીજામાંથી બાદ ત્યારે જ કરી શકાય જ્યારે તેમનાં પરિમાણ સમાન હોય. બીજા શબ્દોમાં સમાન ભૌતિકરાશિને આપણે ઉમેરી અથવા બાદ કરી શકીએ. આમ, વેગને બળમાં ઉમેરી શકાય નહિ, અથવા વિદ્યુતપ્રવાહને થરમૉડાયનેમિક તાપમાનમાંથી બાદ ન કરી શકાય. આ સરળ સિદ્ધાંતોને **પરિમાણનો સુસંગતતાનો નિયમ (The principle of homogeneity of dimensions)** કહે છે. જે સમીકરણોની સત્યાર્થતા ચકાસવા ખૂબ જ ઉપયોગી છે. જો કોઈ સમીકરણનાં બધાં જ પદોનાં પરિમાણ સમાન ન હોય, તો તે સમીકરણ ખોટું છે. આથી તે કોઈ પદાર્થની લંબાઈ (અથવા અંતર) માટે, મૂળ ગાણિતિક સંબંધમાં આવતી સંજ્ઞાઓને અનુલક્ષીને સૂત્રની તારવણી આપણે કરી શકીએ જ્યારે બધાં જ વ્યક્તિગત પરિમાણોનું સાદું રૂપ આપીએ ત્યારે તેમાં માત્ર લંબાઈનું જ પરિમાણ બાકી રહેવું જોઈએ. આ જ રીતે આપણે ઝડપનું સમીકરણ મેળવીએ તો બંને બાજુએ રહેલાં પરિમાણોનું સાદું રૂપ આપતાં લંબાઈ/સમય અથવા [LT^{-1}] રહેવું જોઈએ.

જો કોઈ સમીકરણની સત્યાર્થતા માટે સંદેહ હોય ત્યારે સમીકરણની સુસંગતતાની ચકાસણી માટે સર્વમાન્ય પ્રથા અનુસાર પરિમાણોનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ. પરંતુ પારિમાણિક સુસંગતતા કોઈ પણ સમીકરણ સાચું જ છે તેવી બાંયધરી આપતું નથી. પરિમાણરહિત રાશિઓ અથવા વિધેયો માટે તે અનિશ્ચિત છે. આ દલીલ મુજબ વિશિષ્ટ વિધેયો જેવા કે ત્રિકોણમિતીય, લઘુગણકીય અને ચરઘાતાંકીય વિધેયો પરિમાણરહિત હોવા જોઈએ. એક ચોક્કસ અંક, સમાન ભૌતિકરાશિનો ગુણોત્તર જેમકે ખૂણો, જેમકે (લંબાઈ/લંબાઈ) ગુણોત્તર, વક્રીભવનાંક એટલે કે (પ્રકાશની શૂન્યાવકાશમાં ઝડપ/પ્રકાશની માધ્યમમાં ઝડપ) વગેરેને પરિમાણ નથી.

હવે આપણે નીચેના સમીકરણની સુસંગતતા અથવા સમાંગતા ચકાસીએ,

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \left(\frac{1}{2}\right) at^2$$

અહીં અંતર x કણ અથવા પદાર્થ વડે t સમયમાં કપાયેલ અંતર છે. જે x_0 સ્થાનેથી ગતિની શરૂઆત કરે છે. $t = 0$ સમયે તેનો પ્રારંભિક વેગ υ_0 અને ગતિની દિશામાં અચળ પ્રવેગ a છે.

દરેક પદનાં પરિમાણો નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$[x] = [L]$$
$$[x_0] = [L]$$
$$[\upsilon_0 t] = [LT^{-1}][T] = [L]$$
$$\left[\left(\frac{1}{2}\right) at^2\right] = [LT^{-2}][T^2] = [L]$$

આ સમીકરણની જમણી બાજુએ દરેક પદ સમાન પરિમાણ ધરાવે છે અને તે લંબાઈનું જ છે, જે સમીકરણની ડાબી બાજુના પરિમાણ જેવું જ છે. આથી આ સમીકરણ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ સાચું સમીકરણ છે.

અહીં નોંધવું જોઈએ કે પારિમાણિક સુસંગતતાની ચકાસણી એકમોની સુસંગતતાથી વધારે કે ઓછું કંઈ જ જણાવતું નથી.

પરંતુ તેનો ફાયદો એ છે કે કોઈ એકમની ચોક્કસ પસંદગી માટે આપણને કોઈ જ બંધન નથી તથા આપણે એકમોના ગુણકો કે સહગુણકો વિશેની ચિંતા કરવાની જરૂર નથી. એક વાત મગજમાં ગોઠવી દો કે **જો કોઈ સમીકરણ સાતત્યતા ચકાસણીમાં અસફળ થાય તો તે ખોટું સાબિત થાય, પરંતુ જો તે સફળ થાય તો તે સાચું જ છે તેમ સાબિત નથી થતું. આમ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ સાચું સમીકરણ વાસ્તવિક રીતે યથાર્થ (સાચું) ન પણ હોઈ શકે પરંતુ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ વિસંગત સમીકરણ ખોટું જ સમીકરણ હોવું જોઈએ.**

▶ *ઉદાહરણ 2.15* આપેલ સમીકરણ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ સાચું છે કે નહિ તે ચકાસો. $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh$ જ્યાં m પદાર્થનું દળ, υ તેનો વેગ, g ગુરુત્વપ્રવેગ અને h ઊંચાઈ છે.

ઉકેલ ડાબી બાજુનાં પરિમાણ

$$[M][LT^{-1}]^2 = [M][L^2T^{-2}]$$
$$= [ML^2T^{-2}]$$

જમણી બાજુનાં પરિમાણ

$$= [M][LT^{-2}][L] = [M][L^2T^{-2}]$$
$$= [ML^2T^{-2}]$$

અહીં, ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુનાં પરિમાણો સમાન છે. એટલે કે સમીકરણ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ સાચું છે. ◀

▶ *ઉદાહરણ 2.16* ઊર્જાનો SI એકમ J = kgm^{2}s^{-2} અને તે જ રીતે, વેગ υ માટે ms^{-1} અને પ્રવેગ a માટે ms^{-2} છે. નીચે આપેલ સૂત્રો પૈકી કયાં સૂત્રો પારિમાણિક દૃષ્ટિએ ગતિઊર્જા (K) માટે તમે ખોટાં ઠેરવશો ? (m પદાર્થનું દળ સૂચવે છે.)

(a) $K = m^2\upsilon^3$

(b) $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

(c) $K = ma$

(d) $K = \left(\frac{3}{16}\right)m\upsilon^2$

(e) $K = \left(\frac{1}{2}\right)m\upsilon^2 + ma$

ઉકેલ દરેક સાચું સૂત્ર કે સમીકરણની બંને બાજુએ પરિમાણો સમાન હોય છે. માત્ર સમાન ભૌતિક પરિમાણ ધરાવતી ભૌતિકરાશિ ઉમેરી અથવા બાદ કરી શકાય છે. સમીકરણોની જમણી બાજુની ભૌતિકરાશીના પરિમાણ (a) માટે [$M^2L^3T^{-3}$] (b) અને (d) માટે [ML^2T^{-2}] (c) માટે [MLT^{-2}], જ્યારે (e)માં જમણી બાજુ આવેલી રાશિ યોગ્ય પરિમાણ ધરાવતી નથી. કારણ કે તેમાં જુદાં જુદાં પરિમાણ ધરાવતી રાશિઓનો સરવાળો છે. હવે ગતિઊર્જા Kનું પરિમાણ [ML^2T^{-2}] હોવાથી સૂત્રો (a), (c) અને (e) નકારી શકાય. નોંધો કે, પારિમાણિક દલિલો (b) અથવા (d) તે બે પૈકી કયું સૂત્ર સાચું છે તે જણાવતી નથી. આ માટે ગતિઊર્જાની મૂળ વ્યાખ્યા જોવી જોઈએ. (જુઓ પ્રકરણ 6.) ગતિઊર્જાનું સાચું સૂત્ર (b) વડે રજૂ થાય છે. ◀

2.10.2 ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવો (Deducing Relation among the Physical Quantities)

ઘણી વાર ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ તારવવા માટે પરિમાણની રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. આ માટે આપણે એક ભૌતિકરાશિ અન્ય કઈ કઈ ભૌતિકરાશિ (ત્રણ ભૌતિકરાશિ સુધી અથવા રેખીય સ્વતંત્ર ચલો સુધી) પર આધારિત છે તે જાણવું પડે અને તેને તેમના ગુણાકાર પર આધારિત લેવી પડે. હવે એક ઉદાહરણ લઈએ.

▶ *ઉદાહરણ 2.17* એક સાદું લોલક વિચારો જેમાં ગોળાને એક દોરી સાથે બાંધેલું છે અને તે ગુરુત્વબળની અસર હેઠળ દોલનો કરે છે. ધારો કે સાદા લોલકનાં દોલનોનો આવર્તકાળ તેની લંબાઈ (l), ગોળાનાં દળ (m), ગુરુત્વપ્રવેગ (g) પર આધારીત છે. તો પરિમાણની રીતનો ઉપયોગ કરીને આવર્તકાળનું સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ આવર્તકાળ Tનો આધાર ભૌતિકરાશિઓ l, g અને m પર છે જેને ગુણાકાર સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખી શકાય :

$T = kl^x g^y m^z$ જ્યાં k = પરિમાણરહિત અચળાંક અને x, y અને z ઘાતાંક છે. બંને બાજુનાં પરિમાણો લેતાં

$$[L^0M^0T^1] = [L^1]^x\ [L^1T^{-2}]^y\ [M^1]^z$$
$$= L^{x+y}T^{-2y}M^z$$

બંને બાજુ પરિમાણોની સરખામણી કરતાં

$x + y = 0;\ -2y = 1$ અને $z = 0$

આથી, $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = 0$

આમ, $T = k\,l^{\frac{1}{2}}\,g^{-\frac{1}{2}}$ અથવા $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$

અહીં નોંધો કે અચળાંક kનું મૂલ્ય પરિમાણની રીતે મેળવી શકાતું નથી. અહીં સમીકરણની જમણી બાજુએ કોઈ અંકનો ગુણાકાર કરવામાં કોઈ જ વાંધો નથી. કારણ કે પરિમાણ પર કોઈ જ અસર કરતો નથી.

વાસ્તવમાં, $k = 2\pi$, તેથી $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ◀

પરસ્પર આધારિત ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવામાં પારિમાણિક વિશ્લેષણ ખૂબ જ ઉપયોગી છે. જોકે પરિમાણરહિત અચળાંકો આ રીતથી મેળવી શકાતા નથી. પરિમાણની રીત માત્ર પારિમાણિક માન્યતા ચકાસે છે પણ તેના વડે કોઈ પણ સમીકરણમાં ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો સચોટ (યથાર્થ) સંબંધ ચકાસી શકાતો નથી. તે સમાન પરિમાણ ધરાવતી ભૌતિકરાશિઓ વચ્ચેનો ભેદ દર્શાવતી નથી.

આ પ્રકરણના અંતમાં આપવામાં આવેલ સ્વાધ્યાયના ઘણા પ્રશ્નો પારિમાણિક વિશ્લેષણ માટે કૌશલ્ય મેળવવામાં તમને મદદરૂપ થશે.

સારાંશ

1. ભૌતિકવિજ્ઞાન ભૌતિકરાશિઓનાં માપન પર આધારિત એક પારિમાણિક વિજ્ઞાન છે. કેટલીક ભૌતિકરાશિઓ જેવી કે (લંબાઈ, દ્રવ્યમાન, સમય વિદ્યુતપ્રવાહ, થરમૉડાયનેમિક તાપમાન, દ્રવ્યનો જથ્થો અને જ્યોતિ તીવ્રતા)ને મૂળભૂત / પાયાની ભૌતિકરાશિ તરીકે પસંદ કરવામાં આવી છે.
2. બધી જ મૂળભૂત ભૌતિકરાશિને કેટલીક પાયાની, યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પરિસ્થિતિના સંદર્ભે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે જે પ્રમાણભૂત માનક દ્વારા પ્રમાણિત થયેલ છે. જેને એકમ કહે છે (જેમકે મીટર, કિલોગ્રામ, સેકન્ડ, એમ્પિયર, કેલ્વિન, મોલ અને કૅન્ડેલા) મૂળભૂત અથવા પાયાની ભૌતિકરાશિઓના એકમોને મૂળભૂત અથવા પાયાના એકમો કહે છે.
3. પાયાની ભૌતિકરાશિઓ પરથી મેળવેલ અન્ય ભૌતિકરાશિઓના એકમોને મૂળભૂત રાશિઓના એકમોનાં સંયોજન રૂપે દર્શાવી શકાય છે અને તેને સાધિત એકમો કહે છે. મૂળભૂત એકમો અને સાધિત એકમોના સંપૂર્ણ સમૂહને એકમ પદ્ધતિ કહે છે.
4. સાત મૂળભૂત એકમો પર આધારિત એકમોની આંતરરાષ્ટ્રીય પદ્ધતિ (SI) હાલમાં આંતરરાષ્ટ્રીય સ્તરે સ્વીકૃત એકમ પદ્ધતિ છે. આ પદ્ધતિ સમગ્ર વિશ્વમાં વ્યાપક રૂપે ઉપયોગમાં લેવાય છે.
5. મૂળભૂત રાશિ અને તેના દ્વારા મેળવેલ સાધિત રાશિઓના ભૌતિક માપન માટે SI એકમોનો ઉપયોગ થાય છે. કેટલાક તારવેલા એકમોને SI એકમ વિશેષ નામથી રજૂ કરવામાં આવે છે. (જેમકે જૂલ, ન્યૂટન, વૉટ વગેરે)
6. SI એકમો અર્થસભર અને આંતરરાષ્ટ્રીય સ્વીકૃત એકમ સંકેતો છે. (જેમકે મીટર માટે (m) કિલોગ્રામ માટે (kg), સેકન્ડ માટે (s), એમ્પિયર માટે (A) ન્યૂટન માટે (N) વગેરે.
7. નાની અને મોટી રાશિઓની ભૌતિક માપનોને વૈજ્ઞાનિક સંકેતમાં 10ની ઘાતો દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. માપનનાં સંકેતચિહનો તથા આંકડાકીય ગણતરીની સરળતા અને સંખ્યાઓની સચોટતા વ્યક્ત કરવા માટે વૈજ્ઞાનિક સંકેતચિહનો અને પૂર્વગોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.
8. ભૌતિકરાશિઓના સંકેત અને SI એકમોનો પ્રમાણિત સંકેતોના ઉપયોગ માટે કેટલાક ચોક્કસ નિયમો અને માર્ગદર્શનને અનુસરવું પડે. ભૌતિકરાશિઓ અને માપનોને ચોક્કસ રીતે રજૂ કરવા માટે કેટલાક બીજા એકમો અને SI પૂર્વગો પણ છે.
9. કોઈ ભૌતિકરાશિની ગણતરીમાં તેનો એકમ ન મળે ત્યાં સુધી રાશિ સાથે સંબંધ (સંબંધો) ધરાવતી ભૌતિકરાશિઓના એકમોને બીજગણિતની રાશિની માફક સમજવી જોઈએ.
10. ભૌતિકરાશિના માપન માટે પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. માપી શકાય તેવી રાશિઓનાં પરિણામને દર્શાવતી વખતે માપન માટેનાં સાધનોની ચોકસાઈ અને સચોટતાની સાથે માપનમાં ઉદ્ભવેલ ત્રુટિઓ દર્શાવવી જોઈએ.
11. માપી શકાય તેવી અને ગણતરીથી મેળવેલ રાશિઓમાં યોગ્ય સાર્થક અંકોને જ રાખવા જોઈએ. સંખ્યાઓમાં સાર્થક અંક નક્કી કરવા તેની સાથે ગણિતીય ક્રિયાઓ કરવા અને Round off કરવા માટે બનાવેલ નિયમોનું પાલન કરવું જોઈએ.
12. પાયાની રાશિઓનાં પરિમાણ અને આ પરિમાણોનું સંયોજન રાશિઓની પ્રકૃતિનું વર્ણન કરે છે. સમીકરણોની પારિમાણિક સાતત્યતાની ચકાસણી અને ભૌતિકરાશિઓનો સંબંધ મેળવવા વગેરે માટે પારિમાણિક વિશ્લેષણનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. પારિમાણિક દૃષ્ટિએ યથાર્થ સમીકરણ વાસ્તવમાં સાચું જ હોય તે જરૂરી નથી. પરંતુ પારિમાણિક દૃષ્ટિએ ખોટું કે અસંગત સમીકરણ ખોટું જ હોય છે.

સ્વાધ્યાય

નોંધ : સંખ્યાત્મક જવાબ લખતી વખતે સાર્થક અંકોને ધ્યાનમાં રાખવા.

2.1 **ખાલી જગ્યા પૂરો :**

(a) 1 cm બાજુવાળા એક ઘનનું કદ .... m^3 જેટલું હશે.

(b) 2.0 cm ત્રિજ્યા અને 10 cm ઊંચાઈ ધરાવતાં નક્કર નળાકારનું પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ .... $(mm)^2$ જેટલું હશે.

(c) 18 km h^{-1}ની ઝડપે ગતિ કરતું એક વાહન 1 sમાં .... m અંતર કાપશે.

(d) સીસાની સાપેક્ષ ઘનતા 11.3 છે, તો તેની ઘનતા .... g cm^{-3} અથવા .... kg m^{-3}.

2.2 **એકમોનાં યોગ્ય પરિવર્તન દ્વારા ખાલી જગ્યા પૂરો :**

(a) $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ = ... $\text{g cm}^2 \text{ s}^{-2}$

(b) 1 m = ... ly

(c) 3.0 m s^{-2} .... km h^{-2}

(d) $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 (\text{kg})^{-2}$ = ... $(\text{cm})^3\text{s}^{-2}\text{g}^{-1}$

2.3 ઉષ્મા અથવા ઊર્જાનો એકમ કૅલરી છે અને તે લગભગ 4.2 J બરાબર છે. જ્યાં $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$. ધારો કે એકમોની એક નવી પ્રણાલિનો ઉપયોગ કરીએ કે જેમાં દળનો એકમ α kg, લંબાઈનો એકમ β m અને સમયનો એકમ γ s હોય, તો દર્શાવો કે નવા એકમોના સંદર્ભે કૅલરીનું માન $\alpha^{-1}\beta^{-2}\gamma^2$ છે.

2.4 આ કથનને સ્પષ્ટ રીતે સમજાવો :

''સરખામણી માટેનાં માનકોની સ્પષ્ટતા કર્યા વગર કોઈ પારિમાણિક રાશિ 'મોટી' છે કે 'નાની' તેમ કહેવું અર્થહીન છે.'' આ બાબતને ધ્યાનમાં રાખી નીચે આપેલ કથનોને જરૂરિયાત મુજબ ફરી લખો :

(a) પરમાણુઓ ખૂબ જ નાના પદાર્થ છે.

(b) જેટ પ્લેન ખૂબ ઝડપથી ચાલે છે.

(c) જ્યુપિટરનું દળ ઘણું વધુ છે.

(d) આ રૂમમાં રહેલી હવામાં અણુઓની સંખ્યા ખૂબ જ વધારે છે.

(e) ઇલેક્ટ્રૉન કરતાં પ્રોટોન વધુ દળદાર છે.

(f) પ્રકાશની ઝડપ કરતાં ધ્વનિની ઝડપ ખૂબ જ ઓછી છે.

2.5 લંબાઈનો નવો એકમ એવી રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે કે શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ એક એકમ થાય. જો પ્રકાશને સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર કાપતાં 8 min અને 20 s લાગતા હોય, તો લંબાઈના નવા એકમ સંદર્ભે સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર કેટલું થાય ?

2.6 લંબાઈના માપન માટે નીચે આપેલ સાધનો પૈકી કયું સાધન વધુ સચોટ છે ?

(a) વર્નિયર કેલિપર્સ જેના વર્નિયર માપમાં 20 વિભાગ છે.

(b) એક સ્ક્રૂગેજ જેનું પેચઅંતર 1 mm અને વર્તુળાકાર સ્કેલ પર 100 વિભાગ છે.

(c) એક પ્રકાશીય યંત્ર જે પ્રકાશની તરંગલંબાઈ સુધીની લંબાઈ માપી શકે છે.

2.7 એક વિદ્યાર્થી 100 મોટવણી ધરાવતા માઇક્રોસ્કૉપ વડે માનવ-વાળ (Hair)ની જાડાઈ માપે છે. તે 20 અવલોકનો નોંધે છે અને નક્કી કરે છે કે માઇક્રોસ્કૉપનાં દૃશ્યક્ષેત્રમાં વાળની જાડાઈ 3.5 mm છે, તો વાળની અંદાજિત જાડાઈનું અનુમાન કરો.

2.8 **નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :**

(a) તમને એક દોરી અને મીટરપટ્ટી આપેલ છે. તમે દોરીની જાડાઈ કેવી રીતે નક્કી કરશો ?

(b) એક સ્ક્રૂગેજમાં પેચઅંતર 1.0 mm અને વર્તુળાકાર સ્કેલ પર 200 વિભાગ છે. શું તમે વિચારી શકો કે વર્તુળાકાર સ્કેલ પર વિભાગોની સંખ્યા સ્વેચ્છાએ વધારીને તેની સચોટતા વધારી શકાય ?

(c) પાતળા બ્રાસના સળિયાનો વ્યાસ વર્નિયર કેલિપર્સ વડે માપવામાં આવે છે. ફક્ત 5 અવલોકનો દ્વારા મેળવેલ પરિણામની સરખામણીમાં 100 અવલોકનો વડે મેળવેલ વ્યાસનું અપેક્ષિત પરિણામ શા માટે વધુ વિશ્વસનીય હશે ?

2.9 એક મકાનનો ફોટોગ્રાફ 35 mmની સ્લાઇડ પર 1.75 cm^2 ક્ષેત્રફળને આવરી લે છે. આ સ્લાઇડને એક પડદા પર પ્રૉજેક્ટ કરતાં પડદા પર મકાનનું ક્ષેત્રફળ 1.55 m^2 મળે છે, તો પ્રૉજેક્ટર અને પડદાની ગોઠવણીની રેખીય મોટવણી શું હશે ?

2.10 **નીચે આપેલ સંખ્યાઓમાં સાર્થક અંકો નક્કી કરો :**

(a) $0.007\ m^2$

(b) 2.64×10^{24} kg

(c) $0.2370\ g\ cm^{-3}$

(d) 6.320 J

(e) $6.032\ N\ m^{-2}$

(f) $0.0006032\ m^2$

2.11 એક લંબચોરસ પાતળી ધાતુની તક્તીની લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈ અનુક્રમે 4.234 m, 1.005 cm અને 2.01 cm છે. સાર્થક અંકોને ધ્યાનમાં રાખી તક્તીનું ક્ષેત્રફળ અને કદ શોધો.

2.12 પ્રોવિઝન સ્ટોરની તુલા વડે માપેલ એક બૉક્સનું દળ 2.300 kg મળે છે. હવે આ બૉક્સમાં 20.15 g અને 20.17 g દળનાં સોનાના બે ટુકડા મૂકવામાં આવે છે તો (a) બૉક્સનું કુલ દળ કેટલું થશે ? (b) યોગ્ય સાર્થક અંક સુધી બંને ટુકડાના દળનો તફાવત કેટલો થાય ?

2.13 એક ભૌતિકરાશિ Pનો માપન યોગ્ય ચાર રાશિઓ a, b, c અને d સાથેનો સંબંધ આ મુજબ છે.
$P = a^3b^2 / (\sqrt{c}\ d)$, a, b, c અને dમાં પ્રતિશત ત્રુટિ અનુક્રમે 1 %, 3 %, 4 % અને 2 % છે, તો Pમાં પ્રતિશત ત્રુટિ શોધો. જો ઉપર્યુક્ત સંબંધનો ઉપયોગ કરીને ગણતરી કરતાં Pનું મૂલ્ય 3.763 મળતું હોય, તો તમે આ પરિણામને ક્યા મૂલ્ય સુધી Round off કરશો ?

2.14 મુદ્રણની ઘણી ત્રુટિઓ ધરાવતાં એક પુસ્તકમાં આવર્તગતિ કરતાં એક કણના સ્થાનાંતરનાં ચાર જુદાં જુદાં સૂત્રો આપેલ છે :

(a) $y = a \sin 2\pi\ t/T$

(b) $y = a \sin \upsilon t$

(c) $y = (a/T) \sin t/a$

(d) $y = (a\sqrt{2}) (\sin 2\pi t / T + \cos 2\pi t / T)$

(a = કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર, υ = કણની ઝડપ, T = આવર્તકાળ) પરિમાણને આધારે ખોટાં સૂત્રોને નાબૂદ કરો.

2.15 એક વિદ્યાર્થી ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં પ્રચલિત એવા કોઈ કણનાં ચલિતદળ (moving mass)m અને સ્થિર દળ (rest mass) m_0 તથા કણનો વેગ υ અને પ્રકાશની ઝડપ c વચ્ચેનો (આ સંબંધ પ્રથમ આલ્બર્ટ આઈન્સ્ટાઈનના વિશિષ્ટ સાપેક્ષતાના સિદ્ધાંતનાં પરિણામ સ્વરૂપે મળેલ હતો.) સંબંધને લગભગ સાચો યાદ રાખીને લખે છે. પરંતુ અચળાંક cને ક્યાં મૂકવો તે ભૂલી જાય છે. તે $m = \dfrac{m_0}{(1-\upsilon^2)^{1/2}}$ લખે છે. અનુમાન કરો કે cને ક્યાં મૂકવો જોઈએ ?

2.16 પરમાણ્વીય માપક્રમની લંબાઈનો સુવિધાજનક એકમ ઍન્ગસ્ટ્રોમ છે અને તેને Å : 1 Å = 10^{-10} m દ્વારા દર્શાવાય છે. હાઇડ્રોજન પરમાણુનો વિસ્તાર 0.5 Å છે, તો એક મોલ હાઇડ્રોજન પરમાણુઓનું આણ્વીક કદ m^3માં કેટલું થશે ?

2.17 એક મોલ આદર્શ વાયુ પ્રમાણભૂત તાપમાને અને દબાણે 22.4 L જગ્યા (મોલર કદ) રોકે છે, તો 1 મોલ હાઇડ્રોજન વાયુ માટે મોલર કદ અને પરમાણ્વીક કદનો ગુણોત્તર શું થશે ? શા માટે આ ગુણોત્તર ઘણો મોટો છે ? (હાઇડ્રોજન અણુનું પરિમાણ 1 Å જેટલું લો.)

2.19 નજીક દેખાતા બે તારા (Stars)નું અંતર માપવા માટે પરિચ્છેદ 2.3.1ની દષ્ટિસ્થાનભેદની રીતના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. સૂર્યની આસપાસ પોતાની ભ્રમણ કક્ષામાં છ મહિનાના સમય અંતરાલમાં પૃથ્વીનાં બે સ્થાનોને જોડતી આધાર રેખા AB છે એટલે કે આધાર રેખા પૃથ્વીની કક્ષાના વ્યાસ $\approx 3 \times 10^{11}$ m જેટલી લગભગ છે. જોકે નજીક રહેલા બે તારા એટલા દૂર છે કે આટલી લાંબી આધાર રેખા હોવા છતાં તેઓ 1″ (સેકન્ડ) જેટલો ચાપનો (Arc) દષ્ટિસ્થાનભેદ દર્શાવે છે. ખગોળીય સ્તર પર લંબાઈનો સુવિધાજનક એકમ પાર્સેક છે. પાર્સેક કોઈ પદાર્થનું અંતર સૂચવે છે કે જે પૃથ્વી અને સૂર્ય વચ્ચેનાં

અંતર જેટલી આધાર રેખાના બે છેડાઓએ આંતરેલ ખૂણો 1 ″(Second Arc) બરાબર હોય. એક પાર્સેકનું મૂલ્ય મીટરમાં કેટલું થશે ?

2.20 આપણા સૂર્યમંડળમાં નજીકનો તારો 4.29 પ્રકાશવર્ષ દૂર છે. પાર્સેકમાં આ અંતર કેટલું થશે ? સૂર્યની આસપાસ પોતાની ભ્રમણકક્ષામાં છ મહિનામાં સમય અંતરાલે પૃથ્વીનાં બે સ્થાનો પરથી આ તારા (આલ્ફા સેન્ટૉરી નામ ધરાવતો)ને જોવામાં આવે, તો તે કેટલો કોણ (દૃષ્ટિસ્થાનભેદ કોણ) આંતરશે ?

2.21 ભૌતિકરાશિઓનાં માપનમાં સચોટતા હોવી તે વિજ્ઞાનની આવશ્યકતા છે. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ વિમાનની ઝડપ નક્કી કરવા માટે ખૂબ જ સૂક્ષ્મ સમય અંતરાલોએ તેનાં સ્થાન નક્કી કરવા માટે એક ચોક્કસ પદ્ધતિ હોવી જોઈએ. બીજા વિશ્વયુદ્ધમાં રડારની શોધ પાછળ આ જ પ્રયોજન હતું. આધુનિક વિજ્ઞાનમાં એવાં જુદાં જુદાં ઉદાહરણો વિશે વિચારો જેમાં લંબાઈ, સમય, દ્રવ્યમાન વગેરેનાં સચોટ માપનની આવશ્યકતા હોય છે. જોકે આ ઉપરાંત શક્ય હોય ત્યાં, સચોટતાના માત્રાત્મક વિચારો આપી શકો છો.

2.22 જે રીતે વિજ્ઞાનમાં સચોટ માપન જરૂરી છે તેવી જ રીતે અલ્પવિકસિત વિચારો તથા સામાન્ય માપનો દ્વારા રાશિનો સામાન્ય અંદાજ લગાવવો તેટલું જ મહત્ત્વનું છે. નીચે આપેલા અનુમાન લગાવી શકાય તે માટેનાં ઉપાયો વિચારો (જ્યાં અનુમાન મેળવવાનું અઘરું લાગે ત્યાં રાશિઓની મહત્તમ મર્યાદા (upper bound) મેળવવાનો પ્રયત્ન કરો.

(a) વર્ષાઋતુના સમયમાં ભારત ઉપર છવાયેલ વરસાદી વાદળોનું કુલ દ્રવ્યમાન
(b) કોઈ હાથીનું દ્રવ્યમાન
(c) કોઈ આંધી દરમિયાન પવનની ઝડપ
(d) તમારા માથાના વાળની સંખ્યા
(e) તમારા વર્ગખંડમાં વાયુના અણુઓની સંખ્યા

2.23 સૂર્ય એક ગરમ પ્લાઝમા (આયનીકૃત દ્રવ્ય) છે જેની અંદરનો ગર્ભ (Core)નું તાપમાન 10^7 Kથી વધારે અને બાહ્ય પૃષ્ઠનું તાપમાન 6000 K છે. આટલા ઊંચા તાપમાને કોઈ પણ પદાર્થ ઘન કે પ્રવાહી અવસ્થામાં રહી શકે નહિ. સૂર્યની દળઘનતા, ઘન અને પ્રવાહી અથવા વાયુની ઘનતાઓમાંથી કયા વિસ્તારમાં હોવાની તમને ધારણા છે ? તમારું અનુમાન સાચું છે તેની ચકાસણી નીચે આપેલ માહિતી પરથી નક્કી કરી શકો છે. સૂર્યનું દળ $= 2.0 \times 10^{30}$ kg, સૂર્યની ત્રિજ્યા 7.0×10^8 m

2.24 જ્યારે જ્યુપિટર (ગુરુ) ગ્રહ પૃથ્વીથી 824.7 મિલિયન કિલોમીટર દૂર હોય છે ત્યારે તેના કોણીય વ્યાસનું માપ 35.72″ (આર્ક સેકન્ડ) છે, તો જ્યુપિટરનો વ્યાસ શોધો.

વધારાનું સ્વાધ્યાય

2.25 વરસાદમાં એક વ્યક્તિ υ ઝડપથી ચાલી રહી છે. તેને તેની છત્રી શિરોલંબ દિશા સાથે આગળ તરફ θ કોણે નમાવી રાખેલ છે. એક વિદ્યાર્થી θ અને υ વચ્ચેનો સંબંધ $\tan \theta = \upsilon$ મેળવે છે અને તે અપેક્ષા મુજબ $\upsilon \to 0$, $\theta \to 0$ની મર્યાદામાં આ સંબંધને ચકાસે છે.
(આપણે ધારી લઈએ કે પવન પ્રબળ નથી અને વરસાદ શિરોલંબ પડી રહ્યો છે.) તમે વિચારી શકો કે આ સંબંધ સાચો હોઈ શકે ? જો નથી તો આવા કારણનું અનુમાન કરો.

2.26 એવો દાવો કરવામાં આવે છે કે જો કોઈ પણ જાતની ખલેલ વગર 100 વર્ષ સુધી બે સિઝિયમ ઘડિયાળોને ચલાવવામાં આવે, તો તેમના સમયમાં માત્ર 0.02 sનો તફાવત જોવા મળે છે. 1 sનો સમય અંતરાલ માપવા માટે આ પ્રમાણભૂત ઘડિયાળોની ચોકસાઈ શું સૂચવે છે ?

2.27 સોડિયમ પરમાણુની સરેરાશ દળઘનતાનો અંદાજ કરો. ધારી લો કે તેનું પરિમાણ 2.5 Å જેટલું છે. (એવોગેડ્રો અંક અને સોડિયમના પરમાણ્વીય દળનાં જાણીતાં મૂલ્યોનો ઉપયોગ કરો.) સોડિયમનાં સ્ફટિક સ્વરૂપની ઘનતા 970 kg m^{-3} સાથે તેની સરખામણી કરો. શું બંને ઘનતાનું માન સમાન ક્રમનું છે ? જો હા તો શા માટે ?

2.28 ન્યુક્લિયર માપક્રમ પર લંબાઈનો અનુકૂળ એકમ ફર્મી છે. 1 fm $= 10^{-15}$ m છે. ન્યુક્લિયસનું પરિમાણ નીચે આપેલ આનુભાવિક સમીકરણને સામાન્ય રીતે અનુસરે છે. $r = r_0 A^{\frac{1}{3}}$

જ્યાં r ન્યુક્લિયસની ત્રિજ્યા, A તેનો પરમાણુ-દળાંક અને r_0 અચળાંક છે જે 1.2 fm જેટલો લગભગ

છે. દર્શાવો કે આ નિયમ સૂચવે છે કે વિભિન્ન ન્યુક્લિયસોની દળઘનતા લગભગ અચળ હોય છે. સોડિયમના ન્યુક્લિયસ માટે દળઘનતાની ગણતરી કરો. સ્વાધ્યાય 2.27માં મેળવેલ સોડિયમ પરમાણુની દળઘનતા સાથે તેની સરખામણી કરો.

2.29 લેસર (LASER) પ્રકાશનો અત્યંત તીવ્ર, એકરંગી તથા એકદીશ કિરણપુંજનો સ્રોત છે. લેસરના આ ગુણોનો ઉપયોગ લાંબાં અંતરોનાં માપન માટે કરવામાં આવે છે. લેસરનો પ્રકાશીય સ્રોત તરીકે ઉપયોગ કરીને પૃથ્વીથી ચંદ્રનું અંતર ખૂબ જ સચોટતાપૂર્વક મપાઈ ચૂક્યું છે. લેસર પ્રકાશીય પુંજ ચંદ્રની સપાટીથી પરાવર્તન પામી 2.56 sમાં પાછો આવે છે. પૃથ્વીની ફરતે ચંદ્રની કક્ષા (Lunar orbit)ની ત્રિજ્યા કેટલી હશે ?

2.30 પાણીની નીચે રહેલી વસ્તુઓને શોધવા માટે તેમજ તેમનાં સ્થાન નક્કી કરવા માટે SONAR (Sound Navigation And Ranging)માં અલ્ટ્રાસોનિક તરંગોનો ઉપયોગ થાય છે. એક સબમરીન SONAR થી સુસજ્જ છે. જેના દ્વારા ઉત્પન્ન થતાં સંશોધક તરંગ (Probe Wave) અને દુશ્મન સબમરીન પરથી પરાવર્તિત તેના પ્રતિધ્વનીની પ્રાપ્તિ વચ્ચેનો સમય વિલંબ 77.0 s છે, તો શત્રુની સબમરીન કેટલી દૂર હશે ? (પાણીમાં ધ્વનિની ઝડપ 1450 m s^{-1} લો.)

2.31 આપણા વિશ્વમાં આધુનિક ખગોળવિદો દ્વારા શોધાયેલ સૌથી દૂરનો પદાર્થ એટલો દૂર છે કે તેના દ્વારા ઉત્સર્જાયેલ પ્રકાશને પૃથ્વી સુધી પહોંચવા માટે અરબો વર્ષ લાગે છે. આ પદાર્થો (જેને ક્વાસાર 'Quasar' કહે છે.)નાં કેટલાંય રહસ્યમય લક્ષણો છે જેનો આજ સુધી સંતોષકારક રીતે સમજાવી શકાયાં નથી. આવા એક Quasarમાંથી ઉત્સર્જાતો પ્રકાશને આપણા સુધી પહોંચવા 3.0 અબજ વર્ષ (Billium Year) લાગે છે, તો તેનું અંતર kmમાં નક્કી કરો.

2.32 એ પ્રખ્યાત તથ્ય છે કે સંપૂર્ણ સૂર્યગ્રહણ વખતે ચંદ્ર Disk સૂર્યની Diskને પૂરેપૂરી ઢાંકી દે છે. આ તથ્ય અને ઉદાહરણ 2.3 અને 2.4નાં સૂચનોનો ઉપયોગ કરી ચંદ્રનો વ્યાસ શોધો.

2.33 આ શતાબ્દીના મહાન વૈજ્ઞાનિક (પી. એ. એમ. ડિરાક) પ્રકૃતિના મૂળભૂત અચળાંકોનાં મૂલ્યો સાથે રમત રમીને આનંદ મેળવી રહ્યા હતા. ત્યારે તેમાં એમણે એક રોચક અવલોકન કર્યું. પરમાણ્વીય ભૌતિકના મૂળ અચળાંકો (જેમ કે ઇલેક્ટ્રૉનનું દળ, પ્રોટોનનું દળ) તથા ગુરુત્વીય અચળાંક G પરથી તેમને માલૂમ પડ્યું કે તે એક એવી સંખ્યા સુધી પહોંચી ગયા છે, જેને સમયનું પરિમાણ હતું. સાથે સાથે તે ખૂબ જ મોટી સંખ્યા હતી. જેનું માન વિશ્વનાં વર્તમાન અંદાજિત આયુષ્ય 15 અબજ વર્ષ (~15 B.Y.)ની નજીક હતું. આ પુસ્તકમાં આપેલ મૂળભૂત અચળાંકોને આધારે પ્રયત્ન કરો કે આ સંખ્યા (અથવા આવી જ કોઈ સંખ્યા જેનો તમે વિચાર કરો) બનાવી શકો છો ? જો વિશ્વનું આયુષ્ય અને આ સંખ્યાની સરખામણી આકસ્મિક હોય, તો મૂળભૂત અચળાંકોની અચળતા અંગે તે શું દર્શાવે છે ?