પ્રકરણ 4

સમતલમાં ગતિ (MOTION IN A PLANE)

4.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આગળના પ્રકરણમાં આપણે સુરેખ પથ પર પદાર્થની ગતિના વર્ણન માટે જરૂરી સ્થાન, સ્થાનાંતર, વેગ તેમજ પ્રવેગની સંકલ્પનાની વિચારણા કરી. આપણે જોયું કે એક પરિમાણમાં માત્ર બે જ દિશાઓની શક્યતા હોવાથી (+) ધન અને (–) ઋણ ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવાથી દિશાઓની કાળજી આપોઆપ લઈ શકાય છે. પરંતુ પદાર્થની ગતિનું દ્વિપરિમાણમાં (સમતલમાં) અથવા ત્રિપરિમાણમાં (અવકાશમાં) વર્ણન કરવા માટે ઉપર્યુક્ત ભૌતિકરાશિઓને દર્શાવવા માટે સદિશની જરૂર પડે છે. તેથી સૌપ્રથમ આપણે સદિશો વિશેની સમજૂતી મેળવવી જરૂરી છે. સદિશ એટલે શું ? સદિશનાં સરવાળા, બાદબાકી અને ગુણાકાર કેવી રીતે કરવાં ? સદિશને વાસ્તવિક સંખ્યાથી ગુણતાં શું પરિણામ મળશે ? આ બધું આપણે એટલા માટે શીખીશું કે જેથી સમતલમાં પદાર્થના વેગ તેમજ પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે સદિશનો ઉપયોગ કરી શકીએ. ત્યાર બાદ આપણે સમતલમાં પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરીશું. સમતલમાં ગતિના સાદા કિસ્સા તરીકે આપણે અચળ પ્રવેગી ગતિ તથા વિગતવાર રીતે પ્રક્ષિપ્ત ગતિની ચર્ચા કરીશું. ગતિના પ્રચલિત પ્રકાર વર્તુળાકાર ગતિનું રોજબરોજના જીવનમાં ખાસ મહત્ત્વ હોવાથી આપણે નિયમિત વર્તુળગતિનો વિગતવાર અભ્યાસ કરીશું.

આ પ્રકરણમાં સમતલમાંની ગતિ માટે મેળવેલાં સમીકરણોને સહેલાઈથી ત્રિપરિમાણીક ગતિનાં સમીકરણોમાં વિસ્તારિત કરી શકાય છે.

4.2 અદિશ અને સદિશ (SCALARS AND VECTORS)

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે રાશિઓનું અદિશ અથવા સદિશ તરીકે વર્ગીકરણ કરી શકીએ. મૂળભૂત ફરક એટલો છે કે અદિશ રાશિઓ સાથે દિશા સંકળાયેલી નથી જ્યારે સદિશ રાશિઓ સાથે **દિશા** સંકળાયેલી છે. અદિશ રાશિને ફક્ત મૂલ્ય (માન) હોય છે. તેને મૂલ્ય દર્શાવતી સંખ્યા અને યોગ્ય એકમ સાથે સંપૂર્ણપણે દર્શાવી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે : બે બિંદુઓ વચ્ચે અંતર, પદાર્થનું દળ, શરીરનું તાપમાન અને તે સમય કે જ્યારે કોઈ ઘટના બની હોય. અદિશ રાશિઓનું સંયોજન સામાન્ય બીજગણિતના નિયમોને અનુસરે છે. સામાન્ય સંખ્યાઓ જેમ જ અદિશ રાશિઓનાં સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર

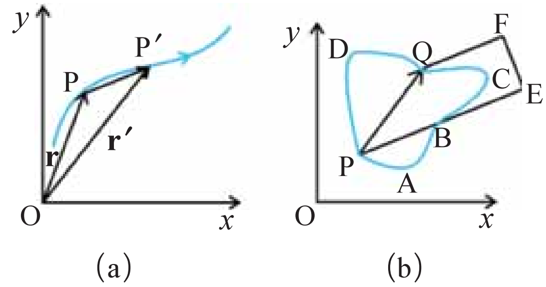
અને ભાગાકાર થઈ શકે છે.* ઉદાહરણ તરીકે એક લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે 1.0 m અને 0.5 m હોય, તો તેની પરિમિતિ તેની ચારેય બાજુઓની લંબાઈના સરવાળા 1.0 m + 0.5 m + 1.0 m + 0.5 m = 3.0 m જેટલી થાય. દરેક બાજુની લંબાઈ અદિશ રાશિ છે તથા પરિમિતિ પણ અદિશ રાશિ છે. એક બીજું ઉદાહરણ લઈએ : કોઈ એક દિવસનું મહત્તમ અને લઘુતમ તાપમાન અનુક્રમે 35.6 °C અને 24.2 °C છે. આથી, આ બંને તાપમાનો વચ્ચેનો તફાવત 11.4 °C થશે. તે જ રીતે ઍલ્યુમિનિયમના એક નિયમિત સમઘનની દરેક બાજુની લંબાઈ 10 cm હોય અને તેનું દળ 2.7 kg હોય, તો તેનું કદ 10^{-3} m^3 (અદિશ) તથા તેની ઘનતા 2.7×10^3 kg m^{-3} (અદિશ) થશે.

જે રાશિઓ વિશેની સંપૂર્ણ માહિતી મેળવવા માટે તેમના માન ઉપરાંત દિશાની પણ જરૂર પડતી હોય, તેવી રાશિઓને **સદિશ રાશિઓ** કહે છે તથા તે **સરવાળા માટેના ત્રિકોણનો નિયમ** અથવા **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ**નું પાલન કરે છે. આમ, કોઈ સદિશના માનને સંખ્યા આપીને તથા તેની દિશા આપીને સદિશને રજૂ કરી શકાય છે. કેટલીક ભૌતિકરાશિઓ કે જેમને સદિશ સ્વરૂપે રજૂ કરવામાં આવે છે તે સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ અને બળ છે.

સદિશને રજૂ કરવા માટે આપણે આ પુસ્તકમાં ઘાટા (Bold) અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીશું. આમ, વેગ સદિશને **v** સંજ્ઞા વડે દર્શાવી શકાય. પરંતુ હાથથી લખતી વખતે ઘાટા અક્ષરો લખવા થોડા મુશ્કેલ હોવાથી સદિશ રાશિની સંજ્ઞા ઉપર તીર મૂકીને પણ દર્શાવાય છે જેમકે, $\vec{v}$. આમ, **v** અને $\vec{v}$ બંને વેગ સદિશને રજૂ કરે છે. કોઈ સદિશના માનને ઘણી વાર 'નિરપેક્ષ મૂલ્ય' પણ કહીએ છીએ. તેને $|\mathbf{v}| = v$ વડે દર્શાવાય છે. આમ, એક સદિશને આપણે ઘાટા અક્ષરો જેમકે **A, a, p, q, r, ... x, y** વડે રજૂ કરીએ છીએ જ્યારે તેના માનને આછા અક્ષરો વડે અનુક્રમે A, a, p, q, r, ... x, y વડે દર્શાવી શકાય.

4.2.1 સ્થાન અને સ્થાનાંતર સદિશો (Position and Displacement Vectors)

કોઈ સમતલમાં ગતિમાન પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવા માટે આપણે અનુકૂળતા ખાતર કોઈ બિંદુ 'O'ને (ઉગમ બિંદુ) (સંદર્ભ બિંદુ) તરીકે લઈશું. ધારો કે કોઈ t અને t' સમયે વસ્તુનું સ્થાન અનુક્રમે P અને P′ છે (આકૃતિ 4.1.(a)). જો આપણે બિંદુ P ને O સાથે જોડતી રેખા દોરીએ, તો મળતી રેખા **OP** પદાર્થનો t સમયે સ્થાનસદિશ દર્શાવે છે. આ રેખાના છેડા પર એક તીરનું નિશાન દોરવામાં આવે છે. તેને (રેખાને) કોઈ એક ચિહ્ન **r** થી દર્શાવવામાં આવે છે, એટલે કે **OP** = **r**. તે જ રીતે બિંદુ P′ને બીજા સ્થાનસદિશ **OP′** એટલે કે **r′** વડે દર્શાવાય છે. સદિશ **r** ની લંબાઈ સદિશનું માન દર્શાવે છે અને તેની દિશા, બિંદુ Oથી જોતાં P જ્યાં આવેલું છે તે તરફની હોય છે. જો પદાર્થ P થી P′ સુધી જાય, તો (t સમયે) બિંદુ P પરથી (t' સમયે) બિંદુ P′ સુધીની ગતિને અનુલક્ષીને સદિશ **PP′** (જેની પુચ્છ P પર અને શીર્ષ P′ હોય)ને **સ્થાનાંતર સદિશ** કહેવાય છે.



આકૃતિ 4.1 (a) *સ્થાન તથા સ્થાનાંતર સદિશો*
(b) *સ્થાનાંતર સદિશ* **PQ** *તથા ગતિના જુદા જુદા માર્ગ*

અત્રે અગત્યની નોંધવા જેવી બાબત એ છે કે, 'સ્થાનાંતર સદિશ'ને એક સુરેખા વડે દર્શાવાય છે જે પદાર્થની પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિને જોડે છે તથા તે વાસ્તવિક પથ પર આધાર રાખતું નથી જેના પર પદાર્થ ખરેખર ગતિ કરતો હોય. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 4.1(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રારંભિક સ્થિતિ P અને અંતિમ સ્થિતિ Qની વચ્ચે સ્થાનાંતર સદિશ **PQ**, જુદા જુદા ગતિમાર્ગો PABCQ, PDQ કે PBEFQ માટે સમાન જ રહેશે. તેથી **કોઈ પણ બે બિંદુઓની વચ્ચે સ્થાનાંતર સદિશનું માન ગતિમાન પદાર્થની પથલંબાઈ જેટલું અથવા તેનાથી ઓછું હશે.** આ હકીકત અગાઉના પ્રકરણમાં સુરેખ પથ પર પદાર્થની ગતિ દરમિયાન પણ આપણે સારી રીતે સમજી ચૂક્યાં છીએ.

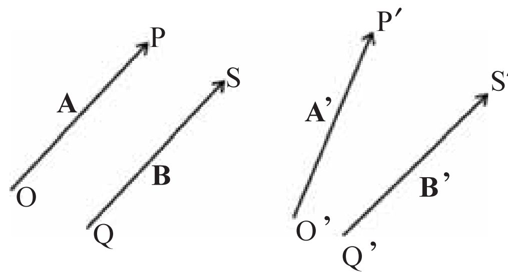
4.2.2 સદિશોની સમાનતા (Equality of Vectors)

જો બે સદિશો **A** અને **B**નાં માન અને દિશા સમાન હોય, તો તેવા સદિશોને સમાન સદિશો કહે છે.**

આકૃતિ 4.2(a)માં બે સમાન સદિશો **A** તથા **B**ને દર્શાવેલ છે. આપણે તેની સમાનતા સરળતાથી ચકાસી શકીએ છીએ. હવે **B**ને તેને પોતાને સમાંતર એવી રીતે ખસેડો કે જેથી તેની પૂચ્છ Q, સદિશ **A**ની પૂચ્છ O પર સંપાત થાય. હવે તેમના શીર્ષ S અને P

* *અદિશ રાશિઓનાં સરવાળા અને બાદબાકી ફક્ત સમાન એકમો ધરાવતી રાશિઓ માટે જ શક્ય છે. જ્યારે ગુણાકાર કે ભાગાકાર જુદા જુદા એકમો ધરાવતી અદિશ ભૌતિકરાશિઓ માટે કરી શકાય.*

** *આપણા અભ્યાસમાં, સદિશોને કોઈ ચોક્કસ સ્થાન હોતું નથી. તેથી સદિશને તેના પોતાને સમાંતર સ્થાનાંતરિત કરાવતાં તે સદિશ બદલાતો નથી. આવા સદિશોને મુક્ત સદિશો કહે છે. જોકે કેટલાક ભૌતિક ઉપયોગોમાં સદિશોની રેખા કે સ્થાન ઘણાં જ અગત્યનાં છે. આવા સદિશોને સ્થાનિય સદિશો (Localised Vectors) કહે છે.*



(a) (b)

આકૃતિ 4.2 (a) *બે સમાન સદિશ* **A** *અને* **B** **(b)** *બે સદિશો* **A′** *અને* **B′** *અસમાન છે છતાં તેમની લંબાઈ સમાન છે.*

પણ સંપાત થતાં હોવાથી બંને સદિશો સમાન સદિશો કહેવાશે. સામાન્ય રીતે આ સમાનતાને **A** = **B** વડે દર્શાવાય છે. એ બાબત પર ધ્યાન આપો કે આકૃતિ 4.2(b)માં સદિશો **A′** અને **B′**ના માન સમાન હોવા છતાં તે સમાન સદિશો નથી કારણ કે તેમની દિશાઓ જુદી જુદી છે. **B′**ને તેને પોતાને સમાંતર એવી રીતે ખસેડો કે જેથી તેની પૂચ્છ Q′, સદિશ **A′**ની પુચ્છ O′ પર સંપાત થાય પરંતુ સદિશ **B′**નું શીર્ષ S′, **A′**નું શીર્ષ P′ પર સંપાત થતું નથી.

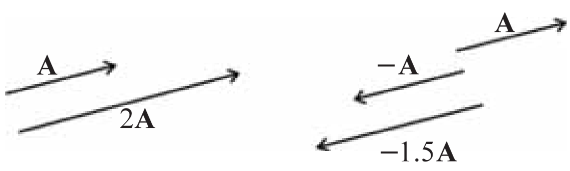
4.3 વાસ્તવિક સંખ્યા વડે સદિશોનો ગુણાકાર (MULTIPLICATION OF VECTORS BY REAL NUMBERS)

કોઈ સદિશ **A**નો ધન સંખ્યા λ સાથે ગુણાકાર કરતાં મળતાં સદિશનું મૂલ્ય λ ગણું થાય છે પરંતુ તેની દિશા સદિશ **A** ની દિશામાં જ રહે છે.

$$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda |\mathbf{A}| \text{ જો } \lambda > 0$$

ઉદાહરણ તરીકે, જો **A**ને 2 વડે ગુણવામાં આવે તો આકૃતિ 4.3 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ પરિણામી સદિશ 2**A** થશે જેની દિશા **A**ની દિશામાં જ હશે તથા માન |**A**| કરતાં બમણું થશે.

સદિશ **A**ને કોઈ ઋણ સંખ્યા λ વડે ગુણવામાં આવે, તો સદિશ λ**A** પ્રાપ્ત થશે જેની દિશા **A**ની દિશાની વિરુદ્ધમાં હશે અને માન |**A**| કરતાં −λ ગણું હશે.



(a) (b)

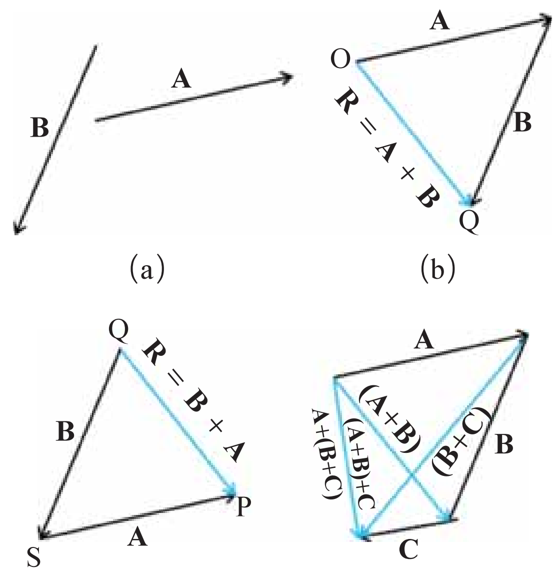
આકૃતિ 4.3 (a) *સદિશ* **A** *અને* **A***ને ધન સંખ્યા 2થી ગુણવાથી મળતો પરિણામી સદિશ* (b) *સદિશ* **A** *અને તેને ઋણ સંખ્યાઓ −1 અને −1.5થી ગુણતાં મળતા પરિણામી સદિશ*

જો કોઈ સદિશ **A**ને ઋણ સંખ્યા, ધારો કે −1 અને −1.5 વડે ગુણવામાં આવે, તો મળતા પરિણામી સદિશ આકૃતિ 4.3(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ મળશે.

સદિશ **A** સાથે ગુણાકારમાં લેવાતો ગુણાંક λ ભૌતિક પરિમાણ ધરાવતો અદિશ પણ હોઈ શકે છે. તેથી પરિણામી સદિશ λ**A**ના પરિમાણ, λ અને **A** પરિમાણોનો ગુણાકાર છે. દા.ત., અચળ વેગનો સમયગાળા સાથેનો ગુણાકાર, સ્થાનાંતર સદિશ આપે છે.

4.4 સદિશોનાં સરવાળા અને બાદબાકી - આલેખની રીત (ADDITION AND SUBTRACTION OF VECTORS) (GRAPHICAL METHOD)

પરિચ્છેદ 4.2માં ઉલ્લેખ કર્યા મુજબ સદિશો, વ્યાખ્યા મુજબ સરવાળા માટેનો ત્રિકોણના નિયમ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમનું પાલન કરે છે. હવે આપણે સરવાળા માટેના આ નિયમો આલેખની રીતથી સમજીશું. આકૃતિ 4.4(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક સમતલમાં રહેલા બે સદિશો **A** અને **B**નો વિચાર કરો. આ સદિશોને દર્શાવતાં રેખાખંડોની લંબાઈ સદિશોના માનના સમપ્રમાણમાં છે. **A** + **B** સરવાળો મેળવવા માટે આકૃતિ 4.4(b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર આપણે સદિશ **B**ને એવી રીતે ગોઠવીશું કે જેથી તેની પુચ્છ સદિશ **A**ના શીર્ષ પર હોય. ત્યાર બાદ આપણે **A**ની પુચ્છને **B**ના શીર્ષ સાથે જોડીશું. આ રેખા OQ, પરિણામી સદિશ **R** દર્શાવે છે, જે સદિશો **A** અને **B**નો સરવાળો છે. સદિશોના સરવાળાની આ પ્રક્રિયામાં



(a) (b) (c) (d)

આકૃતિ 4.4 (a) *સદિશ* **A** *અને* **B** *સદિશો* (b) **A** *અને* **B***ના સરવાળા માટે આલેખીય રીત* (c) *સદિશો* **B** *અને* **A***ના સરવાળા માટે આલેખીય રીત* (d) *સદિશોના સરવાળા માટે જૂથના નિયમનું ઉદાહરણ*

કોઈ એકના શીર્ષ પર બીજાના પુચ્છને ગોઠવતા હોવાથી આ આલેખીય રીતને **શીર્ષથી પુચ્છ રીત** પણ કહે છે. સદિશોના સરવાળાની આ રીતમાં બે સદિશો અને તેમનો પરિણામી સદિશ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની રચના કરતાં હોવાથી તેને **સદિશ સરવાળાની ત્રિકોણની રીત** પણ કહે છે. જો આપણે આકૃતિ 4.4(c)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે **B** + **A**નો પરિણામી સદિશ પ્રાપ્ત કરીશું તો તે સદિશ **R** જ મળશે. આમ, સદિશોનો સરવાળો **ક્રમના નિયમ**નું પાલન કરે છે.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad (4.1)$$

સદિશોનો સરવાળો **જૂથના નિયમ**નું પણ પાલન કરે છે જે આકૃતિ 4.4(d)માં દર્શાવેલ છે. પ્રથમ સદિશો **A** અને **B**નો સરવાળો કરી તેમાં સદિશ **C** ઉમેરતાં તે જ પરિણામ છે જે સદિશો **B** અને **C**નો પ્રથમ સરવાળો કરી તેમાં સદિશ **A** ઉમેરતાં મળતું હોય. આમ,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \qquad (4.2)$$

સમાન અને વિરોધી બે સદિશોનો સરવાળો કરતાં શું પરિણામ મળે ? આકૃતિ 4.3(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે સદિશો **A** અને −**A**નો વિચાર કરો. તેમનો સરવાળો **A** + (−**A**) થશે. અહીં બંને સદિશોના માન સમાન હોવા છતાં તે પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી પરિણામી સદિશનું માન શૂન્ય મળશે. તેને **શૂન્ય સદિશ (Null Vector)** કહે છે અને **0** વડે દર્શાવાય છે.

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{0}| = 0 \qquad (4.3)$$

શૂન્ય સદિશનું મૂલ્ય શૂન્ય હોવાથી તેની દિશા દર્શાવી શકાય નહિ.

કોઈ સદિશ **A**ને શૂન્ય સંખ્યા વડે ગુણતાં પણ આપણને શૂન્ય સદિશ મળે છે. **0** સદિશ (શૂન્ય સદિશ)ના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

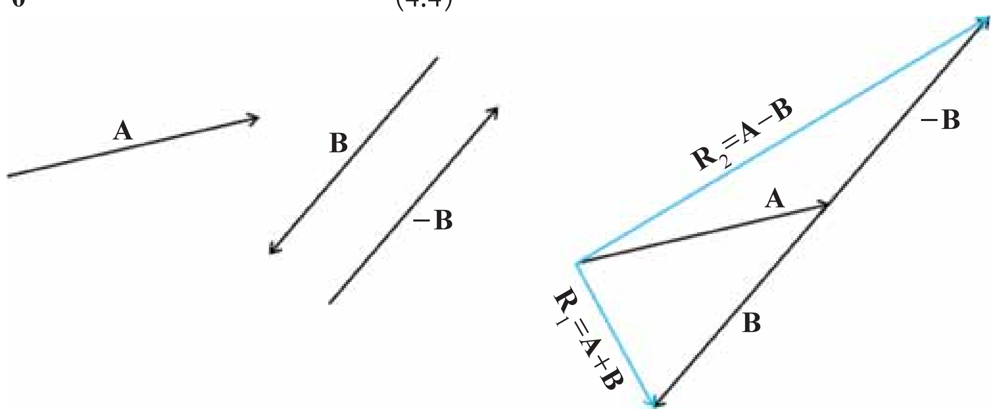
$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (4.4)$$

શૂન્ય સદિશનો ભૌતિક અર્થ શું છે ? આકૃતિ 4.1(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમતલમાં સ્થાનસદિશ અને સ્થાનાંતર સદિશનો વિચાર કરો. હવે, ધારો કે t સમયે બિંદુ P પાસે રહેલો એક પદાર્થ ગતિ કરીને P′ સુધી પહોંચે છે અને ત્યાંથી ફરી પાછો P પાસે આવે છે, તો તેનું સ્થાનાંતર કેટલું હશે ? અહીં તેનું પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાન એક જ હોવાથી તેનું સ્થાનાંતર 'શૂન્ય સદિશ' મળશે.

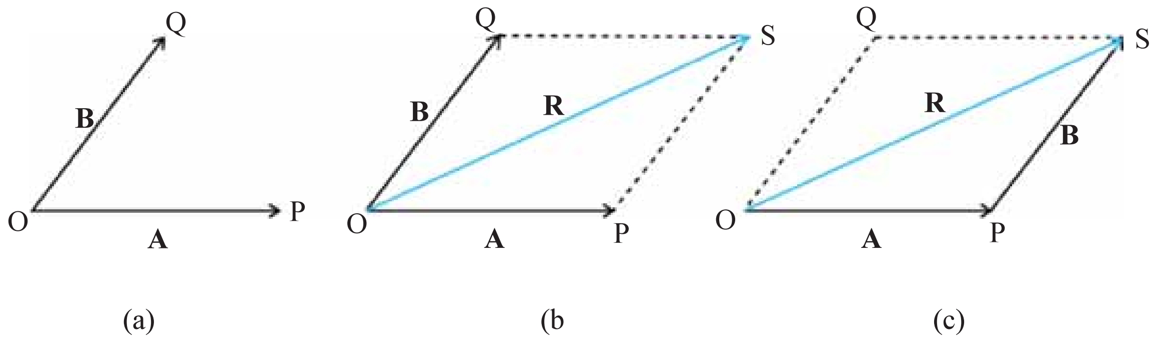
સદિશોની બાદબાકી (Subtraction of Vectors)ને સદિશોના સરવાળા સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. બે સદિશો **A** અને **B**ના તફાવતને આપણે બે સદિશો **A** અને −**B**ના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકીએ :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (4.5)$$

જે આકૃતિ 4.5માં દર્શાવેલ છે. સદિશ −**B**ને સદિશ **A**માં ઉમેરતાં $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})$ મળે છે. સરખામણી માટે આ આકૃતિમાં સદિશ $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ પણ દર્શાવેલ છે. આપણે સદિશોનો સરવાળો કરવા માટે **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત**નો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ. ધારો કે આપણી પાસે બે સદિશો **A** અને **B** છે. તેમનો સરવાળો કરવા માટે બંને સદિશોના પુચ્છ આકૃતિ 4.6(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક જ બિંદુ O પર લાવીશું. હવે, આપણે **A**ના શીર્ષથી **B**ને સમાંતર એક રેખા દોરીશું તથા **B**ના શીર્ષથી **A**ને સમાંતર એક બીજી રેખા દોરી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ OQSP પૂર્ણ કરીશું. જે બિંદુ પર આ બંને રેખાઓ એકબીજીને છેદે છે તેને ઊગમબિંદુ O સાથે જોડી દો. પરિણામી સદિશ **R**ની દિશા સામાન્ય ઊગમબિંદુ Oથી છેદનબિંદુ S સુધી દોરેલ વિકર્ણ OSની દિશામાં મળે છે (આકૃતિ 4.6(b)). આકૃતિ 4.6(c)માં સદિશો **A** અને **B**નો પરિણામી સદિશ મેળવવા માટેનો ત્રિકોણનો નિયમ દર્શાવ્યો છે. બંને આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, બંને રીતોમાં સમાન પરિણામ મળે છે. એટલે કે બંને રીતો એકબીજાને સમતુલ્ય છે.

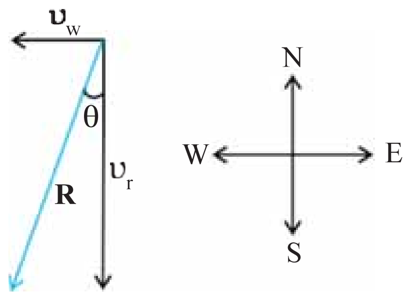


આકૃતિ 4.5 (a) *બે સદિશો* **A** *અને* **B**, −**B** *પણ દર્શાવેલ છે.* (b) *સદિશ* **A***માંથી* **B** *બાદ કરતાં પરિણામે* $\mathbf{R}_2$ *મળે છે. સરખામણી માટે સદિશો* **A** *અને* **B***નો સરવાળો* $\mathbf{R}_1$ *પણ દર્શાવ્યો છે.*



આકૃતિ 4.6 (a) *એક જ ઉગમબિંદુ પર પુચ્છ રહે તે રીતે દર્શાવેલ બે સદિશો* **A** *અને* **B** (b) *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતથી મેળવેલ સરવાળો* **A** + **B** (c) *બે સદિશોના સરવાળા માટેની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત, ત્રિકોણની રીતને સમતુલ્ય છે.*

▶ *ઉદાહરણ 4.1* વરસાદ શિરોલંબ દિશામાં 35 m s^{-1}ની ઝડપથી પડે છે. થોડા સમય બાદ હવા 12 m s^{-1}ની ઝડપે પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશામાં ફૂંકાવા લાગે છે. બસ-સ્ટેન્ડ પર ઉભેલા છોકરાએ પોતાની છત્રી કઈ દિશામાં રાખવી જોઈએ ?



આકૃતિ 4.7

ઉકેલ વરસાદ તથા હવાના વેગોને સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}_r$ તથા $\boldsymbol{\upsilon}_w$ વડે આકૃતિ 4.7માં દર્શાવ્યા છે. તેમની દિશાઓ પ્રશ્નમાં આપ્યા મુજબ દર્શાવેલ છે. સદિશોના સરવાળા માટેના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\boldsymbol{\upsilon}_r$ અને $\boldsymbol{\upsilon}_w$નો પરિણામી **R** આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ છે.

Rનું માન,

$$R = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2}\ \text{m s}^{-1} = 37\ \text{m s}^{-1}$$

જો પરિણામી સદિશ *R* શિરોલંબ દિશા સાથે θ ખૂણો બનાવતો હોય તો,

$$\tan\theta = \frac{\upsilon_w}{\upsilon_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

અથવા $\theta = \tan^{-1}(0.343) = 19^{\circ}$

આમ, છોકરાએ પોતાની છત્રી ઊર્ધ્વ સમતલમાં શિરોલંબ સાથે 19°ના ખૂણે પૂર્વ તરફ રાખવી જોઈએ. ◀

4.5 સદિશોનું વિભાજન (RESOLUTION OF VECTORS)

આકૃતિ 4.8માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક સમતલમાં જુદી જુદી દિશાઓમાં બે અશૂન્ય સદિશ **a** અને **b** તથા તે જ સમતલમાં બીજો એક સદિશ **A** ધ્યાનમાં લો. સદિશ **A**ને બે સદિશોના સરવાળારૂપે દર્શાવી શકાય જેમાંનો એક સદિશ, **a**ને કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા વડે ગુણીને મેળવેલ હોય અને બીજો સદિશ, **b**ને અન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા વડે ગુણીને મેળવેલ હોય. ઉપર્યુક્ત વિધાનને ચકાસવા માટે ધારો કે O અને P સદિશ **A**ના પુચ્છ અને શીર્ષ છે. Oમાંથી પસાર થતી અને **a**ને સમાંતર સુરેખા દોરો. તેવી જ રીતે Pમાંથી પસાર થતી તથા **b**ને સમાંતર સુરેખા દોરો. આ બંને સુરેખાઓના છેદનબિંદુને Q વડે દર્શાવવામાં આવે, તો

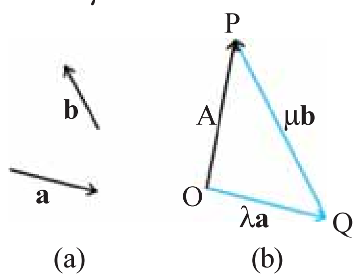
$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \tag{4.6}$$

પરંતુ **OQ** સદિશ **a**ને સમાંતર છે અને **QP** સદિશ **b**ને સમાંતર છે, તેથી

$$\mathbf{OQ} = \lambda\mathbf{a} \text{ અને } \mathbf{QP} = \mu\mathbf{b} \tag{4.7}$$

જ્યાં λ અને μ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

તેથી, $$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \tag{4.8}$$



આકૃતિ 4.8 (a) *બે અરેખીય સદિશો* **a** *અને* **b** (b) *સદિશ* **A***નું* **a** *અને* **b***નાં પદોમાં વિભાજન*

આમ, આપણે કહી શકીએ કે સદિશ **A**નું **a** અને **b**ની દિશામાં રહેલાં ઘટક સદિશો અનુક્રમે λ**a** અને μ**b**માં વિભાજન થયું છે. આ રીતનો ઉપયોગ કરીને આપણે આપેલ સદિશને

બે ઘટક સદિશોમાં વિભાજિત કરી શકીએ - ત્રણેય સદિશો એક જ સમતલમાં મળશે. લંબ યામાક્ષ પદ્ધતિમાં એકમ સદિશનો ઉપયોગ કરી સામાન્ય સદિશનું અક્ષોની દિશાઓમાં સરળતાથી વિભાજન કરી શકાય છે. જેની હવે આપણે ચર્ચા કરીશું.

એકમ સદિશ (Unit Vector) : એકમ સદિશ એવો સદિશ છે કે જેનું માન એક એકમ છે અને તે ચોક્કસ દિશાનું નિદર્શન કરે છે. તેને કોઈ એકમ કે પરિમાણ હોતાં નથી. તે ફક્ત દિશા દર્શાવવા માટે ઉપયોગી છે. લંબ યામાક્ષ પદ્ધતિમાં x, y અને z અક્ષની દિશામાંના એકમ સદિશોને અનુક્રમે $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ અને $\hat{\mathbf{k}}$ વડે દર્શાવાય છે, જે આકૃતિ 4.9(a)માં દર્શાવેલ છે.

આ દરેક એકમ સદિશો હોવાથી

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \qquad (4.9)$$

આ એકમ સદિશો એકબીજાને લંબ હોય છે. બીજા સદિશોથી તેમને અલગ તારવવા માટે આપણે આ પુસ્તકમાં તેમને ઘાટા અક્ષરોની ઉપર એક કૅપ (^) દ્વારા દર્શાવેલ છે. આ પ્રકરણમાં આપણે દ્વિપરિમાણમાં થતી ગતિની ચર્ચા કરતાં હોવાથી આપણને ફક્ત બે એકમ સદિશોની જરૂરિયાત પડશે. જો આપણે એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{n}}$ ને કોઈ અદિશ λથી ગુણીએ તો પરિણામી સદિશ $\lambda\hat{\mathbf{n}}$ મળશે. સામાન્ય રીતે કોઈ સદિશ **A**ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\ \hat{\mathbf{n}} \qquad (4.10)$$

જ્યાં, $\hat{\mathbf{n}}$ એ **A**ની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે.

આપણે કોઈ સદિશ **A**ને એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$ના ઘટક સદિશોમાં વિભાજિત કરી શકીએ છીએ. ધારો કે સદિશ **A** આકૃતિ 4.9(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $x - y$ સમતલમાં આવેલ છે. આકૃતિ 4.9(b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર સદિશ **A**ના શીર્ષ પરથી આપેલ અક્ષો પર આપણે લંબ દોરીશું. તેથી આપણને બે સદિશો $\mathbf{A}_1$ તથા $\mathbf{A}_2$ એ પ્રકારે મળશે કે જેથી $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$. $\mathbf{A}_1$ એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\mathbf{A}_2$ એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{j}}$ને સમાંતર હોવાથી,

$$\mathbf{A}_1 = A_x\hat{\mathbf{i}} \text{ તથા } \mathbf{A}_2 = A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.11)$$

જ્યાં A_x અને A_y વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

$$\text{આમ, } \mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.12)$$

જે આકૃતિ 4.9(c)માં દર્શાવેલ છે. રાશિ A_x અને A_yને સદિશ **A**ના x અને y ઘટકો કહે છે. અહીં ધ્યાન રાખો કે, A_x પોતે સદિશ નથી પરંતુ $A_x\hat{\mathbf{i}}$ સદિશ છે, તે જ રીતે $A_y\hat{\mathbf{j}}$ પણ સદિશ છે. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ કરી આપણે A_x અને A_yને **A**ના માનના સ્વરૂપમાં તથા તેના દ્વારા x-અક્ષ સાથે બનતા ખૂણા θ ના પદમાં દર્શાવી શકીએ :

$$A_x = A \cos\theta$$

$$A_y = A \sin\theta \qquad (4.13)$$

સમીકરણ (4.13) પરથી સ્પષ્ટ છે કે કોઈ સદિશનાં ઘટકો ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે જે ખૂણા θ ના મૂલ્ય પર આધારિત છે.

કોઈ સમતલમાં સદિશ Aને બે રીતે રજૂ કરી શકાય :

(i) તે સદિશનું માન A તથા તેના દ્વારા x-અક્ષ સાથે બનાવેલ ખૂણા θ વડે, અથવા

(ii) તેનાં ઘટકો A_x તથા A_y દ્વારા.

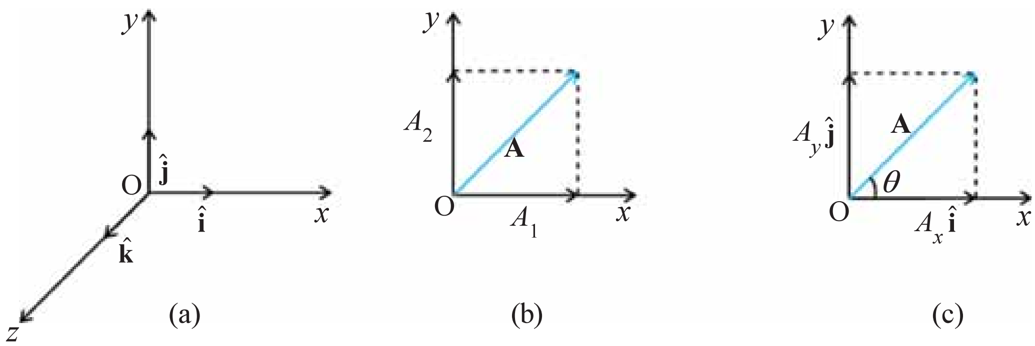
જો આપણે A અને θ જાણતાં હોઈએ તો A_x અને A_yનાં મૂલ્યો સમીકરણ (4.13) પરથી મેળવી શકાય છે. જો A_x અને A_y જાણતાં હોઈએ, તો A અને θનાં મૂલ્યો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય છે :

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta$$

$$= A^2$$

$$\text{અથવા } A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (4.14)$$

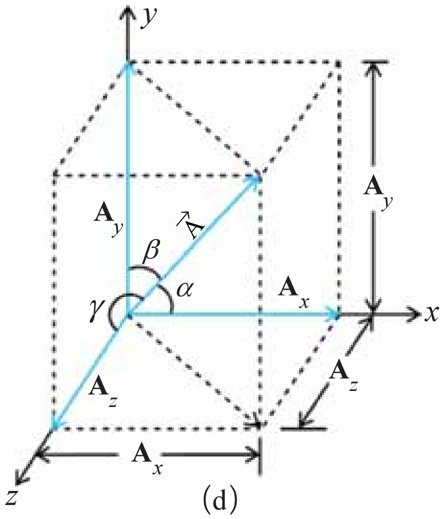
$$\text{અને } \tan\theta = \frac{A_y}{A_x},\quad \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \qquad (4.15)$$



આકૃતિ 4.9 (a) *એકમ સદિશો* $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ *અક્ષો* x, y, z*ની દિશામાં છે.* (b) *કોઈ સદિશ* **A***ને* x *અને* y *અક્ષોની દિશામાં અનુરૂપ ઘટકો* A_1 *તથા* A_2*માં વિભાજિત કરેલ છે.* (c) $\mathbf{A}_1$ *અને* $\mathbf{A}_2$*ને* $\hat{\mathbf{i}}$ *અને* $\hat{\mathbf{j}}$*નાં પદોમાં દર્શાવેલ છે.*

અત્યાર સુધી આપણે x–y સમતલમાં રહેલ સદિશ ધ્યાનમાં લીધેલ. આ જ પ્રક્રિયા દ્વારા કોઈ સદિશ **A**ને ત્રિપરિમાણમાં x, y અને z અક્ષો પર આવેલા ત્રણ ઘટકોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. આકૃતિ 4.9(d)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જો સદિશ **A**ના x, y તથા z અક્ષો સાથેના ખૂણાઓ* અનુક્રમે α, β અને γ હોય તો,

$$A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma \qquad (4.16a)$$



આકૃતિ **4.9** (d) સદિશ **A**નું x, y અને z અક્ષો પરનાં અનુરૂપ ઘટકોમાં વિભાજન

વ્યાપક રૂપે,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.16b)$$

સદિશ **A**નું માન,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (4.16c)$$

સ્થાન સદિશ **r**ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.17)$$

જ્યાં x, y અને z. **r**ના અનુક્રમે x, y અને z અક્ષ પરનાં ઘટકો છે.

4.6 સદિશોના સરવાળા : બૈજિક રીત (VECTOR ADDITION - ANALYTICAL METHOD)

આમ તો સદિશોના સરવાળા માટેની આલેખીય રીત આપણને સદિશો તથા તેના પરિણામી સદિશને સ્પષ્ટ રૂપે સમજવા માટે ઉપયોગી છે પરંતુ ક્યારેક આ પ્રક્રિયા કંટાળાજનક અને તેની ચોકસાઈ પણ મર્યાદિત હોય છે. આવા સંજોગોમાં સદિશ સરવાળાની બૈજિક રીત ખૂબ જ અનુકૂળ પડે છે. ધારો કે સદિશ **A** અને **B** એ x-y સમતલમાં આવેલા બે સદિશો છે અને તેમનાં ઘટકો A_x, A_y અને B_x, B_y છે માટે,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.18)$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}$$

જો તેમનો સરવાળો **R** હોય, તો

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}) \qquad (4.19a)$$

સદિશોના સરવાળા સમક્રમી છે અને તે જૂથના નિયમને અનુસરે છે, માટે આપણે સમીકરણ (4.19a)માં સદિશોને આપણને અનુકૂળ એવા જૂથમાં ગોઠવી શકીએ.

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.19b)$$

વળી $\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$ હોવાથી, (4.20)

$$R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y \qquad (4.21)$$

આમ, પરિણામી સદિશ **R**નો દરેક ઘટક એ સદિશ **A** અને **B**નાં અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

આ રીતે ત્રિપરિમાણમાં,

$$A = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$B = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$R = \mathbf{A} + \mathbf{B} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

જ્યાં, $R_x = A_x + B_x$

$$R_y = A_y + B_y$$

$$R_z = A_z + B_z \qquad (4.22)$$

આ રીતની મદદથી ગમે તેટલી સંખ્યાના સદિશોનો સરવાળો કે બાદબાકી કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે જો સદિશો **a**, **b** અને **c** નીચે પ્રમાણે આપેલ હોય :

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{c} = c_x\hat{\mathbf{i}} + c_y\hat{\mathbf{j}} + c_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.23a)$$

તો સદિશ **T** = **a** + **b** – **c**નાં ઘટકો,

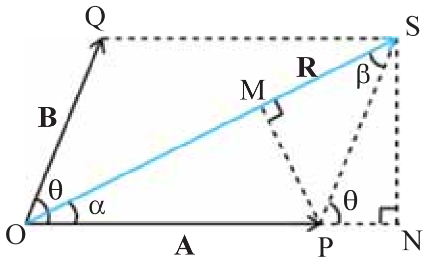
$$T_x = a_x + b_x - c_x$$

$$T_y = a_y + b_y - c_y \qquad (4.23b)$$

$$T_z = a_z + b_z - c_z$$

▶ *ઉદાહરણ 4.2* આપેલ સદિશો **A** અને **B**ના પરિણામી સદિશનું માન અને દિશા, તેમના માન અને તેમની વચ્ચેના ખૂણા θ ના પદમાં મેળવો.

* *અહીં નોંધો કે α, β અને γ અવકાશમાં રહેલા ખૂણાઓ છે. તે એવી બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાઓ છે જે એક જ સમતલમાં નથી.*



આકૃતિ 4.10

ઉકેલ આકૃતિ 4.10માં દર્શાવ્યા અનુસાર **OP** અને **OQ** બે સદિશો **A** અને **B**ને રજૂ કરે છે જેમની વચ્ચેનો ખૂણો θ છે. તો સદિશોના સરવાળા માટેની સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીત અનુસાર **OS** પરિણામી સદિશ **R** રજૂ કરે છે :

$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

SN, OPને લંબ છે તથા PM, OSને લંબ છે.

તેથી આકૃતિની ભૂમિતિ અનુસાર,

$OS^2 = ON^2 + SN^2$

પરંતુ, $ON = OP + PN = A + B\cos\theta$

$SN = B\sin\theta$

$OS^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$

અથવા, $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \quad (4.24a)$$

ΔOSNમાં, $SN = OS\sin\alpha = R\sin\alpha$, અને

ΔPSNમાં, $SN = PS\sin\theta = B\sin\theta$

તેથી $R\sin\alpha = B\sin\theta$

$$\text{અથવા, } \frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \quad (4.24b)$$

તે જ રીતે, $PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

$$\text{અથવા, } \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \quad (4.24c)$$

સમીકરણ (4.24b) અને (4.24c) પરથી,

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \quad (4.24d)$$

સમીકરણ (4.24d) પરથી આપણે નીચેનું સૂત્ર મેળવી શકીએ છીએ :

$$\sin\alpha = \frac{B}{R}\sin\theta \quad (4.24e)$$

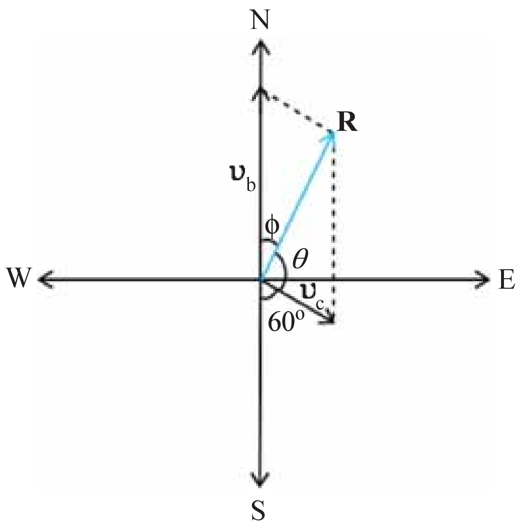
અહીં Rનું મૂલ્ય સમીકરણ (4.24a)માં આપેલ છે.

$$\text{અથવા, } \tan\alpha = \frac{SN}{OP + PN} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \quad (4.24f)$$

સમીકરણ (4.24a) પરિણામી સદિશનું માન અને સમીકરણો (4.24e) તથા (4.24f) તેની દિશા આપે છે. સમીકરણ (4.24a)ને **કોસાઈનનો નિયમ (Law of Cosines)** અને સમીકરણ (4.24d)ને **સાઈનનો નિયમ (Law of Sines)** કહે છે. ◀

▶ *ઉદાહરણ 4.3* એક મોટરબોટ ઉત્તર દિશામાં 25 km/h ના વેગથી ગતિ કરે છે અને આ વિસ્તારમાં પાણીના પ્રવાહનો વેગ 10 km/h છે. પાણીના પ્રવાહની દિશા દક્ષિણથી પૂર્વ તરફ 60^oના ખૂણે છે. મોટરબોટનો પરિણામી વેગ શોધો.

ઉકેલ આકૃતિ 4.11માં સદિશ $\mathbf{\upsilon_b}$ મોટરબોટનો વેગ તથા $\mathbf{\upsilon_c}$ પાણીના પ્રવાહનો વેગ દર્શાવે છે. પ્રશ્નમાં જણાવ્યા અનુસાર આકૃતિમાં તેમની દિશા દર્શાવેલ છે. સદિશોના સરવાળા માટેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ અનુસાર મળતાં પરિણામી સદિશ **R**ની દિશા આકૃતિમાં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 4.11

કોસાઈન નિયમ (Law of Cosines)નો ઉપયોગ કરી આપણે સદિશ **R**નું મૂલ્ય શોધી શકીએ છીએ.

$$R = \sqrt{\upsilon_b^2 + \upsilon_c^2 + 2\upsilon_b\upsilon_c\cos 120^o}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times25\times10(-1/2)} \cong 22 \text{ km/h}$$

દિશા શોધવા માટે આપણે સાઈન નિયમ (Laws of Sine)નો ઉપયોગ કરીશું.

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{\upsilon_c}{\sin\phi} \text{ અથવા } \sin\phi = \frac{\upsilon_c}{R}\sin\theta$$

$$= \frac{10\times\sin120^o}{21.8} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times21.8} \cong 0.397$$

$\phi \cong 23.4^o$ ◀

4.7 સમતલમાં ગતિ (MOTION IN A PLANE)

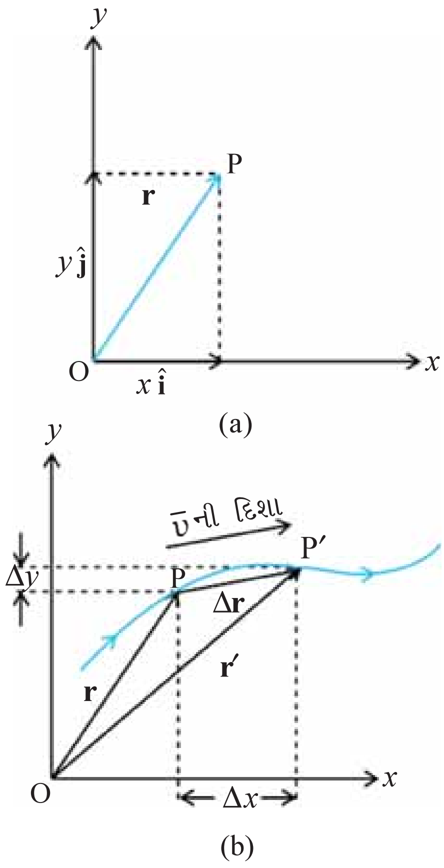
આ વિભાગમાં આપણે જોઈશું કે સદિશોના ઉપયોગથી કેવી રીતે દ્વિપરિમાણિક ગતિ વર્ણવી શકાય છે.

4.7.1 સ્થાન સદિશ અને સ્થાનાંતર (Position Vector and Displacement)

કોઈ સમતલમાં આવેલા કણ P નો x–y નિર્દેશ ફ્રેમના ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ $\mathbf{r}$ આ મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

જ્યાં x અને y અનુક્રમે સદિશ $\mathbf{r}$ના X-અક્ષ તથા Y-અક્ષ પરનાં ઘટકો એટલે કે કણના યામ છે.



આકૃતિ 4.12 (a) *સ્થાન સદિશ* $\mathbf{r}$ (b) *કણના સ્થાનાંતર* $\Delta\mathbf{r}$ *અને સરેરાશ વેગ* $\boldsymbol{\upsilon}$

ધારો કે, આકૃતિ (4.12b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ કણ જાડી રેખા દ્વારા દર્શાવેલ વક્ર પર ગતિ કરે છે અને તે t સમયે P પાસે તથા t' સમયે P′ પાસે પહોંચે છે. તેથી કણનું સ્થાનાંતર,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (4.25)$$

અને તેની દિશા P થી P′ તરફની છે.

સમીકરણ (4.25)ને આપણે સદિશોના ઘટકના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

$$\Delta\mathbf{r} = (x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}) - (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$$
$$= \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta x$$

જ્યાં, $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$ (4.26)

વેગ (Velocity)

પદાર્થના સ્થાનાંતર તથા તેને અનુરૂપ સમયગાળાના ગુણોત્તરને સરેરાશ વેગ ($\overline{\boldsymbol{\upsilon}}$) કહે છે.

$$\overline{\boldsymbol{\upsilon}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (4.27)$$

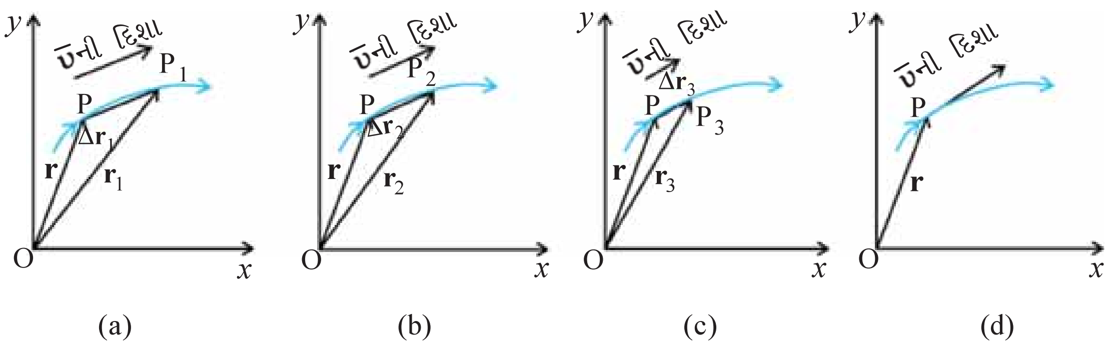
અથવા, $\overline{\boldsymbol{\upsilon}} = \overline{\upsilon}_x\hat{\mathbf{i}} + \overline{\upsilon}_y\hat{\mathbf{j}}$

$\overline{\boldsymbol{\upsilon}} = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ હોવાથી, આકૃતિ (4.12) અનુસાર સરેરાશ વેગની દિશા $\Delta\mathbf{r}$ની દિશામાં જ મળે છે. ગતિમાન પદાર્થનો **વેગ** (તાત્ક્ષણિક વેગ), સમયગાળો શૂન્ય તરફ જાય ($\lim_{\Delta t \to 0}$), ત્યારે મળતા સરેરાશ વેગનું સીમાન્ત મૂલ્ય છે.

એટલે કે,

$$\boldsymbol{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.28)$$

લક્ષની પ્રક્રિયાનો અર્થ આકૃતિ 4.13(a) થી (d) દ્વારા સહેલાઈથી સમજી શકાય છે. આ આકૃતિઓમાં જાડી રેખા પદાર્થનો ગતિપથ દર્શાવે છે, જે t સમયે P પાસે છે. P_1, P_2 અને P_3 અનુક્રમે Δt_1, Δt_2 અને Δt_3 સમયગાળા બાદ પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવે છે. Δt_1, Δt_2 અને Δt_3 સમય દરમિયાન પદાર્થના સ્થાનાંતરો અનુક્રમે $\Delta\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}_2$ અને $\Delta\mathbf{r}_3$ છે. આકૃતિ (a), (b)



આકૃતિ 4.13 સમયગાળો Δt *શૂન્ય લક્ષ તરફ જાય છે ત્યારે સરેરાશ વેગ પદાર્થના વેગ* $\boldsymbol{\upsilon}$ *જેટલો થઈ જાય છે.* $\overline{\boldsymbol{\upsilon}}$*ની દિશા તે ક્ષણે પથ પર દોરેલ સ્પર્શક રેખાની દિશામાં હોય છે.*

તથા (c)માં Δtના ક્રમશઃ ઘટતાં જતાં મૂલ્યો એટલે કે Δt_1, Δt_2, Δt_3 ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) માટે પદાર્થના સરેરાશ વેગ $\bar{\boldsymbol{\upsilon}}$ની દિશા દર્શાવી છે. જ્યારે $\Delta t \to 0$ થાય ત્યારે $\Delta \mathbf{r} \to 0$ અને તે ગતિપથના સ્પર્શકની દિશામાં મળે છે. (આકૃતિ 4.13(d)). આમ, **પદાર્થના ગતિપથના કોઈ પણ બિંદુ પાસે તેનો વેગ તે બિંદુ પાસે ગતિપથને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે અને ગતિની દિશામાં હોય છે.**

આપણે સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ને તેનાં ઘટકોના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \right) \quad (4.29)$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

અથવા $\boldsymbol{\upsilon} = \hat{\mathbf{i}}\dfrac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\dfrac{dy}{dt} = \upsilon_x \hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y \hat{\mathbf{j}}$

જ્યાં, $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}, \ \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$ (4.30a)

આમ, જો ગતિ કરતાં પદાર્થના યામો x અને y સમયના વિધેય સ્વરૂપે જાણીતા હોય, તો ઉપર્યુક્ત સમીકરણોનો ઉપયોગ કરીને υ_x અને υ_y મેળવી શકાય છે.

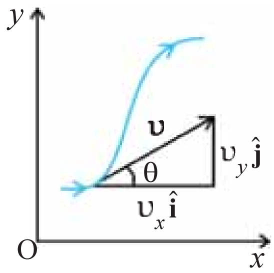
તેથી, $\boldsymbol{\upsilon}$નું મૂલ્ય,

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \quad (4.30b)$$

તથા $\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા, ખૂણા θ ના સ્વરૂપમાં

$\tan\theta = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x}, \ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right)$ વડે આપી શકાય છે. (4.30c)

આકૃતિ 4.14માં વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ માટે υ_x, υ_y અને ખૂણો θ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 4.14 વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$નાં ઘટકો υ_x, υ_y તથા તે X-અક્ષ સાથે ખૂણો θ બનાવે છે. $\upsilon_x = \upsilon\cos\theta$, $\upsilon_y = \upsilon\sin\theta$

પ્રવેગ (Acceleration)

x–y સમતલમાં ગતિમાન પદાર્થનો **સરેરાશ પ્રવેગ a** તેના વેગમાં થતાં ફેરફાર તથા તેને અનુરૂપ સમયગાળાના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\upsilon_x\hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y\hat{\mathbf{j}})}{\Delta t} = \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta \upsilon_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \quad (4.31a)$$

અથવા, $\boldsymbol{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ (4.31b)

પ્રવેગ (તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ), **સમયગાળો શૂન્ય તરફ જાય ત્યારે મળતા સરેરાશ પ્રવેગનું સીમાન્ત મૂલ્ય છે. એટલે કે,**

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} \quad (4.32a)$$

$\Delta \boldsymbol{\upsilon} = \Delta \upsilon_x \hat{\mathbf{i}} + \Delta \upsilon_y \hat{\mathbf{j}}$ હોવાથી,

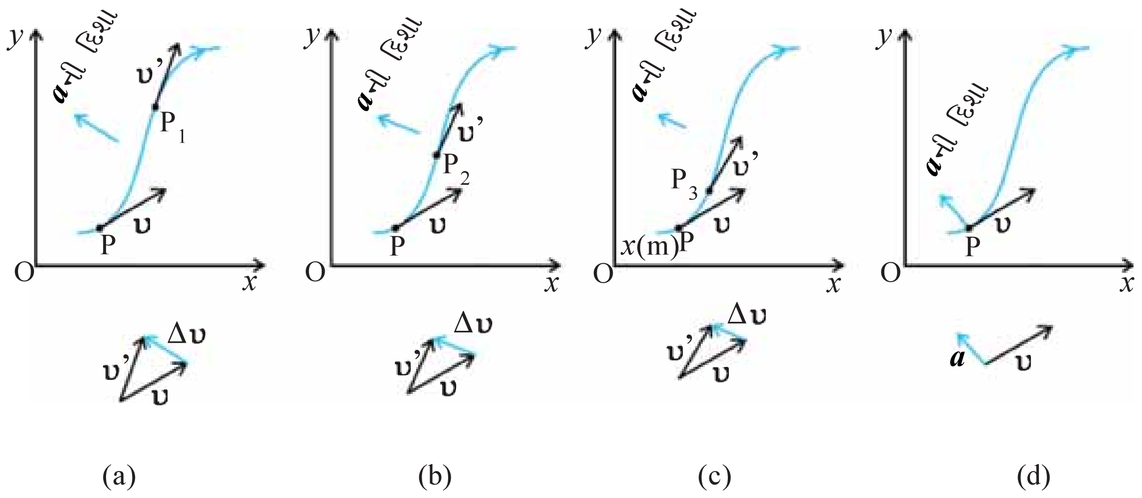
$$\boldsymbol{a} = \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_y}{\Delta t}$$

અથવા $\boldsymbol{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ (4.32b)

જ્યાં, $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt}, \ a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt}$ (4.32c)*

વેગના કિસ્સાની જેમ આપણે પદાર્થનો પથ દર્શાવતા આલેખ પર, પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે લક્ષની પ્રક્રિયાને આલેખીય રીતે સમજી શકીએ છીએ. તે આકૃતિ (4.15a) થી (4.15d)માં દર્શાવેલ છે. t સમયે પદાર્થનું સ્થાન P દ્વારા દર્શાવેલ છે. Δt_1, Δt_2, Δt_3 ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) સમયગાળા બાદ પદાર્થના સ્થાનને અનુક્રમે P_1, P_2, P_3 દ્વારા દર્શાવેલ છે. આકૃતિ (4.15) (a), (b) અને (c)માં આ દરેક બિંદુઓ P, P_1, P_2, P_3 પર વેગના સદિશો પણ દર્શાવેલ છે. Δtના દરેક કિસ્સામાં $\Delta \boldsymbol{\upsilon}$ સદિશ સરવાળાના ત્રિકોણના નિયમ પરથી મેળવેલ છે. વ્યાખ્યા મુજબ સરેરાશ પ્રવેગની દિશાએ $\Delta \boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા જ છે. આપણે જોઈએ છીએ કે જેમ જેમ Δtનું મૂલ્ય ઘટતું જાય છે તેમ તેમ $\Delta \boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા પણ બદલાતી જાય છે. તેના પરિણામ સ્વરૂપે પ્રવેગની દિશા પણ બદલાય છે. અંતમાં $\Delta t \to 0$

* x અને yનાં પદોમાં a_x અને a_yને આ પ્રમાણે દર્શાવી શકાય : $a_x = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ a_y = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = \dfrac{d^2y}{dt^2}$



આકૃતિ 4.15 ત્રણ સમયગાળા (a) Δt_1, (b) Δt_2, (c) Δt_3 ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) *માટે સરેરાશ પ્રવેગ* $\boldsymbol{a}$ (d) $\Delta t \to 0$ *સીમાને અનુરૂપ સરેરાશ પ્રવેગ પદાર્થના પ્રવેગ જેટલો થાય છે.*

લક્ષમાં (આકૃતિ 4.15d), સરેરાશ પ્રવેગ, તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ જેટલો થઈ જાય છે અને તેની દિશા આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હોય છે.

ખાસ નોંધો કે એક પરિમાણમાં પદાર્થનો વેગ તથા પ્રવેગ હંમેશાં એક જ સુરેખ પથ પર હોય છે. (તે કાં તો એક જ દિશામાં હશે કે પછી પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં) જ્યારે દ્વિપરિમાણમાં કે ત્રિપરિમાણમાં પદાર્થની ગતિ માટે વેગ અને પ્રવેગ સદિશો વચ્ચે 0° થી 180° વચ્ચેનો કોઈ પણ ખૂણો હોઈ શકે છે.

▶ *ઉદાહરણ 4.4* કોઈ કણનું સ્થાન $\mathbf{r} = 3.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}}$ વડે અપાય છે, જ્યાં t સેકન્ડમાં છે. સહગુણકોના એકમો એવી રીતે છે કે જેથી $\mathbf{r}$ મીટરમાં મળે. (a) કણના $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ તથા $\boldsymbol{a}(t)$ શોધો. (b) $t = 1.0$ s માટે $\upsilon(t)$નું મૂલ્ય અને દિશા શોધો.

ઉકેલ

$$\boldsymbol{\upsilon}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}})$$

$$= 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = +4.0\,\hat{\mathbf{j}}$$

$a = 4.0$ m s^{-2} y-દિશામાં

$t = 1.0$ s પર $\boldsymbol{\upsilon} = 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0\,\hat{\mathbf{j}}$

તેનું માન $\upsilon = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.0$ m s^{-1} તથા

તેની દિશા $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53°$

x-અક્ષ સાથે. ◀

4.8 સમતલમાં થતી અચળ પ્રવેગી ગતિ (MOTION IN A PLANE WITH CONSTANT ACCELERATION)

ધારો કે કોઈ પદાર્થ x–y સમતલમાં અચળ પ્રવેગ $\mathbf{a}$થી ગતિ કરે છે. પ્રવેગ અચળ હોવાથી કોઈ પણ સમયગાળામાં તેનો સરેરાશ પ્રવેગ આ અચળ પ્રવેગના મૂલ્ય જેટલો જ મળશે. હવે, ધારો કે $t = 0$ સમયે પદાર્થનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$ અને t સમયે વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ છે.

તેથી વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_0}{t - 0} = \frac{\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_0}{t}$$

અથવા $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t$ (4.33a)

ઘટકોના સ્વરૂપમાં,

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$$
$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t \qquad (4.33b)$$

હવે આપણે જોઈશું કે સમયની સાથે સ્થાનસદિશ $\mathbf{r}$ કેવી રીતે બદલાય છે. અહીં એક પરિમાણમાં ઉપયોગમાં લીધેલી પદ્ધતિને અનુસરીશું. ધારો કે, $\mathbf{r}_0$ અને $\mathbf{r}$ અનુક્રમે $t = 0$ અને t સમયે કણના સ્થાનસદિશો છે અને આ સમયે કણના વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ છે. તેથી t સમયગાળામાં પદાર્થનો સરેરાશ વેગ $(\boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{\upsilon}) / 2$ થશે. હવે, સ્થાનાંતર એટલે સરેરાશ વેગ અને સમયગાળાનો ગુણાકાર,

$$\therefore\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \frac{\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\upsilon}_0}{2}\,t = \left(\frac{(\boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t) + \boldsymbol{\upsilon}_0}{2}\right)t$$

$$= \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

અથવા $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$ (4.34a)

સમીકરણ (4.34a)નું વિકલન એટલે કે $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ કરતાં સમીકરણ (4.33a) મળે છે તેમ સરળતાથી ચકાસી શકાય છે તથા તે $t = 0$ સમયે $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ શરતનું પણ પાલન કરે છે. સમીકરણ (4.34a)ને ઘટકોના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad (4.34b)$$

સમીકરણ (4.34b)નું સીધું અર્થઘટન એ છે કે x તથા y દિશાઓમાંની ગતિઓને એકબીજાથી સ્વતંત્ર ગતિ તરીકે ગણી શકાય છે. એટલે કે, **સમતલમાં (દ્વિપરિમાણમાં) થતી અચળ પ્રવેગી ગતિને બે સ્વતંત્ર, એક સાથે અચળ પ્રવેગથી એક પરિમાણમાં પરસ્પર લંબ દિશાઓમાં થતી ગતિ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.** આ એક અગત્યનું પરિણામ છે, જે દ્વિપરિમાણમાં પદાર્થની ગતિના વિશ્લેષણ માટે ઉપયોગી છે. આવું પરિણામ ત્રિપરિમાણીક ગતિમાં પણ મળે છે. ઘણીબધી ભૌતિક સ્થિતિઓમાં બે લંબ દિશાઓની પસંદગી અનુકૂળતા મુજબની હોય છે, જે પરિચ્છેદ (4.10)માં પ્રક્ષિપ્ત ગતિ માટે આપણે જોઈશું.

> *ઉદાહરણ 4.5* $t = 0$ સમયે એક કણ ઊગમબિંદુ પાસેથી $5.0\,\hat{\mathbf{i}}$ m s^{-1}ના વેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. x-y સમતલમાં તેની પર બળ એવી રીતે લાગે છે કે જેથી તે $(3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s^{2}નો અચળ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે. (a) જ્યારે કણનો x-યામ 84 m હોય ત્યારે y-યામ કેટલો હશે ? (b) તે સમયે કણની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ કણનું સ્થાન નીચેના સૂત્ર પ્રમાણે આપી શકાય :

$$\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

$$= 5.0\,\hat{\mathbf{i}}\,t + (1/2)(3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$= (5.0t + 1.5t^2)\,\hat{\mathbf{i}} + 1.0t^2\,\hat{\mathbf{j}}$$

તેથી, $x(t) = 5.0t + 1.5t^2$

$y(t) = +1.0t^2$

હવે, $x(t) = 84$ m, $t = ?$

$5.0t + 1.5t^2 = 84 \Rightarrow t = 6$ s

હવે, $t = 6$ s માટે, $y = 1.0\,(6)^2 = 36.0$ m

હવે, વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (5.0 + 3.0t)\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\,\hat{\mathbf{j}}$

તેથી $t = 6$ s માટે, $\boldsymbol{\upsilon} = 23.0\,\hat{\mathbf{i}} + 12.0\,\hat{\mathbf{j}}$ માટે,

ઝડપ $= |\boldsymbol{\upsilon}| = \sqrt{23^2 + 12^2} = 26$ m s^{-1} ◀

4.9 દ્વિપરિમાણમાં સાપેક્ષ વેગ (RELATIVE VELOCITY IN TWO DIMENSIONS)

પરિચ્છેદ 3.7માં કોઈ સુરેખ પથ પર ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે સાપેક્ષ વેગની સંકલ્પનાથી આપણે પરિચિત થયા જેને સમતલ કે ત્રિપરિમાણમાં વિસ્તારિત કરી શકાય છે. ધારો કે, બે પદાર્થો A અને B, $\boldsymbol{\upsilon}_A$ અને $\boldsymbol{\upsilon}_B$ જેટલા વેગથી ગતિ કરે છે. (દરેક ગતિ કોઈ સામાન્ય નિર્દેશ ફ્રેમ જેમકે જમીનની સાપેક્ષે છે.) તેથી પદાર્થ **Aનો Bની સાપેક્ષે વેગ**

$$\boldsymbol{\upsilon}_{AB} = \boldsymbol{\upsilon}_A - \boldsymbol{\upsilon}_B \qquad (4.35a)$$

તે જ રીતે પદાર્થ Bનો Aની સાપેક્ષ વેગ,

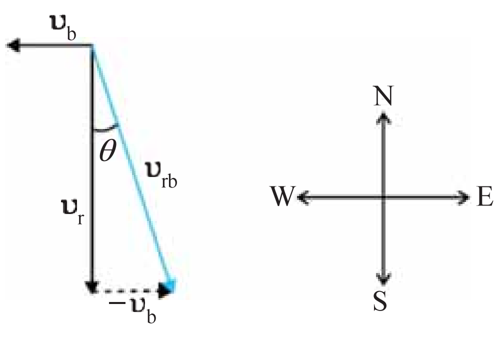
$$\boldsymbol{\upsilon}_{BA} = \boldsymbol{\upsilon}_B - \boldsymbol{\upsilon}_A$$

તેથી $\boldsymbol{\upsilon}_{AB} = -\boldsymbol{\upsilon}_{BA}$ (4.35b)

અને $|\boldsymbol{\upsilon}_{AB}| = |\boldsymbol{\upsilon}_{BA}|$ (4.35c)

> *ઉદાહરણ 4.6* શિરોલંબ દિશામાં 35 m s^{-1}ના વેગથી વરસાદ પડી રહ્યો છે. કોઈ મહિલા પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશામાં 12 m s^{-1} ઝડપથી સાઈકલ ચલાવી રહી છે. વરસાદથી બચવા માટે તેણીએ કઈ દિશામાં છત્રી રાખવી જોઈએ ?

ઉકેલ આકૃતિ 4.16માં $\boldsymbol{\upsilon}_r$ વરસાદનો વેગ અને $\boldsymbol{\upsilon}_b$ મહિલા દ્વારા ચલાવાતી સાઈકલનો વેગ દર્શાવે છે. આ બંને વેગ જમીનની સાપેક્ષે છે. મહિલા સાઈકલ ચલાવતી હોવાથી તેણીને વરસાદનો



આકૃતિ 4.16

વેગ સાઈકલની સાપેક્ષે અનુભવાશે. એટલે કે, $\boldsymbol{\upsilon}_{rb} = \boldsymbol{\upsilon}_r - \boldsymbol{\upsilon}_b$

આકૃતિ 4.16માં દર્શાવ્યા અનુસાર આ સાપેક્ષ વેગ શિરોલંબ દિશા સાથે θ કોણ બનાવશે. જેનું મૂલ્ય,

$\tan\theta = \frac{\upsilon_b}{\upsilon_r} = \frac{12}{35} = 0.343$ થશે.

એટલે કે, $\theta \cong 19^o$

આમ, મહિલાએ પોતાની છત્રી શિરોલંબ દિશા સાથે 19^oના ખૂણે પશ્ચિમની તરફ રાખવી જોઈએ.

તમે આ ઉદાહરણ અને ઉદાહરણ 4.1 વચ્ચેનો ભેદ પારખો. ઉદાહરણ 4.1માં બાળકને બે વેગોના પરિણામી વેગ (સદિશ સરવાળો)નો અનુભવ થાય છે. જ્યારે આ ઉદાહરણમાં મહિલાને સાઈકલના સાપેક્ષે વરસાદના વેગ (બંને વેગોની સદિશ બાદબાકી)નો અનુભવ થાય છે. ◀

4.10 પ્રક્ષિપ્ત ગતિ (PROJECTILE MOTION)

અગાઉના પરિચ્છેદમાં જે વિચારો વિકસિત થયા હતા તેમનો ઉપયોગ ઉદાહરણના રૂપમાં પ્રક્ષિપ્ત ગતિના અભ્યાસમાં કરીશું. જ્યારે કોઈ પદાર્થને ફેંકવામાં આવે ત્યારે તે ઉડ્ડયનમાં હોય તે દરમિયાન તે પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહે છે. આવો પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ ફૂટબૉલ, ક્રિકેટનો બૉલ, બેઝ બૉલ કે અન્ય કોઈ પણ વસ્તુ હોઈ શકે. પ્રક્ષિપ્ત ગતિને એકીસાથે પરસ્પર લંબ દિશામાં થતી બે જુદી જુદી સ્વતંત્ર ઘટક-ગતિઓનાં સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. આ પૈકીનો એક ઘટક કોઈ પ્રવેગ વગરનો (અચળ વેગી) સમક્ષિતિજ દિશામાં હોય છે જ્યારે બીજો ઘટક ગુરુત્વીય બળને કારણે અચળ પ્રવેગથી ઊર્ધ્વદિશામાં હોય છે. સૌપ્રથમ ગૅલિલિયોએ (1632) તેના પુસ્તક **"ડાયલોગ ઑન ધ ગ્રેટ વર્લ્ડ સિસ્ટમ" (Dialogue on the Great World Systems)**માં પ્રક્ષિપ્ત ગતિના સમક્ષિતિજ તેમજ ઊર્ધ્વ ઘટકોની સ્વતંત્રતાનો ઉલ્લેખ કર્યો હતો.

સરળતા ખાતર આપણી ચર્ચામાં પ્રક્ષિપ્ત ગતિ પર હવાના અવરોધની અસર અવગણીશું. આકૃતિ 4.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ પદાર્થને x-અક્ષ (સમક્ષિતિજ દિશા) સાથે θ_0 કોણ બનાવતી દિશામાં $\mathbf{\upsilon}_0$ જેટલા વેગથી પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે છે.

પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કર્યા બાદ તેના પર ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે ઉદ્ભવતો પ્રવેગ શિરોલંબ અધોદિશામાં હશે.

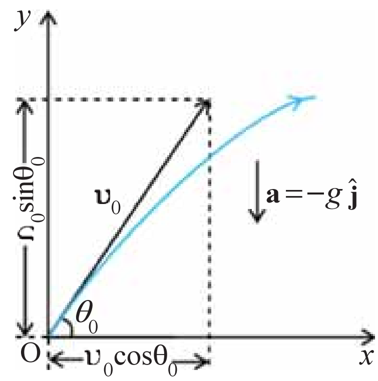
$\mathbf{a} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$

અથવા $a_x = 0$ તથા $a_y = -g$ (4.36)

પ્રારંભિક વેગ $\mathbf{\upsilon}_0$નાં ઘટકો,

$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta_0$

$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\theta_0$ (4.37)



આકૃતિ 4.17 $\mathbf{\upsilon}_0$વેગથી θ_0 ખૂણે પ્રક્ષિપ્ત કરેલા પદાર્થની ગતિ

આકૃતિ 4.17માં દર્શાવ્યા અનુસાર જો આપણે પદાર્થના પ્રારંભિક સ્થાનને નિર્દેશ ફ્રેમના ઊગમબિંદુ પર લઈએ તો,

$x_0 = 0, y_0 = 0$

તેથી સમીકરણ (4.34b)ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$x = \upsilon_{0x} t = (\upsilon_0 \cos\theta_0)\, t$

અને $y = (\upsilon_0 \sin\theta_0)\, t - (1/2) g\, t^2$ (4.38)

સમીકરણ (4.33b)નો ઉપયોગ કરી કોઈ સમય t માટે વેગના ઘટકોને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta_0$

$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta_0 - g\, t$ (4.39)

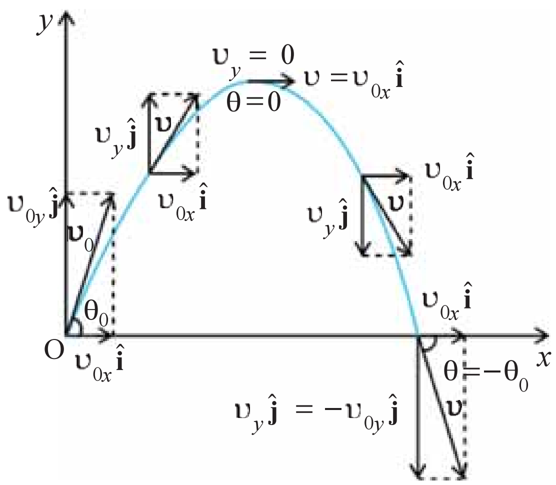
સમીકરણ (4.38) કોઈ સમય t માટે પ્રારંભિક વેગ υ_0 તથા પ્રક્ષિપ્ત કોણ θ_0ના પદમાં પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના સ્થાનનાં x અને y ઘટકો આપે છે. અહીં એ વાત નોંધો કે x અને y દિશાઓ પરસ્પર લંબ હોવાથી પ્રક્ષિપ્ત ગતિના વિશ્લેષણમાં ઘણી સરળતા થઈ ગઈ છે. વેગનાં બે ઘટકોમાંથી એક x-ઘટક ગતિના પૂરા સમયગાળા દરમિયાન અચળ રહે છે. જ્યારે બીજો y-ઘટક શિરોલંબ દિશામાં મુક્તપતન પામતા પદાર્થની જેમ બદલાય છે. આકૃતિ 4.18માં જુદા જુદા સમયે આ હકીકતને આલેખીય રીત વડે દર્શાવેલ છે. ધ્યાન આપો કે મહત્તમ ઊંચાઈવાળા બિંદુએ $\upsilon_y = 0$ અને તેથી $\theta = \tan^{-1} \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = 0$.

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની ગતિપથનું સમીકરણ (Equation of Path of a Projectile)

પ્રક્ષિપ્ત ગતિ કરતાં પદાર્થનો ગતિપથનો આકાર કેવો હશે ? તે x તથા y ઘટકોનાં સમીકરણોમાં સમયનો લોપ કરીને જોઈ શકાય (સમીકરણ 4.38), જે નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$y = (\tan\theta_0)\, x - \frac{g}{2(\upsilon_0 \cos\theta_0)^2} x^2 \qquad (4.40)$$

g, θ_0 અને υ_0 અચળ હોવાથી, સમીકરણ (4.40)ને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય. $y = ax + bx^2$, જ્યાં a તથા b અચળ છે. જે પરવલયનું સમીકરણ છે, એટલે કે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે (આકૃતિ 4.18).



આકૃતિ 4.18 *પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે.*

મહત્તમ ઊંચાઈ માટે લાગતો સમય (Time of maximum height)

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ મહત્તમ ઊંચાઈએ પહોંચવા માટે કેટલો સમય લેશે ? ધારો કે આ સમય t_m છે. આ બિંદુ પાસે $\upsilon_y = 0$ હોવાથી સમીકરણ (4.39) પરથી t_mનું મૂલ્ય મળી શકે છે.

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta_0 - g\, t_m = 0$$

$$\text{અથવા } t_m = \upsilon_0 \sin\theta_0 / g \qquad (4.41a)$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો કુલ ઉડ્ડયન સમય (T_f) આપણે સમીકરણ (4.38)માં $y = 0$ મૂકીને મેળવી શકીએ છીએ. તેથી,

$$T_f = 2(\upsilon_0 \sin\theta_0) / g \qquad (4.41b)$$

T_fને પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો **ઉડ્ડયન સમય** કહે છે. અહીં એ વાત નોંધો કે $T_f = 2t_m$ પરવલય ગતિપથની સંમિતિ પરથી આપણે માટે આ અપેક્ષિત જ હતું.

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની મહત્તમ ઊંચાઈ (Maximum height of a projectile)

સમીકરણ (4.38)માં $t = t_m$ મૂકી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ દ્વારા પ્રાપ્ત થતી મહત્તમ ઊંચાઈ શોધી શકાય છે.

$$y = h_m = (\upsilon_0 \sin\theta_0)\left(\frac{\upsilon_0 \sin\theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{\upsilon_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

$$\text{અથવા } h_m = \frac{(\upsilon_0 \sin\theta_0)^2}{2g} \qquad (4.42)$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની સમક્ષિતિજ અવધિ (Horizontal range of a projectile)

પ્રારંભિક સ્થાન ($x = y = 0$)થી શરૂ કરી તેના પતન દરમિયાન ફરીથી $y = 0$ને પસાર કરે ત્યાં સુધી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થે કાપેલા સમક્ષિતિજ અંતરને **સમક્ષિતિજ અવધિ** R કહે છે. સમક્ષિતિજ અવધિ ઉડ્ડયન-સમય T_fમાં કપાયેલ અંતર છે. તેથી અવધિ Rનું મૂલ્ય,

$$R = (\upsilon_0 \cos\theta_0)(T_f)$$

$$= (\upsilon_0 \cos\theta_0)(2\upsilon_0 \sin\theta_0) / g$$

$$\text{અથવા} \quad R = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad (4.43a)$$

સમીકરણ (4.43a) પરથી દર્શાવે છે કે કોઈ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના વેગ υ_0 માટે, જ્યારે $\sin 2\theta_0$ મહત્તમ હોય, ત્યારે R મહત્તમ મળશે એટલે કે, $\theta_0 = 45^\circ$ હોય.

તેથી મહત્તમ સમક્ષિતિજ અવધિ,

$$R_m = \frac{\upsilon_0^2}{g} \qquad (4.43b)$$

▶ *ઉદાહરણ 4.7* ગેલિલિયોએ તેના પુસ્તક "Two New Sciences"માં એવું વિધાન કર્યું છે. '45°ના ખૂણા સાથે સમાન તફાવત ધરાવતાં બે જુદા-જુદા કોણે પદાર્થને પ્રક્ષિપ્ત કરવામાં આવે, તો તેમની અવધિ સમાન હોય છે.' આ વિધાન સાબિત કરો.

ઉકેલ કોઈ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થને θ_0 કોણે પ્રારંભિક વેગ $\mathbf{v}_0$થી ફેંકવામાં આવે તો તેની અવધિ,

$$R = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

હવે, ખૂણાઓ $(45^\circ + \alpha)$ તથા $(45^\circ - \alpha)$ માટે, $2\theta_0$નું મૂલ્ય અનુક્રમે $(90^\circ + 2\alpha)$ અને $(90^\circ - 2\alpha)$ થશે. $\sin(90^\circ + 2\alpha)$ અને $\sin(90^\circ - 2\alpha)$ બંનેના મૂલ્યો સમાન એટલે કે $\cos 2\alpha$ હોય છે. તેથી 45°ના ખૂણા સાથે સમાન તફાવત α ધરાવતાં વધારે કે ઓછા મૂલ્યના ખૂણાઓ માટે અવધિ Rનું મૂલ્ય સમાન હોય છે. ◀

▶ *ઉદાહરણ 4.8* એક પર્વતારોહક જમીનથી 490 m ઊંચે પર્વતની ધાર પર ઊભો છે. તે એક પથ્થરને સમક્ષિતિજ દિશામાં 15 m s^{-1}નાં પ્રારંભિક વેગથી ફેંકે છે. હવાના અવરોધને અવગણતાં પથ્થર કેટલા સમયમાં જમીન પર પડશે તે શોધો તથા જમીન પર અથડાતી વખતે તેનો વેગ શોધો. (g = 9.8 m s^{-2})

ઉકેલ આપણે, પર્વતની ધારને x અને y-અક્ષનું ઊગમબિંદુ તથા જ્યારે પથ્થરને ફેંકવામાં આવે તે ક્ષણને $t = 0$ s લઈશું. x-અક્ષની ધન દિશા પ્રારંભિક વેગની દિશામાં અને y-અક્ષની ધન દિશા શિરોલંબ ઉપરની તરફ પસંદ કરીશું. ગતિનાં x અને y ઘટકો એકબીજાંથી સ્વતંત્ર રીતે લઈ શકાય. ગતિનાં સમીકરણો,

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}\, t$$

$$y(t) = y_0 + \upsilon_{0y}\, t + (1/2)\, a_y t^2$$

અહીં $x_0 = y_0 = 0$, $\upsilon_{0y} = 0$, $a_y = -g = -9.8 \text{ m s}^{-2}$,

જ્યારે, $\upsilon_{0x} = 15 \text{ m s}^{-1}$

પથ્થર જ્યારે જમીન પર અથડાય છે ત્યારે $y(t) = -490$ m થાય.

$$-490 \text{ m} = -(1/2)(9.8)\, t^2$$

તેથી $t = 10$ s

વેગના ઘટક $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$ તથા $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - g\, t$ થશે.

આમ, જ્યારે પથ્થર જમીન સાથે અથડાશે ત્યારે,

$$\upsilon_{0x} = 15 \text{ m s}^{-1}$$

$$\upsilon_{0y} = 0 - 9.8 \times 10 \approx -98 \text{ m s}^{-1}$$

તેથી પથ્થરનો વેગ

$$\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} \approx 99 \text{ m s}^{-1}.$$ ◀

▶ *ઉદાહરણ 4.9* સમક્ષિતિજ સાથે 30°ના ખૂણે એક ક્રિકેટ બૉલને 28 m s^{-1}ના વેગથી ફેંકવામાં આવે છે. (a) બૉલ માટે મહત્તમ ઊંચાઈ (b) તે જ સ્તરે પાછા આવવા માટે બૉલે લીધેલ સમય તથા (c) ફેંકવામાં આવેલ બિંદુથી બૉલ તે જ ઊંચાઈના જે બિંદુએ પડે છે તે બિંદુના અંતરની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

(a) મહત્તમ ઊંચાઈ

$$h_m = \frac{(\upsilon_0 \sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(28 \sin 30^\circ)^2}{2(9.8)} \text{ m}$$

$$= \frac{14 \times 14}{2 \times 9.8} = 10.0 \text{ m થશે.}$$

(b) તે જ સ્તર પર પાછા આવવા માટે લાગતો સમય

$$T_f = (2\upsilon_0 \sin\theta_0) / g = (2 \times 28 \times \sin 30^\circ) / 9.8$$

$$= 28 / 9.8 \text{ s} = 2.9 \text{ s.}$$

(c) ફેંકવામાં આવેલા બિંદુથી બૉલ તે જ ઊંચાઈના જે બિંદુએ પડે છે તેનું અંતર,

$$R = \frac{(\upsilon_0^2 \sin 2\theta_0)}{g} = \frac{28 \times 28 \times \sin 60^\circ}{9.8} = 69 \text{ m}$$ ◀

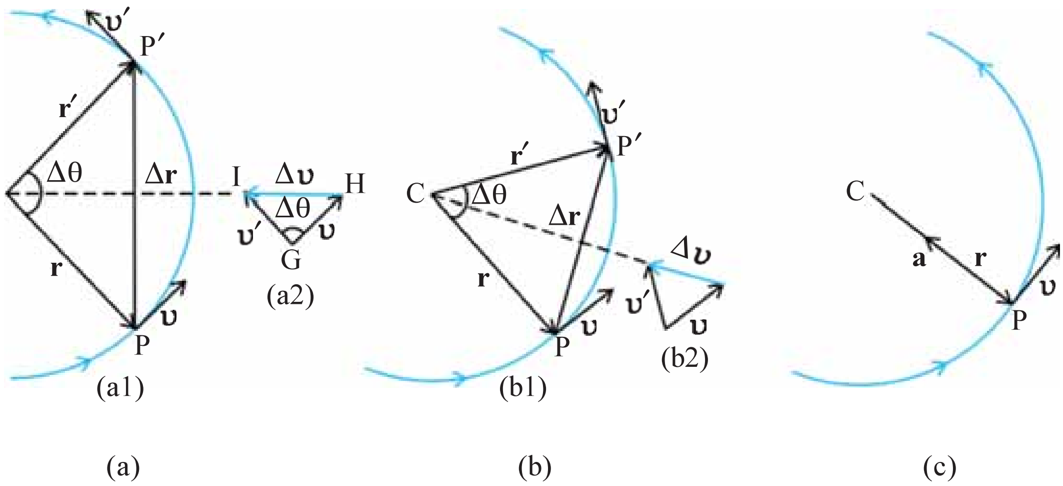
હવાના અવરોધને અવગણવો – આ પૂર્વધારણાનો વાસ્તવિક અર્થ શું છે ? (Neglecting air resistance - what does the assumption really mean ?)

પ્રક્ષિપ્ત ગતિની ચર્ચા કરતી વખતે આપણે કહ્યું હતું તેમ, આપણે માની લઈએ છીએ કે, હવાના અવરોધની, પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની ગતિ પર કોઈ અસર થતી નથી. તમારે એ સમજવું જોઈએ કે આ વિધાનનો સાચો અર્થ શું થાય ? ઘર્ષણ, શ્યાનતાબળ, હવાનું અવરોધક બળ આ બધા ઊર્જાનો વ્યય કરનારાં બળો (Dissipative Forces) છે. ગતિનો વિરોધ કરતાં આવાં બળોની હાજરીને કારણે ગતિમાન પદાર્થની મૂળ ઊર્જા અને તેના પરિણામે તેના વેગમાનમાં ઘટાડો થાય છે. આમ, પોતાના પરવલયકાર પથ પર ગતિમાન પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ હવાના અવરોધક બળની હાજરીમાં ચોક્કસરૂપે પોતાના આદર્શ ગતિપથથી વિચલિત થઈ જશે. તેથી જમીનની સપાટીને તે જ વેગથી નહિ અથડાય જેટલા વેગથી તેને ફેંકવામાં આવ્યો હતો. હવાના અવરોધક બળની ગેરહાજરીમાં વેગનો x ઘટક અચળ રહે છે. ફક્ત y ઘટકમાં જ સતત ફેરફાર થાય છે. જ્યારે હવાના અવરોધક બળની હાજરીમાં બંને ઘટકો પ્રભાવિત થાય છે. તેનો અર્થ એ થયો કે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ માટે સમક્ષિતિજ અવધિનું મૂલ્ય સમીકરણ (4.43) દ્વારા મળતાં મૂલ્ય કરતાં ઓછું મૂલ્ય મળશે. મહત્તમ ઊંચાઈ પણ સમીકરણ (4.42) દ્વારા ગણેલ મૂલ્ય કરતાં ઓછી હશે. ત્યારે તમે અનુમાન લગાવી શકો છો કે ઉડ્ડયન સમયમાં શું ફેરફાર થશે ?

હવાના અવરોધથી બચવું હોય તો આપણે પ્રયોગ શૂન્યાવકાશમાં કે બહુ જ ઓછા દબાણની સ્થિતિમાં કરવો પડે, જે સહેલું કાર્ય નથી. જ્યારે આપણે 'હવાના અવરોધને અવગણ્ય માની લો.' જેવાં વાક્યોના ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે આપણે જાણીએ છીએ કે અવધિ, ઊંચાઈ જેવાં પ્રાચલોમાં તેના કારણે થતાં ફેરફારો, હવાની ગેરહાજરીમાં મળતાં મૂલ્યોની સરખામણીમાં ખૂબ જ ઓછા છે. હવાના અવરોધને ધ્યાનમાં લીધા વગર ગણતરી કરવી, હવાના અવરોધને ધ્યાનમાં લઈને કરવા કરતાં ઘણી જ સરળ છે.

4.11 નિયમિત વર્તુળ-ગતિ (UNIFORM CIRCULAR MOTION)

અચળ ઝડપથી વર્તુળાકાર માર્ગ પર ગતિ કરતા પદાર્થની ગતિને **નિયમિત વર્તુળ ગતિ** કહે છે. શબ્દ 'નિયમિત' તે ઝડપ માટે વાપરવામાં આવ્યો છે જે સમગ્ર ગતિ દરમિયાન સમાન (અચળ) રહે છે. આકૃતિ 4.19માં દર્શાવ્યા અનુસાર કોઈ પદાર્થ υ જેટલી ઝડપથી R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરે છે. અહીં વેગની દિશા સતત બદલાતી હોવાથી તેમાં પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય છે. આપણે આ પ્રવેગનું મૂલ્ય તથા દિશા શોધીએ.



આકૃતિ 4.19 નિયમિત વર્તુળ-ગતિ કરતા પદાર્થનો વેગ અને પ્રવેગ. આકૃતિ (a) થી (c) સુધી સમયગાળો Δt ઘટતો જઈને શૂન્ય બને છે. વર્તુળાકાર પથ પર દરેક બિંદુ પાસે પ્રવેગ વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

આકૃતિ 4.19(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે પદાર્થ P અને P' બિંદુઓ પાસે હોય ત્યારે તેના સ્થાનસદિશ અને વેગ અનુક્રમે $\mathbf{r}$ અને $\mathbf{r}'$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}'$ છે. વ્યાખ્યા અનુસાર કોઈ બિંદુ પાસે પદાર્થનો વેગ તે બિંદુ પાસે ગતિની દિશામાં દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે. આકૃતિ 4.19 (a1)માં વેગ સદિશો $\boldsymbol{\upsilon}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}'$ને દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 4.19 (a2)માં સદિશ સરવાળા માટે ત્રિકોણના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ મેળવેલ છે. ગતિપથ વર્તુળાકાર હોવાથી r ને υ અને $\mathbf{r}'$ને $\boldsymbol{\upsilon}'$ લંબરૂપે છે. તેથી $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$, $\Delta\mathbf{r}$ને લંબ હોય છે. સરેરાશ પ્રવેગ $\left(\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}\right)$ $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશામાં છે તેથી $\bar{\mathbf{a}}$ પણ $\Delta\mathbf{r}$ને લંબ છે. હવે જો આપણે $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ને $\mathbf{r}$ તથા $\mathbf{r}'$ની વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગતી રેખા પર મૂકીએ તો આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે તેની દિશા વર્તુળના કેન્દ્રની તરફ હશે. આ રાશિઓને આકૃતિ 4.19(b)માં સમયના નાના ગાળા માટે દર્શાવેલ છે. $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ અને તેથી $\bar{\mathbf{a}}$ ની દિશા ફરીથી કેન્દ્ર તરફ હશે. આકૃતિ 4.19(c)માં $\Delta t \to 0$ છે, તેથી સરેરાશ પ્રવેગ, તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ જેટલો થશે તેની દિશા કેન્દ્ર તરફની હોય છે.* આમ, એ નિષ્કર્ષ નીકળે છે કે નિયમિત વર્તુળ ગતિ માટે પદાર્થના પ્રવેગની દિશા વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય છે. હવે આપણે આ પ્રવેગનું માન મેળવીશું.

વ્યાખ્યા અનુસાર $\mathbf{a}$નું મૂલ્ય નીચે દર્શાવેલ સમીકરણ દ્વારા રજૂ કરી શકાય :

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|}{\Delta t}$$

ધારો કે સ્થાનસદિશો $\mathbf{r}$ અને $\mathbf{r}'$ની વચ્ચેનો ખૂણો $\Delta\theta$ છે. હવે, વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$ તથા $\boldsymbol{\upsilon}'$ હંમેશાં સ્થાનસદિશોને લંબ હોય છે. તેથી તેમની વચ્ચેનો ખૂણો પણ $\Delta\theta$ થશે. તેથી સ્થાનસદિશો દ્વારા બનતો ત્રિકોણ CPP' તથા વેગ સદિશો $\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{\upsilon}'$ અને $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$ દ્વારા બનતો ત્રિકોણ GHI સમરૂપ છે (આકૃતિ 4.19a). તેથી એક ત્રિકોણના આધારની લંબાઈ તથા બાજુની લંબાઈનો ગુણોત્તર બીજા ત્રિકોણની તેને અનુરૂપ લંબાઈઓના ગુણોત્તર જેટલો હશે.

એટલે કે,

$$\frac{|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|}{\upsilon} = \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{R} \quad (|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'| = R \text{ મૂકેલ છે.})$$

અથવા $|\Delta\boldsymbol{\upsilon}| = \upsilon \dfrac{|\Delta\mathbf{r}|}{R}$

તેથી,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon|\Delta\mathbf{r}|}{R\Delta t} = \frac{\upsilon}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}$$

જો Δt નાનો હોય તો $\Delta\theta$ પણ નાનો હશે. આવી સ્થિતિમાં ચાપ PP′ને લગભગ $|\Delta\mathbf{r}|$ જેટલો લઈ શકાય છે. એટલે કે

$$|\Delta\mathbf{r}| \cong \upsilon\Delta t$$

$$\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} \cong \upsilon$$

અથવા $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} = \upsilon$

આ રીતે, કેન્દ્રગામી પ્રવેગ a_cનું મૂલ્ય નીચે પ્રમાણે મળશે :

* $\Delta t \to 0$ લક્ષમાં $\Delta\mathbf{r}$, $\mathbf{r}$ને લંબ થાય છે. આ લક્ષમાં $\Delta\boldsymbol{\upsilon} \to 0$ હોય છે, તેના પરિણામ સ્વરૂપે તે પણ $\boldsymbol{\upsilon}$ ને લંબ થશે. આમ, વર્તુળાકાર પથના દરેક બિંદુ પાસે પ્રવેગની દિશા વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય છે.

$$a_c = \left(\frac{\upsilon}{R}\right)\upsilon = \upsilon^2/R \qquad (4.44)$$

આમ, R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર υ જેટલી ઝડપથી ગતિ કરતાં પદાર્થના પ્રવેગનું માન υ^2/R હોય છે જેની દિશા હંમેશાં **વર્તુળના કેન્દ્ર તરફની** હોય છે. આ કારણે આ પ્રકારના પ્રવેગને **કેન્દ્રગામી પ્રવેગ** કહે છે. (આ શબ્દ ન્યૂટને સૂચવ્યો હતો). કેન્દ્રગામી પ્રવેગને સંબંધિત સંપૂર્ણ વિશ્લેષણાત્મક લેખ સૌપ્રથમ 1673માં ડચ વૈજ્ઞાનિક ક્રિશ્ચિયન હાઈગેન્સે (1629-1695) પ્રકાશિત કર્યો હતો. પરંતુ કદાચ ન્યૂટનને પણ કેટલાંક વર્ષો પહેલાં જ આ હકીકતની જાણ થઈ ગઈ હતી. કેન્દ્રગામીને અંગ્રેજીમાં સેન્ટ્રિપેટલ કહે છે. જે એક ગ્રીક શબ્દ છે જેનો અર્થ કેન્દ્ર-અભિમુખ (કેન્દ્રની તરફ) થાય છે. υ તથા R બંને અચળ હોવાથી કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું માન પણ અચળ હોય છે. પરંતુ તેની દિશા બદલાતી રહે છે અને તે હંમેશાં કેન્દ્રની તરફ હોય છે. આ પરથી એ નિષ્કર્ષ નીકળે છે કે કેન્દ્રગામી પ્રવેગ અચળ સદિશ નથી.

કોઈ પદાર્થની નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિના વેગ તથા પ્રવેગને આપણે બીજી રીતે પણ વર્ણવી શકીએ છીએ. આકૃતિ 4.19માં દર્શાવ્યા અનુસાર Δt (= $t' - t$) સમયગાળામાં જ્યારે કણ P થી P′ પર પહોંચે છે ત્યારે CP રેખા $\Delta\theta$ જેટલો ખૂણો ફરી જાય છે. $\Delta\theta$ને કોણીય અંતર કહે છે. કોણીય ઝડપ ω (ગ્રીક અક્ષર 'ઓમેગા')ને આપણે કોણીય અંતરના ફેરફારના સમય-દર રૂપે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ.

$$\text{તેથી, } \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (4.45)$$

હવે, જો Δt સમયમાં કણ દ્વારા કપાયેલ અંતર Δs હોય, એટલે કે $PP' = \Delta s$, તો

$$\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

પરંતુ $\Delta s = R\Delta\theta$ તેથી,

$$\upsilon = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$

$$\text{આમ, } \upsilon = R\omega \qquad (4.46)$$

કેન્દ્રગામી પ્રવેગ a_cને આપણે કોણીય વેગના રૂપમાં પણ રજૂ કરી શકીએ. એટલે કે,

$$a_c = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\text{અથવા } a_c = \omega^2 R \qquad (4.47)$$

વર્તુળનું એક પરિભ્રમણ પૂરું કરવા માટે પદાર્થને જે સમય લાગે છે તેને આવર્તકાળ T કહે છે. એક સેકન્ડમાં પદાર્થ જેટલાં પરિભ્રમણ કરે છે તેને પદાર્થની આવૃત્તિ ν (=$1/T$) કહે છે. પરંતુ આ સમયમાં પદાર્થ દ્વારા કપાયેલ અંતર $s = 2\pi R$ હોય છે. તેથી

$$\upsilon = 2\pi R / T = 2\pi R\nu \qquad (4.48)$$

આ રીતે, આવૃત્તિ νના પદમાં,

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$\upsilon = 2\pi R\nu$$

$$a_c = 4\pi^2\nu^2 R \qquad (4.49)$$

ઉદાહરણ 4.10 એક જંતુ વર્તુળાકાર ખાંચમાં કે જેની ત્રિજ્યા 12 cm છે તેમાં ફસાઈ જાય છે. તે ખાંચમાં એકધારી ગતિ કરે છે અને 100 સેકન્ડમાં 7 પરિભ્રમણ પૂરાં કરે છે. (a) જંતુની કોણીય ઝડપ તથા રેખીય ઝડપ કેટલી હશે ? (b) શું પ્રવેગ સદિશ એ અચળ સદિશ છે ? તેનું માન કેટલું હશે ?

ઉકેલ આ નિયમિત વર્તુળ ગતિનું ઉદાહરણ છે. અહીં R = 12 cm. કોણીય ઝડપ ωનું મૂલ્ય

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 7/100 = 0.44 \text{ rad/s}$$

તથા રેખીય ઝડપ

$$\upsilon = \omega R = 0.44 \text{ s}^{-1} \times 12 \text{ cm} = 5.3 \text{ cm s}^{-1}.$$

વર્તુળના દરેક બિંદુ પાસે વેગ $\mathbf{\upsilon}$ની દિશા તે બિંદુ પાસે દોરેલ સ્પર્શકની દિશા હશે તથા પ્રવેગ વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હશે. તે સતત દિશા બદલતું હોવાથી પ્રવેગ અચળ સદિશ નથી. પરંતુ તેનું માન અચળ રહેશે.

$$a = \omega^2 R = (0.44 \text{ s}^{-1})^2 (12 \text{ cm})$$

$$= 2.3 \text{ cm s}^{-2}$$

સારાંશ

1. અદિશરાશિઓ એ રાશિઓ છે કે જેને માત્ર માન જ હોય. અંતર, ઝડપ, દ્રવ્યમાન તથા તાપમાન અદિશરાશિઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે.
2. સદિશરાશિઓ એ રાશિઓ છે કે જેને માન અને દિશા બંને હોય છે. સ્થાનાંતર, વેગ તથા પ્રવેગ વગેરે આ પ્રકારની રાશિઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે. તેઓ સદિશ બીજગણિતના ચોક્કસ નિયમોનું પાલન કરે છે.
3. જો કોઈ સદિશ **A**ને વાસ્તવિક સંખ્યા λ વડે ગુણવામાં આવે તો મળતો સદિશ **B** એવો હોય છે કે તેનું માન **A**ના માન કરતાં λ ગણું હોય છે. નવા સદિશની દિશા કાં તો **A**ની દિશામાં અથવા તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે, જે λ ધન કે ઋણ છે તેના પર આધાર રાખે છે.
4. બે સદિશો **A** તથા **B**ના સરવાળા માટે કાં તો શીર્ષથી પુચ્છની આલેખીય રીત અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રીતનો ઉપયોગ થાય છે.
5. સદિશોનો સરવાળો ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

તથા તે જૂથના નિયમનું પણ પાલન કરે છે એટલે કે,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

6. શૂન્ય સદિશ એક એવો સદિશ છે કે જેનું માન શૂન્ય હોય છે. તેનું માન શૂન્ય હોવાથી તેની સાથે દિશા દર્શાવવી જરૂરી નથી. તેના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

7. સદિશ **B**ને **A**માંથી બાદ કરવો એટલે સદિશ **A**માં **–B** સદિશ ઉમેરવો.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

8. કોઈ સદિશ **A**ને તે જ સમતલમાં રહેલા બે સદિશો **a** અને **b**ની દિશામાં બે ઘટક સદિશોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે.

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

જ્યાં λ તથા μ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

9. સદિશ **A** સાથે સંકળાયેલ એકમ સદિશનું માન એક એકમ તથા દિશા સદિશ **A**ની દિશામાં હોય છે. એકમ સદિશ

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ એકમ માન ધરાવતાં સદિશ છે જેમની દિશાઓ અનુક્રમે જમણા હાથની યામપદ્ધતિની અક્ષો x, y તથા zની દિશામાં હોય છે.

10. સદિશ **A**ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

જ્યાં A_x, A_y અનુક્રમે x અને y-અક્ષોને અનુરૂપ **A**ના ઘટકો છે. જો સદિશ **A**, x-અક્ષની સાથે θ કોણ બનાવતો હોય, તો $A_x = A\cos\theta$, $A_y = A\sin\theta$ તથા $A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$

11. સદિશોનો સરવાળો બૈજિક રીત (Analytical Method)થી પણ સરળતાથી કરી શકાય છે. જો $x–y$ સમતલમાં બે સદિશો **A** તથા **B**નો સરવાળો **R** હોય, તો

$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, જ્યાં, $R_x = A_x + B_x$ તથા $R_y = A_y + B_y$

12. $x–y$ સમતલમાં કોઈ પદાર્થનો સ્થાનસદિશ આ પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે : $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ અને સ્થાન **r** થી સ્થાન **r'** સુધીનું સ્થાનાંતર આ મુજબ લખી શકાય,

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}' - \mathbf{r}\\ &= (x' - x)\hat{\mathbf{i}} + (y' - y)\hat{\mathbf{j}}\\ &= \Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

13. જો કોઈ પદાર્થ $\Delta \mathbf{r}$ સમયગાળામાં Δt જેટલું સ્થાનાંતર કરતો હોય, તો તેનો સરેરાશ વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ થશે. t સમયે પદાર્થનો વેગ, સરેરાશ વેગના મૂલ્યમાં $\Delta t \to 0$ લક્ષ લઈને મળતાં મૂલ્ય જેટલો હોય છે.

$\boldsymbol{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. તેને એકમ સદિશના સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_x \hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y \hat{\mathbf{j}} + \upsilon_z \hat{\mathbf{k}}$ જ્યાં $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \ \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$

જ્યારે કોઈ યામપદ્ધતિમાં પદાર્થનું સ્થાન દર્શાવવામાં આવે છે, ત્યારે વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ ની દિશા પદાર્થના ગતિપથ દર્શાવતા વક્રના કોઈ બિંદુ પાસે દોરેલ સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

14. જો કોઈ પદાર્થનો વેગ Δt સમયગાળામાં $\boldsymbol{\upsilon}$ થી બદલાઈને $\boldsymbol{\upsilon}'$ થતો હોય, તો તેનો સરેરાશ પ્રવેગ : $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}' - \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}$

t સમયે પ્રવેગ $\boldsymbol{a}$, સરેરાશ પ્રવેગ $\boldsymbol{a}$ના $\Delta t \to 0$ લક્ષમાં મળતાં મૂલ્ય જેટલો હોય છે.

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$$

ઘટકોના સ્વરૂપમાં, $\boldsymbol{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$

જ્યાં $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}, \ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt}$

15. જો કોઈ પદાર્થ સમતલમાં અચળ પ્રવેગ $a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ થી ગતિ કરતો હોય તથા $t = 0$ સમયે તેનો સ્થાન સદિશ $\mathbf{r}_0$ હોય, તો t સમયે તે જે બિંદુ પાસે હશે તેનો સ્થાનસદિશ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

અને તેનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{a}t$

જ્યાં $\boldsymbol{\upsilon}_0$ એ $t = 0$ સમયે તેનો વેગ છે.

ઘટકોના સ્વરૂપમાં,

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t$$

કોઈ સમતલમાં અચળ પ્રવેગી ગતિ પરસ્પર લંબરૂપે બે દિશાઓમાં એક સાથે થતી એક પારિમાણિક સ્વતંત્ર ગતિઓના સંયોજન સ્વરૂપમાં જોઈ શકાય છે.

16. કોઈ ફેંકાયેલો પદાર્થ ઉડ્ડયનમાં હોય તે દરમિયાન પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ કહેવાય છે. જો x-અક્ષ સાથે θ_0 કોણે વસ્તુનો પ્રારંભિક વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_0$ હોય અને જો પદાર્થની પ્રારંભિક સ્થિતિ, યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ સાથે સંપાત (Coincide) થતી હોય, તો t સમયે પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનું સ્થાન અને વેગ નીચે પ્રમાણે આપી શકાય :

$$x = (\upsilon_0 \cos \theta_0)\, t$$

$$y = (\upsilon_0 \sin \theta_0)\, t - (1/2)\, g\, t^2$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos \theta_0$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin \theta_0 - g\, t$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થનો ગતિપથ પરવલયાકાર હોય છે જેનું સમીકરણ

$$y = (\tan \theta_0)\, x - \frac{g x^2}{2(\upsilon_0 \cos \theta_0)^2} \text{ થશે.}$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની મહત્તમ ઊંચાઈ

$$h_m = \frac{(\upsilon_0 \sin \theta_0)^2}{2g}$$

તે ઊંચાઈએ પહોંચવા માટે લાગતો સમય

$$t_m = \frac{\upsilon_0 \sin \theta_0}{g} \text{ થશે.}$$

પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ દ્વારા તેના પ્રારંભિક સ્થાનથી તેના પતન દરમિયાન $y = 0$માંથી પસાર થાય ત્યાં સુધી કાપેલા સમક્ષિતિજ અંતરને અવધિ R કહે છે.

આમ, પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની અવધિ $R = \frac{\upsilon_0^2}{g} \sin 2\ \theta_0$.

17. જ્યારે કોઈ પદાર્થ વર્તુળાકાર પથ પર અચળ ઝડપથી ગતિ કરતો હોય ત્યારે તેની ગતિને નિયમિત વર્તુળગતિ કહે છે. તેના પ્રવેગનું મૂલ્ય $a_c = \upsilon^2/R$. a_cની દિશા હંમેશાં વર્તુળના કેન્દ્ર તરફની હોય છે. કોણીય સ્થાનમાં થતાં ફેરફારના સમય-દરને કોણીય ઝડપ ω કહે છે. તે રેખીય વેગ υ સાથે $\upsilon = \omega R$ સૂત્ર દ્વારા સંકળાયેલ છે. પ્રવેગ $a_c = \omega^2 R$.
જો પદાર્થના પરિભ્રમણનો સમય T હોય અને વર્તુળાકાર પથ પર આવૃત્તિ ν હોય, તો $\omega = 2\pi\nu$, $\upsilon = 2\pi\nu R$, $a_c = 4\pi^2\nu^2 R$.

ભૌતિકરાશિ	સંજ્ઞા	પારિમાણિક સૂત્ર	એકમ	નોંધ
સ્થાનસદિશ	$\mathbf{r}$	[L]	m	સદિશ. કોઈ બીજા ચિહ્નથી પણ દર્શાવી શકાય.
સ્થાનાંતર	$\Delta\mathbf{r}$	[L]	m	સદિશ. કોઈ બીજા ચિહ્નથી પણ દર્શાવી શકાય.
વેગ		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
(a) સરેરાશ	$\bar{\boldsymbol{\upsilon}}$			$= \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, સદિશ
(b) તાત્ક્ષણિક	$\boldsymbol{\upsilon}$			$= \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, સદિશ
પ્રવેગ		$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	
(a) સરેરાશ	$\bar{\mathbf{a}}$			$= \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}$, સદિશ
(b) તાત્ક્ષણિક	$\mathbf{a}$			$= \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$, સદિશ
પ્રક્ષિપ્ત ગતિ				
(a) મહત્તમ ઊંચાઈ માટે લાગતો સમય	t_m	[T]	s	$= \frac{\upsilon_0 \sin \theta_0}{g}$
(b) મહત્તમ ઊંચાઈ	h_m	[L]	m	$= \frac{(\upsilon_0 \sin \theta_0)^2}{2g}$
(c) સમક્ષિતિજ અવધિ	R	[L]	m	$= \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$
વર્તુળગતિ				
(a) કોણીય ઝડપ	ω	$[T^{-1}]$	rad/s	$= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{r}$
(b) કેન્દ્રગામી પ્રવેગ	a_c	$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	$= \frac{\upsilon^2}{r}$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. કોઈ પદાર્થ દ્વારા બે બિંદુઓ વચ્ચેની પથલંબાઈ સામાન્ય રીતે સ્થાનાંતરના માન જેટલી હોતી નથી. સ્થાનાંતર ફક્ત ગતિપથનાં અંતિમ બિંદુઓ પર આધાર રાખે છે. જ્યારે પથલંબાઈ (નામ પરથી જ સ્પષ્ટ છે) વાસ્તવિક પથ પર આધાર રાખે છે. બંને રાશિઓ ત્યારે જ સમાન હશે જ્યારે પદાર્થ ગતિ દરમ્યાન પોતાની દિશા બદલતો ન હોય. આ સિવાય અન્ય સ્થિતિઓમાં પથલંબાઈ સ્થાનાંતરના મૂલ્ય કરતાં વધારે હોય છે.
2. ઉપર્યુક્ત મુદ્દા 1ના સંદર્ભે પદાર્થની સરેરાશ ઝડપ કોઈ આપેલ સમયગાળામાં કાં તો સરેરાશ વેગના મૂલ્ય જેટલી કે તેના કરતાં વધારે હશે. જ્યારે પથલંબાઈ અને સ્થાનાંતરના મૂલ્ય સમાન હોય ત્યારે બંને સમાન મળે છે.
3. સદિશ સમીકરણ (4.33a) તથા (4.34a) અક્ષોની પસંદગી પર આધાર રાખતી નથી. ચોક્કસ તમે તેને બે સ્વતંત્ર અક્ષો પર વિભાજિત કરી શકો છો.
4. અચળ પ્રવેગી ગતિનાં સમીકરણો નિયમિત વર્તુળગતિ માટે લાગુ પાડી શકાય નહિ. કારણ કે તેમાં પ્રવેગનું માન અચળ હોય છે પરંતુ દિશા સતત બદલાતી રહે છે.
5. જો કોઈ પદાર્થના બે વેગ $\mathbf{v}_1$ તથા $\mathbf{v}_2$ હોય, તો તેનો પરિણામી વેગ $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ થશે. ઉપર્યુક્ત સૂત્ર તથા પદાર્થ 2 ની સાપેક્ષે પદાર્થ 1 નો વેગ એટલે કે $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ વચ્ચેનો ભેદ બરાબર ઓળખો. અહીં $\mathbf{v}_1$ તથા $\mathbf{v}_2$ કોઈ સામાન્ય નિર્દેશ ફ્રેમની સાપેક્ષે વેગ છે.
6. વર્તુળાકાર ગતિમાં પદાર્થનો પરિણામી પ્રવેગ વર્તુળના કેન્દ્ર તરફ હોય, તો જ તેની ઝડપ અચળ હોય.
7. કોઈ પદાર્થના ગતિપથનો આકાર માત્ર પ્રવેગથી જ નક્કી નથી થતો, પરંતુ તે ગતિની પ્રારંભિક સ્થિતિઓ (પ્રારંભિક સ્થાન તથા પ્રારંભિક વેગ) પર પણ આધાર રાખે છે. ઉદાહરણ તરીકે સમાન ગુરુત્વપ્રવેગથી ગતિ કરતાં કોઈ પદાર્થનો માર્ગ સુરેખ પથ પણ હોઈ શકે કે પરવલય પણ હોઈ શકે જે પ્રારંભિક સ્થિતિઓ પર આધાર રાખે છે.

સ્વાધ્યાય

4.1 નીચે આપેલી ભૌતિકરાશિઓમાંથી દર્શાવો કે કઈ સદિશ રાશિ છે અને કઈ અદિશ રાશિ છે :
કદ, દ્રવ્યમાન, ઝડપ, પ્રવેગ, ઘનતા, મોલસંખ્યા, વેગ, કોણીય આવૃત્તિ, સ્થાનાંતર, કોણીય વેગ

4.2 નીચે આપેલ યાદીમાંથી બે અદિશ રાશિઓ ઓળખી બતાવો :
બળ, કોણીય વેગમાન, કાર્ય, વિદ્યુતપ્રવાહ, રેખીય વેગમાન, વિદ્યુતક્ષેત્ર, સરેરાશ વેગ, ચુંબકીય ચાકમાત્રા, સાપેક્ષ વેગ

4.3 નીચે આપેલ યાદીમાંથી ફક્ત સદિશ રાશિઓ ઓળખી બતાવો :
તાપમાન, દબાણ, આઘાત, સમય, પાવર, કુલ પથલંબાઈ, ઊર્જા, ગુરુત્વીય સ્થિતિમાન, ઘર્ષણાંક, વિદ્યુતભાર

4.4 કારણ સહિત જણાવો કે અદિશ તથા સદિશ રાશિઓ સાથે નીચે દર્શાવેલ કઈ પ્રક્રિયાઓ અર્થપૂર્ણ છે ?
(a) બે અદિશોનો સરવાળો (b) સમાન પરિમાણના એક સદિશ અને એક અદિશનો સરવાળો (c) એક સદિશનો એક અદિશ સાથે ગુણાકાર (d) બે અદિશોનો ગુણાકાર (e) બે સદિશોનો સરવાળો (f) એક સદિશના ઘટકનો તે જ સદિશ સાથે સરવાળો.

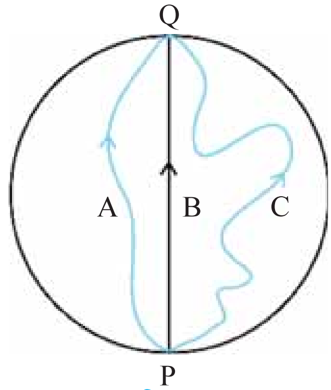
4.5 નીચે આપેલ પ્રત્યેક કથનને ધ્યાનપૂર્વક વાંચો અને કારણ સહિત દર્શાવો કે તે સાચું છે કે ખોટું :
(a) કોઈ સદિશનું મૂલ્ય હંમેશાં અદિશ હોય છે. (b) કોઈ સદિશનો દરેક ઘટક હંમેશાં અદિશ હોય છે. (c) કોઈ કણ દ્વારા કપાયેલ અંતરની કુલ પથલંબાઈ હંમેશાં સ્થાનાંતર સદિશના મૂલ્ય જેટલી હોય છે. (d) કોઈ કણની સરેરાશ ઝડપ (કુલ પથલંબાઈ ભાગ્યા તે પથ કાપવા લાગેલો સમય) સમાન સમયગાળામાં કણના સરેરાશ વેગના મૂલ્યથી વધારે કે તેના જેટલી હોય છે. (e) ત્રણ સદિશો કે જે એક જ સમતલમાં નથી તેનો સરવાળો કદાપી શૂન્ય સદિશ થતો નથી.

4.6 નીચે દર્શાવેલ અસમતાઓ ભૌમિતિક કે અન્ય કોઈ રીતે સાબિત કરો :
(a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
(b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \ge |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

(c) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
(d) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$
તેમાં સમતાનું ચિહ્ન ક્યારે લાગુ પડે છે ?

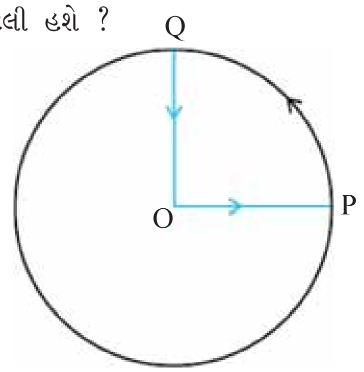
4.7 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ આપેલ છે. નીચે આપેલ વિધાનોમાંથી કયું સાચું છે :
(a) **a, b, c** તથા **d** દરેક શૂન્ય સદિશ છે.
(b) $(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ નું મૂલ્ય $(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ના મૂલ્ય જેટલું છે.
(c) **a**નું માન **b**, **c** તથા **d**ના માનના સરવાળાથી ક્યારેય વધારે ન હોઈ શકે.
(d) જો **a** અને **d** એક રેખસ્થ ન હોય તો **b** + **c**, **a** અને **d** વડે બનતા સમતલમાં હશે અને જો **a** અને **d** એક રેખસ્થ હોય, તો તે **a** અને **d**ની રેખામાં હશે.

4.8 ત્રણ છોકરીઓ 200 m ત્રિજ્યાવાળી વર્તુળાકાર રિંગમાં બરફની સપાટી પર સ્કેટિંગ કરી રહી છે તે સપાટીની કિનારી પર બિંદુ Pથી સ્કેટિંગ શરૂ કરે છે તથા Pના વ્યાસાંત બિંદુ Q પર જુદા જુદા પથો પર થઈને આકૃતિ (4.20)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પહોંચે છે. દરેક છોકરીના સ્થાનાંતર સદિશનું માન કેટલું છે ? કઈ છોકરી માટે તેનું માન તેની મૂળ સ્કેટની પથલંબાઈ જેટલું થશે ?



આકૃતિ **4.20**

4.9 કોઈ સાઇકલ-સવાર 1 km ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળાકાર બગીચાના કેન્દ્ર Oથી ગતિ શરૂ કરે છે તથા બગીચાના કિનારા P સુધી પહોંચે છે. ત્યાંથી તે બગીચાના પરિઘ પર સાઇકલ ચલાવતા ચલાવતા QO માર્ગે (આકૃતિ 4.21માં દર્શાવ્યા મુજબ) કેન્દ્ર O પર પાછો આવે છે. જો આ ચક્કર કાપવા માટે તેને 10 મિનિટ જેટલો સમય લાગતો હોય, તો સાઇકલ-સવારનું (a) ચોખ્ખું સ્થાનાંતર (b) સરેરાશ વેગ તથા (c) સરેરાશ ઝડપ કેટલી હશે ?



આકૃતિ **4.21**

4.10 એક ખુલ્લા મેદાનમાં એક કારચાલક એવો રસ્તો પકડે છે કે જે દરેક 500 મીટર અંતર બાદ તેની ડાબી બાજુ 60°ના ખૂણે વળાંક લે છે. એક વળાંકથી શરૂ કરી, કારચાલકના ત્રીજા, છઠ્ઠા તથા આઠમા વળાંક પાસે સ્થાનાંતર શોધો. આ દરેક સ્થિતિમાં કારચાલકની કુલ પથ લંબાઈની તેના સ્થાનાંતરના માન સાથે તુલના કરો.

4.11 એક મુસાફર એક નવા શહેરમાં સ્ટેશન પર ઊતરીને ટેક્સી કરે છે. સ્ટેશનથી સુરેખ રોડ પર તેની હોટલ 10 km દૂર છે. ટેક્સી ડ્રાઇવર મુસાફરને 23 km લંબાઈના વાંકાચૂંકા માર્ગે 28 minમાં હોટલ પર પહોંચાડે છે, તો (a) ટેક્સીની સરેરાશ ઝડપ અને (b) સરેરાશ વેગનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? શું આ બંને સમાન હશે ?

4.12 વરસાદ શિરોલંબ દિશામાં 30 m s^{-1}ની ઝડપથી પડી રહ્યો છે. કોઈ સ્ત્રી ઉત્તરથી દક્ષિણ દિશા તરફ 10 m s^{-1}ની ઝડપથી સાઇકલ ચલાવી રહી છે. તેને પોતાની છત્રી કઈ દિશામાં રાખવી જોઈએ ?

4.13 એક વ્યક્તિ સ્થિર પાણીમાં 4.0 km/hની ઝડપથી તરી શકે છે. નદીનું પાણી 3.0 km/hની અચળ ઝડપથી વહી રહ્યું અને વ્યક્તિ આ વહેણને લંબરૂપે તરવાનો પ્રયત્ન કરતો હોય, તો જ્યારે તે નદીના બીજા કિનારે પહોંચશે ત્યારે તે નદીના વહેણ તરફ કેટલે દૂર પહોંચશે ?

4.14 એક બંદર (Harbour) પાસે હવા 72 km/h ઝડપથી વહી રહી છે. આ બંદરમાં ઊભેલી એક નૌકા ઉપર લગાવેલ ઝંડો N-E દિશામાં ફરકી રહ્યો છે. જો આ નૌકા ઉત્તર દિશામાં 51 km/hની ઝડપથી ગતિ કરવાનું શરૂ કરે, તો નૌકા પર લગાવેલ ઝંડો કઈ દિશામાં ફરકશે.

4.15 એક લાંબા હૉલની છત 25 m ઊંચી છે. 40 ms^{-1}ની ઝડપથી ફેંકવામાં આવેલ દડો છતને અથડાયા વગર પસાર થઈ શકે તે રીતે કેટલું મહત્તમ સમક્ષિતિજ અંતર કાપશે ?

4.16 ક્રિકેટનો કોઈ ખેલાડી દડાને 100 m જેટલા મહત્તમ સમક્ષિતિજ અંતર સુધી ફેંકી શકે છે. આ ખેલાડી આ જ દડાને જમીનથી ઉપર તરફ કેટલી ઊંચાઈ સુધી ફેંકી શકશે ?

4.17 80 cm લાંબા દોરડાના છેડે એક પથ્થર બાંધેલ છે તેને અચળ ઝડપથી સમક્ષિતિજ વર્તુળાકાર ફેરવવામાં આવે છે. જો પથ્થર 25 secમાં 14 પરિભ્રમણ પૂરા કરતો હોય, તો પથ્થરના પ્રવેગનું માન તથા તેની દિશા શોધો ?

4.18 એક વિમાન 900 km h^{-1}ની અચળ ઝડપથી ઊડી રહ્યું છે અને 1.00 km ત્રિજ્યાનું સમક્ષિતિજ વર્તુળ બનાવે છે. તેના કેન્દ્રગામી પ્રવેગ ગુરુત્વીય પ્રવેગની સાથે સરખામણી કરો.

4.19 નીચે આપેલ વિધાનોને ધ્યાનથી વાંચો અને કારણ સહિત દર્શાવો કે તે સાચાં છે કે ખોટાં :
(a) વર્તુળ ગતિમાં કોઈ કણનો ચોખ્ખો પ્રવેગ હંમેશાં વર્તુળાકાર પથની ત્રિજ્યાની દિશામાં કેન્દ્ર તરફ હોય છે.
(b) કોઈ બિંદુ પાસે કણનો વેગ હંમેશાં તે બિંદુ પાસેના પથની દિશામાં દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.
(c) નિયમિત વર્તુળ ગતિ કરતાં કણ માટે એક પરિભ્રમણ પર લીધેલ સરેરાશ પ્રવેગ 0 સદિશ હોય છે.

4.20 એક કણનો સ્થાનસદિશ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે :

$$\mathbf{r} = 3.0t\hat{\mathbf{i}} - 2.0\, t^2\hat{\mathbf{j}} + 4.0\, \hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{m}$$

જ્યાં t સેકન્ડમાં તથા દરેક સહગુણકનો એકમ એ રીતે છે કે જેથી r મીટરમાં મળે.
(a) કણનો $\boldsymbol{\upsilon}$ તથા $\boldsymbol{a}$ મેળવો. (b) t = 2.0 સેકન્ડે કણના વેગનું માન તથા દિશા શોધો.

4.21 કોઈ કણ $t = 0$ સમયે ઊગમબિંદુથી 10.0 $\hat{\mathbf{j}}$ m/sના વેગથી ગતિ શરૂ કરે છે અને xy સમતલમાં તેનો અચળ પ્રવેગ $(8.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m s^{-2} છે. તો (a) કયા સમયે તેનો x-યામ 16 m થશે ? આ સમયે તેનો y-યામ કેટલો હશે ? (b) આ સમયે તેની ઝડપ કેટલી હશે ?

4.22 $\hat{\mathbf{i}}$ તથા $\hat{\mathbf{j}}$ અનુક્રમે X અને Y-અક્ષ પરના એકમ સદિશ છે. સદિશો $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ તથા $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$નાં મૂલ્યો અને દિશા કઈ હશે ? સદિશ $A = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ના $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ તથા $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ની દિશાઓમાં ઘટક શોધો. (તમે આલેખીય રીતનો ઉપયોગ કરી શકો છો.)

4.23 અવકાશમાં કોઈ સ્વૈચ્છિક ગતિ માટે નીચે આપેલા સંબંધો પૈકી કયો સાચો છે ?
(a) $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{સરેરાશ}} = (1/2)\,(\boldsymbol{\upsilon}(t_1) + \boldsymbol{\upsilon}(t_2))$
(b) $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{સરેરાશ}} = [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)]\,/\,(t_2 - t_1)$
(c) $\boldsymbol{\upsilon}(t) = \boldsymbol{\upsilon}(0) + \boldsymbol{a}\,t$
(d) $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}(0) + \boldsymbol{\upsilon}(0)t + (1/2)\ \boldsymbol{a}t^2$
(e) $\boldsymbol{a}_{\text{સરેરાશ}} = [\boldsymbol{\upsilon}(t_2) - \boldsymbol{\upsilon}(t_1)]\,/\,(t_2 - t_1)$
(અહીં 'સરેરાશ મૂલ્ય' t_1 થી t_2 સમયગાળા સાથે સંબંધિત ભૌતિકરાશિનું સરેરાશ મૂલ્ય છે.)

4.24 નીચે દર્શાવેલ દરેક વિધાન ધ્યાનપૂર્વક વાંચો અને કારણ તથા ઉદાહરણ સહિત દર્શાવો કે તે સાચું છે કે ખોટું : અદિશ રાશિ તે છે કે જે
(a) કોઈ પ્રક્રિયામાં અચળ રહે છે.
(b) તે ક્યારેય ઋણ નથી હોતી.
(c) તે પરિમાણરહિત હોય છે.
(d) અવકાશમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુ વચ્ચે બદલાતી નથી.
(e) તે દરેક અવલોકનકાર માટે એક મૂલ્ય હોય છે પછી ભલે તેના યામાક્ષોનાં નમન (Orientations) જુદાં હોય.

4.25 કોઈ વિમાન પૃથ્વીથી 3400 mની ઊંચાઈએ ઊડી રહ્યું છે. જો પૃથ્વી પરના કોઈ અવલોકન બિંદુ પાસે વિમાન દ્વારા 10 secમાં કપાયેલ અંતર 30°નો કોણ બનાવતું હોય, તો વિમાનની ઝડપ કેટલી હશે ?

વધારાનું સ્વાધ્યાય

4.26 કોઈ સદિશને માન તથા દિશા બંને હોય છે. શું અવકાશમાં તેને કોઈ સ્થાન હોય છે ? શું સમય સાથે તે બદલાઈ શકે ? શું અવકાશમાં જુદાંજુદાં સ્થાનો પાસે બે સમાન સદિશો **a** તથા **b** સમાન ભૌતિક અસર દર્શાવશે ? તમારા જવાબના સમર્થનમાં ઉદાહરણ આપો.

4.27 કોઈ સદિશને માન તથા દિશા બંને હોય છે. શું તેનો અર્થ એ થાય કે કોઈ રાશિ જેને માન અને દિશા બંને હોય તે સદિશ જ હશે ? કોઈ વસ્તુનું પરિભ્રમણ, ભ્રમણાક્ષની દિશા તથા કોણીય સ્થાન વડે દર્શાવી શકાય છે. શું તેનો અર્થ એ થાય કે કોઈ પણ પરિભ્રમણ એક સદિશ છે ?

4.28 (a) કોઈ વર્તુળાકાર લૂપમાં વાળેલ તારની લંબાઈ (b) કોઈ સમતલ ક્ષેત્રફળ (c) કોઈ ગોળા સાથે સદિશને સાંકળી શકાય ? સમજાવો.

4.29 બંદૂકમાંથી સમક્ષિતિજ સાથે 30°ના કોણે છોડેલી ગોળી જમીનને 3.0 km દૂર અથડાય છે. પ્રક્ષિપ્ત કોણનું મૂલ્ય ગોઠવીને આપણે 5.0 km દૂર આવેલા લક્ષ્ય પર ગોળી મારી શકીએ ? ગણતરી કરીને જણાવો. હવાનો અવરોધ અવગણો.

4.30 એક ફાઇટર જેટ પ્લેન 1.5 kmની ઊંચાઈ પર 720 km/hની ઝડપથી સમક્ષિતિજ દિશામાં ઊડી રહ્યું છે. જો તે વિમાન વિરોધી તોપની બરાબર ઉપરથી પસાર થતું હોય, તો શિરોલંબ દિશા સાથે તોપના નાળચાનો ખૂણો કેટલો હોવો જોઈએ કે જેથી 600 m s^{-1}ની ઝડપથી છોડેલ ગોળો ફાઇટર પ્લેનને અથડાય ? ફાઇટર પ્લેનના પાઇલોટે લઘુતમ કેટલી ઊંચાઈએ પ્લેન ઉડાડવું જોઈએ કે જેથી તે ગોળાથી બચી શકે ? (g = 10 ms^{-2})

4.31 એક સાઇકલ-સવાર 27 km/h ની ઝડપથી સાઇકલ ચલાવી રહ્યો છે. જેવો તે રસ્તા પર 80 m ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર વળાંક પર પહોંચે તેવો તે, બ્રેક લગાવી દરેક સેકન્ડે પોતાની ઝડપ 0.50 m/sના એક સમાન દરથી ઓછી કરે છે. વર્તુળાકાર પથ પર સાઇકલ-સવારના ચોખ્ખા પ્રવેગનું મૂલ્ય તથા દિશા શોધો.

4.32 (a) દર્શાવો કે કોઈ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ x-અક્ષ તથા તેના વેગ સદિશ વચ્ચે બનતો ખૂણો સમયના પદમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}}\right)$$

(b) ઊગમબિંદુ આગળથી પ્રક્ષિપ્ત કરેલા પદાર્થનો પ્રક્ષિપ્ત કોણ

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$$

વડે અપાય છે તેમ સાબિત કરો. અહીં સંજ્ઞાઓને પ્રચલિત અર્થ છે.