પ્રકરણ 6

કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર (WORK, ENERGY AND POWER)

6.1 પ્રસ્તાવના
6.2 કાર્ય અને ગતિઊર્જાના ખ્યાલો : કાર્યઊર્જા પ્રમેય
6.3 કાર્ય
6.4 ગતિઊર્જા
6.5 ચલબળ વડે થતું કાર્ય
6.6 ચલબળ માટે કાર્યઊર્જા પ્રમેય
6.7 સ્થિતિઊર્જાની વિભાવના (ખ્યાલ)
6.8 યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ
6.9 સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા
6.10 ઊર્જાનાં જુદાં જુદાં સ્વરૂપો : ઊર્જા-સંરક્ષણનો નિયમ
6.11 શક્તિ (પાવર)
6.12 સંઘાત (અથડામણો)
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય
વધારાનું સ્વાધ્યાય
પરિશિષ્ટ 6.1

6.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

'કાર્ય' (Work), 'ઊર્જા' (Energy) અને 'પાવર' (Power) આ શબ્દપ્રયોગ આપણે વાતચીતમાં દરરોજ કરીએ છીએ. ખેતર ખેડતો ખેડૂત, બાંધકામ માટે ઈંટો લઈ જતો મજૂર, સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષા માટે મહેનત કરતો વિદ્યાર્થી, સૃષ્ટિ સૌંદર્યનું ચિત્ર દોરતો ચિત્રકાર, આ બધાં જ કાર્ય કરે છે તેમ કહેવાય. જોકે ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં 'કાર્ય' શબ્દનો ચોક્કસ અને સચોટ અર્થ થાય છે. જે કોઈ વ્યક્તિની ક્ષમતા દિવસના 14-16 કલાક કામ કરવાની હોય તેની શક્તિ કે ઊર્જા ખૂબ છે તેમ કહીએ છીએ. આપણે લાંબા અંતરની દોડવીરની તેણીની શક્તિ બદલ પ્રશંસા કરીએ છીએ. આમ 'ઊર્જા' એ આપણી કાર્ય કરવાની ક્ષમતા (Capacity) દર્શાવે છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં પણ, 'ઊર્જા' આ સંદર્ભમાં કાર્ય સાથે સંકળાયેલ છે, પરંતુ ઉપર દર્શાવ્યું તે મુજબ 'કાર્ય' ઘણી વધુ સચોટતાથી વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ. 'પાવર' શબ્દનું આપણે રોજિંદા જીવનમાં જુદી જુદી રીતે અર્થઘટન કરીએ છીએ. કરાટે કે બૉક્સિંગમાં આપણે 'પાવરફુલ' પંચ (મુક્કા)ની વાત કરીએ છીએ. આપણે પંચ ખૂબ ઝડપથી ઉગામતા હોઈએ છીએ. આ અર્થઘટન ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આવતા શબ્દ 'પાવર'ને મળતું આવે છે. આપણે દર્શાવીશું કે ભૌતિકવિજ્ઞાનની વ્યાખ્યાઓ અને શરીરવિજ્ઞાનમાં આ ભૌતિકરાશિના આપણા મગજમાં ઉદ્‌ભવતાં ચિત્રો વચ્ચે ખાસ સંબંધ નથી. આ પ્રકરણમાં આપણે આ ત્રણ ભૌતિકરાશિઓ (Quantitites) વિશે સમજવા પ્રયત્ન કરીશું. પરંતુ તે પહેલાં આપણે જરૂરી એવા ગાણિતિક ખ્યાલો, એટલે કે બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર (Scalar Product) સમજી લઈએ.

6.1.1 અદિશ ગુણાકાર (The Scalar Product)

પ્રકરણ 4માં આપણે સદિશોનો પરિચય કેળવ્યો. ભૌતિકરાશિઓ જેવી કે સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ, બળ વગેરે સદિશો છે. આપણે એ પણ શીખ્યાં કે સદિશોનો સરવાળો કે બાદબાકી કેવી રીતે થાય. હવે આપણે સદિશોનો ગુણાકાર કેવી રીતે થાય તે જોઈએ. આપણને જરૂર પડશે તેવી સદિશોના ગુણાકારની બે રીત આપણે જોઈએ : એક રીત છે સદિશોના અદિશ ગુણાકારની કે જે આપણને અદિશ આપે છે અને બીજી રીત છે સદિશોના સદિશ ગુણાકારની જે પરિણામ રૂપે આપણને નવો સદિશ આપે છે. સદિશ ગુણાકાર આપણે પ્રકરણ 7માં સમજીશું. અહીં આપણે બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર જોઈએ. કોઈ બે સદિશો **A** અને **B**નો અદિશ ગુણાકાર કે ડૉટ (·) ગુણાકાર, **A·B** તરીકે દર્શાવાય છે (**A** ડૉટ **B** તેમ વંચાય) અને તેને

$$\mathbf{A \cdot B} = A\ B \cos\ \theta \qquad (6.1a)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે. જ્યાં θ એ આકૃતિ 6.1(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ બે સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો છે. A, B અને $\cos\theta$ અદિશો હોવાથી **A** અને **B**નો અદિશ ગુણાકાર પણ અદિશ છે. દરેક સદિશ **A** અને **B**ને દિશા હોય છે પરંતુ તેમના અદિશ ગુણાકારને કોઈ દિશા હોતી નથી.

સમીકરણ (6.1a) પરથી

$$\mathbf{A \cdot B} = A\ (B \cos\ \theta)$$
$$= B\ (A \cos\ \theta)$$

ભૌમિતિક રીતે, આકૃતિ 6.1(b) મુજબ $B\cos\theta$ એ **B**નો **A** પરનો પ્રક્ષેપ છે અને આકૃતિ 6.1(c) મુજબ $A\cos\theta$ એ **A**નો **B** પરનો પ્રક્ષેપ છે. આમ, **A·B** એ **A**ના મૂલ્ય અને **B**ના **A** પરના પ્રક્ષેપનો ગુણાકાર છે. બીજી રીતે કહીએ તો, તે **B**ના મૂલ્ય અને **A**ના **B** પરના પ્રક્ષેપનો ગુણાકાર છે.

સમીકરણ (6.1a) દર્શાવે છે કે અદિશ ગુણાકાર **ક્રમના નિયમ (Commutative Law)**નું પાલન કરે છે :

$$\mathbf{A \cdot B} = \mathbf{B \cdot A}$$

અદિશ ગુણાકાર **વિભાજનના નિયમ (Distributive Law)**નું પાલન કરે છે :

$$\mathbf{A \cdot (B + C)} = \mathbf{A \cdot B} + \mathbf{A \cdot C}$$

આ ઉપરાંત $\lambda \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{B})$

જ્યાં λ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. આ સમીકરણોનો ઉકેલ તમે સ્વાધ્યાય તરીકે મેળવજો.

એકમ સદિશો $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ માટે

આપેલ બે એકમ સદિશો માટે અદિશ ગુણાકાર

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$$

નીચે આપેલ બે સદિશો

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

માટે અદિશ ગુણાકાર

$$\mathbf{A \cdot B} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}) \cdot (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}})$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (6.1b)$$

અદિશ ગુણાકારની વ્યાખ્યા અને (સમીકરણ 6.1b) પરથી :

(i) $\mathbf{A \cdot A} = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z$

અથવા $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad (6.1c)$

કારણ કે $\mathbf{A \cdot A} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}| \cos 0 = A^2$

(ii) $\mathbf{A \cdot B} = 0$, જો **A** અને **B** પરસ્પર લંબ હોય તો.

> **ઉદાહરણ 6.1** બળ $\mathbf{F} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}})$ એકમ અને સ્થાનાંતર $\mathbf{d} = (5\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})$ એકમ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો તથા **F**ના **d** પરના પ્રક્ષેપનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ $\mathbf{F \cdot d} = F_xd_x + F_yd_y + F_zd_z$

$= 3(5) + 4(4) + (-5)(3)$

$= 16$ એકમ

આથી $\mathbf{F \cdot d} = Fd\cos\theta = 16$ એકમ

હવે $\mathbf{F \cdot F} = F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$

$= 9 + 16 + 25$

$= 50$ એકમ

અને $\mathbf{d \cdot d} = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2$

$= 25 + 16 + 9$

$= 50$ એકમ

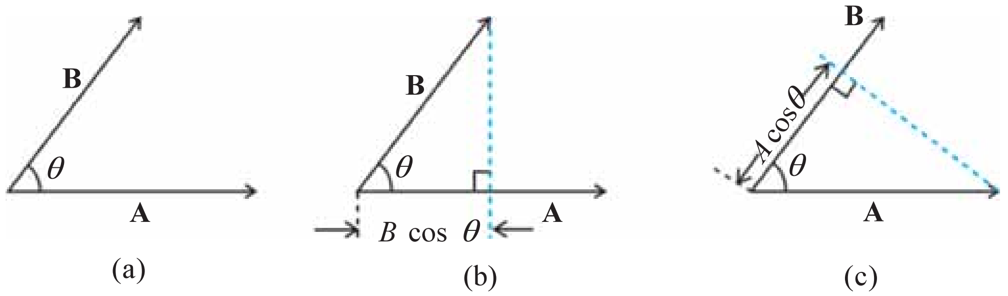
આથી, $\cos\theta = \dfrac{16}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{16}{50} = 0.32$

$\theta = \cos^{-1}0.32$

Fનો d પરનો પ્રક્ષેપ

$= F\cos\theta$

$= \sqrt{50} \times 0.32$ એકમ



આકૃતિ 6.1 *બે સદિશો **A** અને **B**નો અદિશ ગુણાકાર અદિશ હોય છે : **A·B** = A B cos θ. (b) B cos θ એ **B**નો **A** પરનો પ્રક્ષેપ છે. (c) A cos θ એ **A**નો **B** પરનો પ્રક્ષેપ છે.*

6.2 કાર્ય અને ગતિઊર્જાના ખ્યાલો : કાર્યઊર્જા પ્રમેય (NOTIONS OF WORK AND KINETIC ENERGY : THE WORK-ENERGY THEOREM)

એક દિશામાં a અચળ પ્રવેગથી ગતિ કરતા પદાર્થનું સમીકરણ, પ્રકરણ 3માં આવ્યું હતું જે મુજબ

$$\upsilon^2 - u^2 = 2\,as \qquad \text{(A)}$$

જ્યાં u અને υ એ પ્રારંભિક અને અંતિમ ઝડપ તથા s એ કાપેલ અંતર છે. બંને બાજુ $m/2$ વડે ગુણતાં

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}mu^2 = mas = Fs \qquad \text{(6.2a)}$$

જ્યાં અંતિમ પદ ન્યૂટનના બીજા નિયમ અનુસાર દર્શાવેલ છે. આપણે સમીકરણ (A)ને સદિશોનો ઉપયોગ કરીને ત્રિપરિમાણમાં આ રીતે દર્શાવી શકીએ.

$$\upsilon^2 - u^2 = 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$$

અહીં, ફરીથી બંને બાજુ $m/2$ વડે ગુણતાં

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}mu^2 = m\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} \qquad \text{(6.2b)}$$

ઉપરનું સમીકરણ કાર્ય અને ગતિઊર્જાને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટેની પ્રેરણા પૂરી પાડે છે. સમીકરણની ડાબી બાજુનું પદ એ પ્રારંભિક અને અંતિમ 'વેગના વર્ગ અને દળના ગુણાકારના અડધા મૂલ્ય'ના તફાવત જેટલું છે. આ દરેક પદને આપણે 'ગતિઊર્જા' તરીકે ઓળખીએ છીએ જે K વડે દર્શાવાય છે. જમણી બાજુનું પદ એ સ્થાનાંતર અને બળના સ્થાનાંતરની દિશામાંના ઘટકના ગુણનફળ જેટલું છે. આ પદને આપણે 'કાર્ય' કહીએ છીએ જે W વડે દર્શાવાય છે. આમ સમીકરણ (6.2b) પરથી,

$$K_f - K_i = W \qquad \text{(6.3)}$$

જ્યાં K_i અને K_f અનુક્રમે પદાર્થની પ્રારંભિક અને અંતિમ ગતિઊર્જા છે. અહીં કાર્યમાં, બળ અને તે જે સ્થાનાંતર સુધી લાગે છે તેનો ઉલ્લેખ છે. **પદાર્થ પર લાગતા બળ વડે થતા ચોક્કસ સ્થાનાંતર દરમિયાન તેના પર કાર્ય થાય છે.**

સમીકરણ (6.2) એ કાર્યઊર્જા (Work Energy, WE) પ્રમેય : **કણની ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર તેના પર લાગતા ચોખ્ખા (પરિણામી) બળ વડે થતા કાર્ય જેટલો હોય છે** - નો વિશિષ્ટ કિસ્સો છે. આપણે ચલબળ માટે ઉપરની તારવણી પછીના પરિચ્છેદમાં કરીશું.

▶ *ઉદાહરણ 6.2* આપણે જાણીએ છીએ કે, વરસાદનું ટીપું નીચે તરફ લાગતા ગુરુત્વાકર્ષણ બળ અને વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતા અવરોધક બળની અસર હેઠળ પડે છે. અવરોધક બળ ટીપાની ઝડપના સમપ્રમાણમાં હોય છે જે સામાન્ય રીતે જાણી શકાતું નથી. ધારો કે 1.00 ગ્રામ દળનું એક ટીપું 1.00 km ઊંચાઈએથી પડે છે. તે જમીન પર 50.0 m s^{-1}ની ઝડપથી સ્પર્શે છે. (a) ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ? (b) અજ્ઞાત અવરોધક બળ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

ઉકેલ (a) ટીપાની ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0$$
$$= \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 50 \times 50$$
$$= 1.25 \text{ J}$$

અહીં આપણે ધાર્યું છે કે પ્રારંભમાં ટીપું સ્થિર છે.

gનું મૂલ્ય 10 m/s^2 જેટલું અચળ ધારીએ તો, ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે થયેલ કાર્ય

$$W_g = mgh$$
$$= 10^{-3} \times 10 \times 10^3$$
$$= 10.0 \text{ J}$$

(b) કાર્યઊર્જા પ્રમેય પરથી

$$\Delta K = W_g + W_r$$

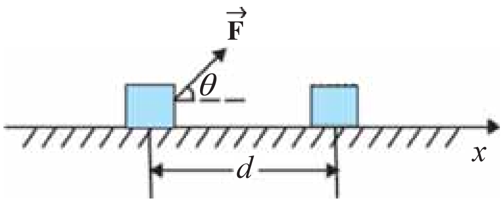
જ્યાં W_r એ અવરોધક (Resistive) બળ વડે વરસાદનાં ટીપાં પર થયેલું કાર્ય છે. આથી

$$W_r = \Delta K - W_g$$
$$= 1.25 - 10$$
$$= -8.75 \text{ J}$$

જે ઋણ છે. ◀

6.3 કાર્ય (WORK)

અગાઉ જોયું તે મુજબ, કાર્ય એ બળ અને તેના વડે થતા સ્થાનાંતર સાથે સંકળાયેલ છે. ધારો કે m દળવાળા પદાર્થ પર અચળ બળ **F** લાગે છે. આકૃતિ 6.2 મુજબ પદાર્થ ધન X-અક્ષની દિશામાં **d** જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે.



આકૃતિ 6.2 બળ **F**ની અસર હેઠળ પદાર્થ **d** જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે.

બળ વડે થતું કાર્ય, બળના સ્થાનાંતરની દિશામાંના ઘટક અને સ્થાનાંતરના મૂલ્યના ગુણન, વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. આમ

$$W = (F\cos\,\theta)d = \mathbf{F{\cdot}d} \qquad (6.4)$$

જ્યારે સ્થાનાંતર શૂન્ય હોય, ત્યારે બળ વધુ (મોટું) હોય તોપણ કાર્ય થતું નથી. આમ તમે ઇંટની દઢ દીવાલ પર ગમે તેટલું દબાણ કરો, તોપણ તમે લગાવેલા બળ વડે દીવાલ પર કાર્ય થતું નથી. ભલેને તમારા સ્નાયુઓ અનુક્રમે તંગ થતા હોય અને શિથિલ થતા હોય તથા તમારી આંતરિક ઊર્જા વપરાતી હોય અને તમે થાકી ગયાં હોય. આમ, ભૌતિકવિજ્ઞાન મુજબ કાર્યનો અર્થ રોજિંદી ભાષાથી અલગ છે.

નીચે દર્શાવેલા સંજોગોમાં બિલકુલ કાર્ય થતું નથી :

(i) સ્થાનાંતર શૂન્ય હોય ત્યારે, ઉપરના ઉદાહરણમાં જોયું તે મુજબ. કોઈ વેઇટલિફ્ટર (Weightlifter) 150 kg દળ તેના ખભા પર 30 s સુધી સ્થિર ઊંચકી રાખે તો પણ તેના વડે આ સમય દરમિયાન કોઈ કાર્ય થયું છે તેમ ન કહી શકાય.

(ii) બળ શૂન્ય હોય ત્યારે. લીસી સમતલ સપાટી પર સરકતા ચોસલા (બ્લૉક) પર સમક્ષિતિજ બળ લાગતું ન હોય (કારણ કે અહીં ઘર્ષણ થતું નથી), છતાં મોટું સ્થાનાંતર પણ કરે.

(iii) જો બળ અને (તેના વડે થતું) સ્થાનાંતર પરસ્પર લંબ હોય. કારણ કે, $\theta = \pi/2$ રેડિયન ($= 90^o$) માટે $\cos(\pi/2) = 0$. સમક્ષિતિજ લીસા ટેબલ પર ગતિ કરતા બ્લૉક માટે, ગુરુત્વીય બળ mg કાર્ય કરતું નથી કારણ કે તે સ્થાનાંતરને લંબરૂપે લાગે છે. જો આપણે ચંદ્રના પૃથ્વી આસપાસના પરિભ્રમણને બરોબર વર્તુળાકાર માનીએ તો પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ કોઈ કાર્ય કરતું નથી. દરેક બિંદુએ ચંદ્રનું તત્કાલીન સ્થાનાંતર સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે જ્યારે પૃથ્વી વડે લાગતું બળ અંદરની તરફ ત્રિજ્યાવર્તી હોય છે, જેથી $\theta = \pi/2$.

કાર્ય ધન કે ઋણ બંને હોઈ શકે છે. જો θ નું મૂલ્ય 0° અને 90^oની વચ્ચે હોય તો સમીકરણ (6.4)માં $\cos\,\theta$ ધન થાય. જો θ નું મૂલ્ય 90° અને 180^oની વચ્ચે હોય, તો $\cos\,\theta$ ઋણ થાય. ઘણા કિસ્સાઓમાં ઘર્ષણબળ સ્થાનાંતરની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે એટલે કે $\theta = 180^o$. અહીં ઘર્ષણબળ વડે થતું કાર્ય ઋણ હોય છે ($\cos 180^o = -1$).

સમીકરણ (6.4) પરથી એ સ્પષ્ટ થાય છે કે કાર્ય અને ઊર્જાના પરિમાણ સમાન હોય છે $[ML^2T^{-2}]$. તેમનો SI એકમ જૂલ (J) છે જે પ્રખ્યાત બ્રિટિશ ભૌતિકવિજ્ઞાની જૅમ્સ પ્રેસ્કોટ્ટ જૂલ (1811-1869)ની યાદમાં રાખવામાં આવેલ છે. કાર્ય અને ઊર્જાનો ઉપયોગ ભૌતિક સિદ્ધાંતોમાં ખૂબ થતો હોવાથી, તેમની સાથે સંકળાયેલા કેટલાંક વૈકલ્પિક એકમો પણ કોષ્ટક 6.1માં દર્શાવ્યા છે.

કોષ્ટક 6.1 J (જૂલ)માં દર્શાવેલ કાર્ય/ઊર્જાના વૈકલ્પિક એકમો

અર્ગ	10^{-7} J
ઇલેક્ટ્રૉન વોલ્ટ (eV)	1.6×10^{-19} J
કેલરી (cal)	4.186 J
કિલોવૉટ અવર (kWh)	3.6×10^6 J

▶ *ઉદાહરણ 6.3* એક સાઇકલ-સવાર 10 m અંતર ઘસડાઈને સ્થિર થાય છે. આ ઘટના દરમિયાન રસ્તા વડે સાઇકલ પર લાગતું 200 N બળ, ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે. (a) રસ્તા વડે સાઇકલ પર કેટલું કાર્ય થયું હશે ? (b) સાઇકલ વડે રસ્તા પર કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

ઉકેલ રસ્તા વડે સાઇકલ પર થયેલું કાર્ય, એ રસ્તા વડે ઘર્ષણબળ દ્વારા સાઇકલ પર થતું કાર્ય જેટલું હોય છે.

(a) થોભવા માટેના બળ અને સ્થાનાંતર વચ્ચે 180° (π રેડિયન) કોણ બનતો હોવાથી રસ્તા વડે થતું કાર્ય

$$W_r = Fd\cos\theta$$
$$= 200 \times 10 \times \cos\pi$$
$$= -2000 \text{ J}$$

કાર્યઊર્જા પ્રમેય અનુસાર આ ઋણ કાર્ય સાઇકલને રોકવા માટે થાય છે.

(b) ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ સાઇકલ દ્વારા તેટલું જ અને વિરુદ્ધ દિશાનું બળ રસ્તા પર લાગે છે. તેનું મૂલ્ય 200 N છે. આમ છતાં રસ્તાનું સ્થાનાંતર થતું નથી. આથી સાઇકલ દ્વારા રસ્તા પર થતું કાર્ય શૂન્ય છે. ◀

આ ઉદાહરણ પરથી સમજી શકાય કે પદાર્થ A પર પદાર્થ B વડે લાગતું બળ, એ પદાર્થ B પર પદાર્થ A વડે લાગતા બળ જેટલું અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે (ન્યૂટનનો ત્રીજો નિયમ); પણ A પર B વડે થતું કાર્ય હંમેશાં B પર A વડે થતા કાર્ય જેટલું અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવું જરૂરી નથી.

6.4 ગતિઊર્જા (KINETIC ENERGY)

અગાઉ નોંધ્યું તેમ, જો m દળના પદાર્થનો વેગ $\mathbf{v}$ હોય, તો તેની ગતિઊર્જા Kનું મૂલ્ય

$$K = \frac{1}{2}m\ \mathbf{v{\cdot}v} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (6.5)$$

ગતિઊર્જા એ અદિશ રાશિ છે. પદાર્થની ગતિઊર્જા એ પદાર્થની ગતિ દ્વારા પદાર્થ વડે થઈ શકતા કાર્યનું મૂલ્ય દર્શાવે છે. આ બાબત ઘણા લાંબા સમયથી સહજ રીતે જાણીતી તો હતી જ.

કોષ્ટક 6.2 વિશિષ્ટ ગતિઊર્જાઓ (K)

વસ્તુ	દળ (kg)	ઝડપ($m\ s^{-1}$)	K(J)
કાર	2000	25	6.3×10^5
દોડવીર	70	10	3.5×10^3
બુલિટ (ગોળી)	5×10^{-2}	200	10^3
10 m થી છોડી દીધેલ પથ્થર	1	14	10^2
અંતિમ ઝડપ વખતે વરસાદનું ટીપું	3.5×10^{-5}	9	1.4×10^{-3}
હવાનો અણુ	$\simeq 10^{-26}$	500	$\simeq 10^{-21}$

ઝડપથી વહેતા પ્રવાહ (વહેણ)ની ગતિઊર્જાનો ઉપયોગ અનાજ દળવા થતો હતો. પવનની ગતિઊર્જાનો ઉપયોગ કરીને સઢવાળા વહાણ ચાલે છે. કોષ્ટક 6.2માં કેટલાક પદાર્થોની ગતિઊર્જા દર્શાવી છે.

▶ *ઉદાહરણ 6.4* લશ્કરી કવાયતમાં પોલીસ અધિકારી 50.0 g દળની બુલિટને 200 m s^{-1} (કોષ્ટક 6.2 જુઓ)ની ઝડપે 2.00 cm જાડાઈના નરમ પાટિયા તરફ છોડે છે. બુલિટને તેની પ્રારંભિક ગતિઊર્જાની 10 % ઊર્જા સાથે તેમાંથી બહાર નીકળે છે. બહાર નીકળતી બુલિટની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ બુલિટની પ્રારંભિક ગતિઊર્જા $m\upsilon^2/2 = 1000$ J. તેની અંતિમ ગતિઊર્જા $0.1 \times 1000 = 100$ J. જો બહાર નીકળતી બુલિટની ઝડપ υ_f હોય તો

$$\frac{1}{2}m\upsilon_f^2 = 100 \text{ J}$$

$$\upsilon_f = \sqrt{\frac{2 \times 100\text{J}}{0.05 \text{ kg}}}$$

$$= 63.2 \text{ m s}^{-1}$$

ઝડપમાં થતો ઘટાડો લગભગ 68 % છે. (90 % નહિ).◀

6.5 ચલબળ વડે થતું કાર્ય (WORK DONE BY A VARIABLE FORCE)

અચળ બળ જવલ્લેજ જોવા મળે છે. મોટે ભાગે ચલબળ સાથે જ કામ પડે છે. એક પરિમાણમાં ચલબળનો આલેખ આકૃતિ 6.3(a)માં દર્શાવ્યો છે.

જો સ્થાનાંતર Δx સૂક્ષ્મ હોય, તો આપણે બળ $F(x)$ને લગભગ અચળ ગણી શકીએ અને તેથી થયેલ કાર્ય

$$\Delta W = F(x)\ \Delta x$$

આ બાબત આકૃતિ 6.3(a)માં દર્શાવી છે. આકૃતિ 6.3(a)માં અનુક્રમે આવતા લંબચોરસ ક્ષેત્રફળનો સરવાળો કરતાં આપણને કુલ કાર્ય મળે, જે

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\ \Delta x \qquad (6.6)$$

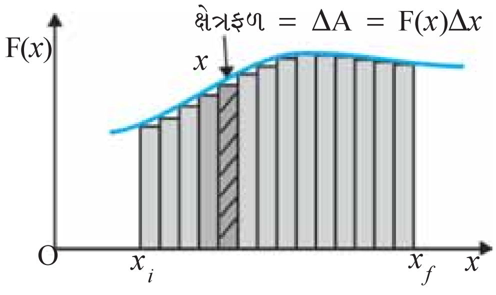
છે. અહીં સરવાળો પ્રારંભિક સ્થિતિ x_iથી અંતિમ સ્થિતિ x_f સુધીનો છે.

જો સ્થાનાંતર શૂન્યની નજીક અતિસૂક્ષ્મ ક્રમના લેવામાં આવે, તો સરવાળામાં પદોની સંખ્યા અમર્યાદ એટલે અનંત થાય, પરંતુ સરવાળાનું મૂલ્ય આકૃતિ 6.3(b)માં દર્શાવેલ વક્રની નીચેના ક્ષેત્રફળના ચોક્કસ મૂલ્ય જેટલું થાય. આમ, થયેલું કાર્ય

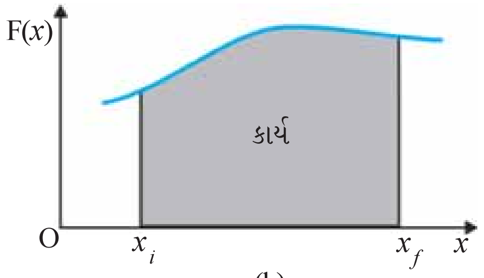
$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\ \Delta x$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} F(x)\text{d}x \qquad (6.7)$$

અહીં જ્યારે Δx, શૂન્યની નજીક પહોંચે ત્યારે આ સરવાળાના લક્ષને '*lim*' વડે દર્શાવી છે. આમ, ચલિતબળ માટે થયેલ કાર્યને બળના સ્થાનાંતર પરના નિયત સંકલન વડે દર્શાવી શકાય છે. (પરિશિષ્ટ 3.1 જુઓ.)



આકૃતિ 6.3(a)

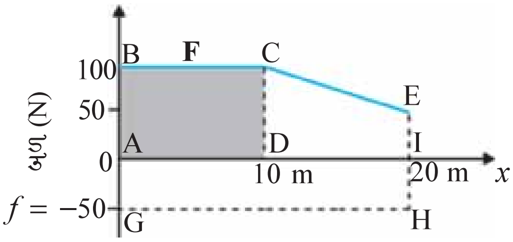


(b)

આકૃતિ 6.3 *(a) છાયાંકિત લંબચોરસ પટ્ટા વડે ઘેરાયેલું ક્ષેત્રફળ સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર Δx દરમિયાન ચલબળ વડે થયેલ કાર્ય $\Delta W = F(x)\,\Delta x$ દર્શાવે છે. (b) $\Delta x \to 0$ માટે આવા લંબચોરસોના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો, $F(x)$ વડે થયેલાં કાર્ય જેટલો જ હોય છે.*

> **ઉદાહરણ 6.5** રેલવે પ્લેટફૉર્મની ખરબચડી સપાટી પર એક બહેન પતરાની પેટી ઘસડે છે. તેણી 10 m અંતર સુધી 100 N બળ લગાડે છે. ત્યાર બાદ, થાકની માત્રા વધતાં તેમણે લગાડેલ બળ રેખીય (રીતે) ઘટીને 50 N થાય છે. પતરાની પેટીએ કાપેલ કુલ અંતર 20 m છે. બહેને લગાડેલ બળ અને 50 N જેટલા ઘર્ષણબળ-સ્થાનાંતર દર્શાવતો આલેખ દોરો. બંને બળો વડે 20 m અંતર સુધીમાં થયેલ કાર્ય શોધો.

ઉકેલ



આકૃતિ 6.4 *બહેને લગાડેલ બળ F અને તેની વિરુદ્ધ લાગતા ઘર્ષણબળ fનો સ્થાનાંતર વિરુદ્ધ આલેખ*

આકૃતિ 6.4માં લગાડેલ બળનો આલેખ દોરેલ છે. $x = 20$ m પાસે $F = 50$ N ($\neq 0$). ઘર્ષણબળ f નું મૂલ્ય $|\mathbf{f}| = 50$ આપણને આપેલું છે. તે $\mathbf{F}$ની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે અને ગતિને અવરોધે છે. આથી, તેને બળ દર્શાવતી અક્ષ પર ઋણ તરફ દર્શાવ્યું છે.

બહેને કરેલ કાર્ય

$W_F \to$ ABCD લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ + CEID સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ

$$W_F = 100 \times 10 + \frac{1}{2}(100 + 50) \times 10$$
$$= 1000 + 750$$
$$= 1750 \text{ J}$$

અવરોધક બળ વડે થયેલું કાર્ય

$W_f \to$ લંબચોરસ AGHIનું ક્ષેત્રફળ

$$W_f = (-50) \times 20$$
$$= -1000 \text{ J}$$

બળ અક્ષની ઋણ તરફના ક્ષેત્રફળનું ચિહ્ન ઋણ હોય છે. ◀

6.6 ચલબળ માટે કાર્યઊર્જા પ્રમેય (THE WORK ENERGY THEOREM FOR A VARIABLE FORCE)

આપણે ચલબળ માટે કાર્યઊર્જા પ્રમેય સાબિત કરવા માટે જરૂરી કાર્ય અને ગતિઊર્જાના ખ્યાલો જાણીએ છીએ. અહીં આપણે એક પરિમાણ માટે ચર્ચા કરીશું. સમય સાથે ગતિઊર્જાના ફેરફારનો દર

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,\upsilon^2\right)$$
$$= m\frac{d\upsilon}{dt}\,\upsilon$$
$$= F\,\upsilon \text{ (ન્યૂટનના બીજા નિયમ પરથી)}$$
$$= F\frac{dx}{dt}$$

આથી,

$$dK = F dx$$

પ્રારંભિક સ્થાન (x_i)થી અંતિમ સ્થાન (x_f) સુધી સંકલન કરતાં,

$$\int_{K_i}^{K_f} dK = \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

જ્યાં K_i અને K_f એ x_i અને x_fને અનુલક્ષીને પ્રારંભિક અને અંતિમ ગતિઊર્જાઓ છે.

$$\text{અથવા, } K_f - K_i = \int_{x_i}^{x_f} F dx \qquad (6.8a)$$

સમીકરણ (6.7) પરથી,

$$K_f - K_i = W \text{ મળે.} \qquad (6.8b)$$

આમ, ચલિત બળ માટે કાર્યઊર્જા પ્રમેય સાબિત થયું કહેવાય.

કાર્યઊર્જા પ્રમેય ભલે ઘણાબધા કિસ્સાઓમાં ઉપયોગી હોય, પરંતુ સામાન્ય રીતે, તે ન્યૂટનના બીજા નિયમની બધી જ ગત્યાત્મક માહિતી સમાવતું નથી. તે ન્યૂટનના બીજા નિયમનું સંકલિત સ્વરૂપ છે. ન્યૂટનનો બીજો નિયમ કોઈપણ ક્ષણે (સમયે) બળ અને પ્રવેગને સાંકળતો સંબંધ દર્શાવે છે. કાર્યઊર્જા પ્રમેયમાં ચોક્કસ સમય અંતરાલમાં સંકલન કરવામાં આવે છે. આ સંદર્ભમાં, ન્યૂટનના બીજા નિયમમાં દર્શાવેલ દરેક સમયની

ઘટનાનું 'સંકલન' થતું હોવાથી તે માહિતી સ્પષ્ટ (નિશ્ચિત) રીતે મળતી નથી. બીજું નિરીક્ષણ એ છે કે દ્વિ અને ત્રિપરિમાણમાં ન્યૂટનનો બીજો નિયમ સદિશ રૂપમાં હોય છે, જ્યારે કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય અદિશ રૂપમાં છે. ન્યૂટનના બીજા નિયમમાં દિશાને અનુલક્ષીને સંકળાયેલી માહિતી, આ અદિશ રૂપમાં સમાવિષ્ટ નથી હોતી.

▶ *ઉદાહરણ 6.6* સમતલ સપાટી પર $\upsilon_i = 2 \text{ m s}^{-1}$ની ઝડપથી ગતિ કરતો $m = 1$ kg દળનો એક બ્લૉક, ખરબચડા પટ્ટામાં પ્રવેશે છે જે $x = 0.10$ mથી $x = 2.01$ m સુધીનો છે. આ પટ્ટાની મર્યાદામાં બ્લૉક પર લાગતું અવરોધક બળ F_r એ x ના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

$F_r = \frac{-k}{x}$, જ્યાં, $0.1 < x < 2.01$ m

$= 0$ જ્યાં $x < 0.1$ m અને $x > 2.01$ m

અહીંયાં, $k = 0.5$ J. આ પટ્ટાને પસાર કર્યા પછી બ્લૉકની અંતિમ ગતિઊર્જા અને ઝડપ υ_f કેટલા હશે ?

ઉકેલ સમીકરણ (6.8a) પરથી

$$K_f = K_i + \int_{0.1}^{2.01} \frac{(-k)}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} m\upsilon_i^2 - k \ln(x)|_{0.1}^{2.01}$$

$$= \frac{1}{2} m\upsilon_i^2 - k \ln\left(\frac{2.01}{0.1}\right)$$

$$= 2 - 0.5 \ln (20.1)$$

$$= 2 - 1.5 = 0.5 \text{ J}$$

$$\upsilon_f = \sqrt{2K_f/m} = 1 \text{ m s}^{-1}$$

અહીં, નોંધો કે ln એ નેચરલ લોગેરિધમની સંજ્ઞા છે, જેનો આધાર e છે અને તે 10 આધારવાળું લોગેરિધમ નથી. [$\ln X = \log_e X = 2.303 \log_{10} X$] ◀

6.7 સ્થિતિઊર્જાની વિભાવના (ખ્યાલ) (THE CONCEPT OF POTENTIAL ENERGY)

Potential શબ્દ ક્રિયા કરવાની ક્ષમતા કે શક્યતા દર્શાવે છે. સ્થિતિઊર્જા શબ્દ સાંભળતા જ કોઈના પણ મનમાં 'સંગ્રહિત' ઊર્જા એવો ખ્યાલ આવે. ખેંચાયેલી ધનુષની પણછ (દોરી) સ્થિતિઊર્જા ધરાવે છે. જ્યારે પણછ છોડવામાં આવે ત્યારે તીર ખૂબ ઝડપથી છૂટે છે. પૃથ્વીની સપાટી (પોપડો) એકધારી નિયમિત નથી, પરંતુ તે અસતત અને અમુક જગ્યાએ ભંગાણવાળી છે જેને તિરાડો (ફૉલ્ટલાઇન) કહે છે. આ તિરાડો પૃથ્વીના પોપડાઓ વચ્ચે 'દબાયેલી સ્પ્રિંગ'ની જેમ હોય છે. તે ખૂબ સ્થિતિઊર્જા ધરાવે છે. જ્યારે આ તિરાડો એકબીજા સાથે ફરીથી ગોઠવાવા પ્રયત્ન કરે ત્યારે ધરતીકંપ થાય છે. આમ, સ્થિતિઊર્જા એ કોઈ પદાર્થની સ્થિતિ અથવા ગોઠવણીને અનુલક્ષીને 'સંગ્રહિત ઊર્જા' છે. જ્યારે પદાર્થને છોડી દેવામાં આવે ત્યારે તેની સંગ્રહિત ઊર્જા મુક્ત થાય છે જે ગતિઊર્જામાં પરિણમે છે. હવે આપણે સ્થિતિઊર્જાના ખ્યાલને વધુ મજબૂત કરીએ.

m દળના દડા પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ mg હોય છે. gને પૃથ્વીની સપાટી નજીક અચળ ગણી શકાય. 'નજીક' શબ્દનો અર્થ એ કે પૃથ્વીની સપાટીથી દડાની ઊંચાઈ h એ પૃથ્વીની ત્રિજ્યા R_Eથી ઘણી નાની ($h << R_E$) હોય, કે જેથી પૃથ્વીની સપાટી* પાસે gના ફેરફારને આપણે અવગણી શકીએ. અહીં આપણે ઉપર તરફના સ્થાનાંતરને ધન ગણેલ છે. ધારો કે આપણે દડાને h ઊંચાઈ સુધી લઈ જઈએ છીએ. બાહ્ય પરિબળ વડે ગુરુત્વાકર્ષણ બળની વિરુદ્ધ થયેલ કાર્ય mgh છે. આ કાર્ય સ્થિતિઊર્જાના રૂપમાં સંગ્રહિત થાય છે. પદાર્થની ઊંચાઈ h સાથે સંકળાયેલ ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જા, $V(h)$ વડે દર્શાવાય છે અને તે પદાર્થને તેટલી ઊંચાઈએ લઈ જવા દરમિયાન ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે થતા કાર્યના ઋણ મૂલ્ય જેટલી હોય છે.

$$V(h) = mgh$$

જો hને એક ચલ તરીકે લઈએ તો એવું સહેલાઈથી જોઈ શકાય છે કે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ F, $V(h)$ના hને અનુલક્ષીને મળતા વિકલિતના ઋણ બરાબર હોય છે. આમ,

$$F = -\frac{d}{dh} V(h) = -m\ g$$

ઋણ ચિહ્ન દર્શાવે છે કે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ નીચે તરફ લાગે છે. જ્યારે દડાને છોડવામાં (મુક્ત કરવામાં) આવે ત્યારે તે વધતી ઝડપથી નીચે આવે છે. તે જમીનને સ્પર્શે તે પહેલાં (ની ક્ષણે) તેની ઝડપ ગતિના સમીકરણ

$$\upsilon^2 = 2gh$$

વડે મેળવી શકાય છે.

આ સમીકરણને બીજી રીતે લખીએ તો,

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = mgh$$

જે દર્શાવે છે કે h ઊંચાઈએ રહેલા પદાર્થને જ્યારે મુક્ત કરવામાં આવે ત્યારે તે જમીન પર પહોંચે ત્યાં સુધી તેની ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જાનું ગતિઊર્જામાં રૂપાંતર થતું જાય છે.

ભૌતિક રીતે, સ્થિતિઊર્જાની વિભાવના ફક્ત એવા પ્રકારનાં બળોને લાગુ પડે છે કે જેમાં બળની વિરુદ્ધ કરવામાં આવેલું કાર્ય, ઊર્જાના રૂપમાં સંગ્રહિત થતું હોય. જ્યારે બાહ્ય પરિબળો દૂર થાય ત્યારે તે ગતિઊર્જાના રૂપમાં પરિવર્તિત થાય છે. ગણિતીય રીતે, (સરળતા માટે એક પરિમાણમાં) સ્થિતિઊર્જા

* *ઊંચાઈ સાથે gમાં થતો ફેરફાર ગુરુત્વાકર્ષણના પ્રકરણ-8માં ચર્ચેલ છે.*

$V(x)$ને તો જ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય કે જો બળ $F(x)$ને આ રીતે લખી શકાય :

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

જે દર્શાવે છે કે,

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\int_{V_i}^{V_f} dV = V_i - V_f$$

ગુરુત્વાકર્ષણ જેવા સંરક્ષી બળ વડે થયેલું કાર્ય ફક્ત પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિઓ પર આધાર રાખે છે. અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે ઢાળવાળા સમતલ માટેનાં ઉદાહરણો જોયાં હતાં. જો m દળવાળા કોઈ પદાર્થને (ઘર્ષણરહિત) લીસા ઢાળની h ઊંચાઈ પરથી છૂટો મૂકવામાં આવે, તો તળિયા સુધી આવતાં તેની ઝડપ (ઢાળના કોઈ પણ કોણ માટે) $\sqrt{2gh}$ જેટલી થાય છે. આમ, ઢાળના છેડા સુધી પહોંચતા, તે mgh જેટલી ગતિઊર્જા મેળવી લે છે. જો થયેલ કાર્ય કે ગતિઊર્જા પદાર્થના ગતિપથ કે તેના વેગ જેવાં ઘટકો પર આધાર રાખતું હોય, તો તેને અસંરક્ષી બળ કહે છે.

સ્થિતિઊર્જાના પરિમાણ (ગતિઊર્જા અને કાર્યની જેમ) પણ $[ML^2T^{-2}]$ છે તથા તેનો એકમ જૂલ (J) છે. બીજી રીતે કહીએ તો સંરક્ષી બળ માટે, સ્થિતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર ΔV એ બળ વડે થયેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્ય જેટલો હોય છે.

$$\Delta V = -F(x)\ \Delta x \qquad (6.9)$$

આ વિભાગમાં વિચારેલ પતન કરતા દડાના ઉદાહરણમાં આપણે દર્શાવ્યું કે કેવી રીતે સ્થિતિઊર્જાનું ગતિઊર્જામાં રૂપાંતર થાય છે. તે આપણને યંત્રશાસ્ત્રમાં અગત્ય ધરાવતા સંરક્ષણના સિદ્ધાંત તરફ દોરી જાય છે.

6.8 યાંત્રિક ઊર્જાનું સંરક્ષણ (THE CONSERVATION OF MECHANICAL ENERGY)

સરળતા માટે આપણે આ સિદ્ધાંતને એક પરિમાણમાં ચર્ચીશું. ધારો કે કોઈ એક પદાર્થ સંરક્ષી બળ Fની અસર હેઠળ Δx જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે. આથી, WE (કાર્યઊર્જા) પ્રમેય અનુસાર

$$\Delta K = F(x)\ \Delta x$$

સંરક્ષી બળ માટે સ્થિતિઊર્જા વિધેય $V(x)$, વ્યાખ્યા મુજબ

$-\Delta V = F(x)\ \Delta x$ પરથી મળે.

ઉપરનાં સમીકરણો પરથી,

$$\Delta K + \Delta V = 0$$

$$\therefore\ \Delta(K + V) = 0 \qquad (6.10)$$

જે દર્શાવે છે કે પદાર્થ માટે, ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો $K + V$ અચળ રહે છે. આથી, x_i થી x_f સુધીના સમગ્ર ગતિપથ માટે

$$K_i + V(x_i) = K_f + V(x_f) \qquad (6.11)$$

રાશિ $K + V(x)$ને તંત્રની કુલ યાંત્રિકઊર્જા કહે છે. સ્વતંત્ર રીતે દરેક બિંદુએ ગતિઊર્જા K અને સ્થિતિઊર્જા $V(x)$ બદલાતા હોઈ શકે છે, પરંતુ તેમનો સરવાળો અચળ રહે છે. આમ, 'સંરક્ષી બળ'નો મુદ્દો સ્પષ્ટ સમજી શકાય.

હવે આપણે સંરક્ષી બળની કેટલીક વ્યાખ્યાઓ ધ્યાનમાં લઈએ :

- જો અદિશ રાશિ $V(x)$ને સમીકરણ (6.9) વડે દર્શાવેલ સંબંધો દ્વારા દર્શાવી શકાય તો $F(x)$ને સંરક્ષી બળ કહેવાય. ત્રિપરિમાણમાં આ સમજવા માટે સદિશના વિકલનનો ઉપયોગ કરવો પડે, જે આ પુસ્તકની મર્યાદા બહાર છે.
- સંરક્ષી બળ વડે થયેલું કાર્ય ફક્ત અંતિમ બિંદુઓ પર આધાર રાખે છે. આ બાબત સમીકરણ,

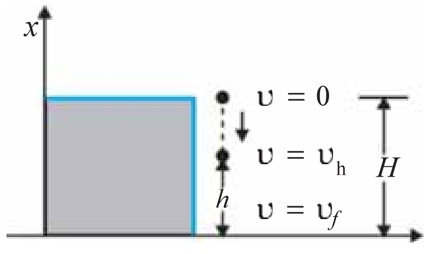
  $$W = K_f - K_i = V(x_i) - V(x_f)$$

  પરથી જોઈ શકાય છે. જે અંતિમ બિંદુઓ પર જ આધારિત છે.
- ત્રીજી વ્યાખ્યા દર્શાવે છે કે, બંધ માર્ગ પર આ બળ વડે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોય છે. જે ફરીથી સમીકરણ (6.11) પરથી જોઈ શકાય છે. કારણ કે, ફરીથી $x_i = x_f$.

આમ, કુલ યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત આ રીતે દર્શાવી શકાય :

જે તંત્ર પર સંરક્ષી બળો વડે કાર્ય થતું હોય તે તંત્રની કુલ યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે.

ઉપર મુજબની ચર્ચા વધુ સુદૃઢ બનાવવા આપણે ફરીથી ગુરુત્વીય બળોના અને પછીના વિભાગમાં સ્પ્રિંગબળના ઉદાહરણની ચર્ચા કરીશું. આકૃતિ 6.5માં m દળના દડાને H ઊંચાઈના ખડક (ભેખડ) પરથી પડતો દર્શાવ્યો છે.



આકૃતિ 6.5 m દળના દડાને H ઊંચાઈએથી પડતો મૂકતાં તેની સ્થિતિઊર્જાનું ગતિઊર્જામાં રૂપાંતરણ

ઊંચાઈઓ H, h અને શૂન્ય (જમીન પર) માટે દડાની કુલ યાંત્રિકઊર્જાઓ E_H, E_h અને E_0નાં મૂલ્યો

$$E_H = mgH \quad (6.11a)$$

$$E_h = mgh + \frac{1}{2} m\upsilon_h^2 \quad (6.11b)$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m\upsilon_f^2 \quad (6.11c)$$

અચળ બળ એ સ્થાન આધારિત બળ $F(x)$નો વિશિષ્ટ કિસ્સો છે. આથી, યાંત્રિકઊર્જા સંરક્ષાય છે. આમ,

$$E_H = E_0$$

અથવા, $mgH = \frac{1}{2} m\upsilon_f^2$

$$\therefore \upsilon_f = \sqrt{2gH}$$

આ પરિણામ મુક્ત પતન કરતા પદાર્થ માટે પરિચ્છેદ 3.7માં મેળવ્યું હતું.

આ ઉપરાંત,

$$E_H = E_h$$

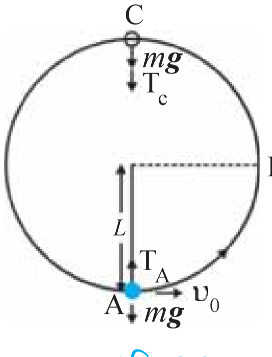
એટલે કે,

$$\upsilon_h^2 = 2g(H - h) \quad (6.11d)$$

જે શુદ્ધ ગતિશાસ્ત્રનું જાણીતું સમીકરણ છે.

H ઊંચાઈએ, ફક્ત સ્થિતિઊર્જા હોય છે. તે h ઊંચાઈએ અમુક અંશે ગતિઊર્જામાં રૂપાંતરિત થાય છે અને જમીન પર પૂર્ણ રીતે ગતિઊર્જા રૂપે મળે છે. આ યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 6.7 m દળનો એક દડો L લંબાઈની દળરહિત દોરી વડે લટકાવ્યો છે. તેને નિમ્નતમ બિંદુ A પાસે સમક્ષિતિજ દિશામાં υ_0 વેગથી ગતિ આપવામાં આવે છે કે જેથી તે ઉર્ધ્વસમતલમાં અર્ધવર્તુળાકાર માર્ગે જાય તથા ફક્ત મહત્તમ ઊંચાઈએ આવેલા બિંદુ C પાસે દોરી ઢીલી પડે. ઊર્ધ્વ સમતલમાં તે આકૃતિ 6.6 વડે દર્શાવેલ છે. તો (i) υ_0, (ii) બિંદુઓ B અને C પાસેની ઝડપ (iii) B અને C પાસે ગતિઊર્જાના ગુણોત્તર (K_B/K_C) માટેના સમીકરણ મેળવો. C બિંદુએ પહોંચ્યા પછી દડાનો માર્ગ કેવા પ્રકારનો હશે તે ચર્ચો.



આકૃતિ 6.6

ઉકેલ (i) દડા પર બે પ્રકારનાં બાહ્ય બળો લાગે છે : ગુરુત્વ અને દોરીમાં તણાવ (T). દડાનું સ્થાનાંતર હંમેશાં દોરીને લંબ રૂપે હોવાથી બીજું બળ (તણાવ) કાર્ય કરતું નથી. આમ, દડાની સ્થિતિઊર્જા ફક્ત ગુરુત્વાકર્ષણ બળ સાથે સંકળાયેલી હોય છે. તંત્રની કુલ યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે. ન્યૂનતમ બિંદુ A પાસે તંત્રની સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય ગણીશું. આથી, A પાસે

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 \quad (6.12)$$

$$T_A - mg = \frac{m\upsilon_0^2}{L} \quad \text{(ન્યૂટનનો બીજો નિયમ)}$$

જ્યાં, T_A એ બિંદુ A પાસે દોરીનું તણાવ બળ છે. મહત્તમ ઊંચાઈ C પરના બિંદુએ દોરી ઢીલા પડતાં દોરીનો તણાવ (T_C) શૂન્ય થાય છે. આથી C પાસે,

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon_C^2 + 2mgL \quad (6.13)$$

$$mg = \frac{m\upsilon_C^2}{L} \quad \text{(ન્યૂટનનો બીજો નિયમ)} \quad (6.14)$$

જ્યાં, υ_C એ C પાસેની ઝડપ છે. સમીકરણો (6.13) અને (6.14) પરથી,

$$E = \frac{5}{2} mgL$$

જેને બિંદુ A પાસેની ઊર્જા સાથે સરખાવતાં,

$$\frac{5}{2} mgL = \frac{m}{2} \upsilon_0^2$$

અથવા, $\upsilon_0 = \sqrt{5gL}$

(ii) સમીકરણ (6.14) પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$$\upsilon_C = \sqrt{gL}$$

B બિંદુ પાસે ઊર્જા

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon_B^2 + mgL$$

જેને બિંદુ A પાસેની ઊર્જા સાથે સરખાવી, (i)ના પરિણામ $\upsilon_0^2 = 5gL$નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{1}{2} m\upsilon_B^2 + mgL = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$$

$$= \frac{5}{2} mgL$$

$$\therefore \; \upsilon_B = \sqrt{3gL}$$

(iii) B અને C પાસેની ગતિઊર્જાઓનો ગુણોત્તર

$$\frac{K_B}{K_C} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_B^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_C^2} = \frac{3}{1}$$

બિંદુ C પાસે, દોરી ઢીલી પડે છે અને દડાનો વેગ ડાબી તરફ સમક્ષિતિજ દિશામાં છે. જો આ દોરીને આ જ ક્ષણે કાપી નાખવામાં આવે, તો દડો જાણે કે તે ઊંચાઈવાળા ખડક પરથી તેને સમક્ષિતિજ દિશામાં લાત મારતાં થતી પ્રક્ષિપ્ત ગતિની જેમ ગતિ કરશે, નહિતર દડો વર્તુળાકાર માર્ગ પર તેની પ્રદક્ષિણા ચાલુ રાખશે. ◀

6.9 સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા (THE POTENTIAL ENERGY OF A SPRING)

સ્પ્રિંગ બળ એ ચલિત બળનું ઉદાહરણ છે જે સંરક્ષી બળ છે. આકૃતિ 6.7માં દર્શાવ્યા મુજબ એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ એક બ્લૉક લીસા સમક્ષિતિજ સમતલ પર સ્થિર પડેલો છે. સ્પ્રિંગનો બીજો છેડો દૃઢ દીવાલ સાથે જડેલો છે. સ્પ્રિંગને હલકી અને વજનરહિત માની શકાય. આદર્શ સ્પ્રિંગ માટે, સ્પ્રિંગ બળ F_s એ xને સમપ્રમાણ હોય છે. જ્યાં, x એ સંતુલિત સ્થિતિથી બ્લૉકનું સ્થાનાંતર છે. સ્થાનાંતર ધન (આકૃતિ 6.7(b)) કે ઋણ (આકૃતિ 6.7(c)) હોઈ શકે છે. સ્પ્રિંગ માટે બળના આ નિયમને હૂકનો નિયમ કહે છે જે ગાણિતિક રીતે આ પ્રમાણે લખાય,

$$F_s = -kx$$

અચળાંક kને સ્પ્રિંગ અચળાંક કહે છે. તેનો એકમ $N\ m^{-1}$ છે. જો k મોટો હોય તો સ્પ્રિંગ કડક (અક્કડ) છે તેમ કહેવાય અને k નાનો હોય, તો સ્પ્રિંગ નરમ છે તેમ કહેવાય.

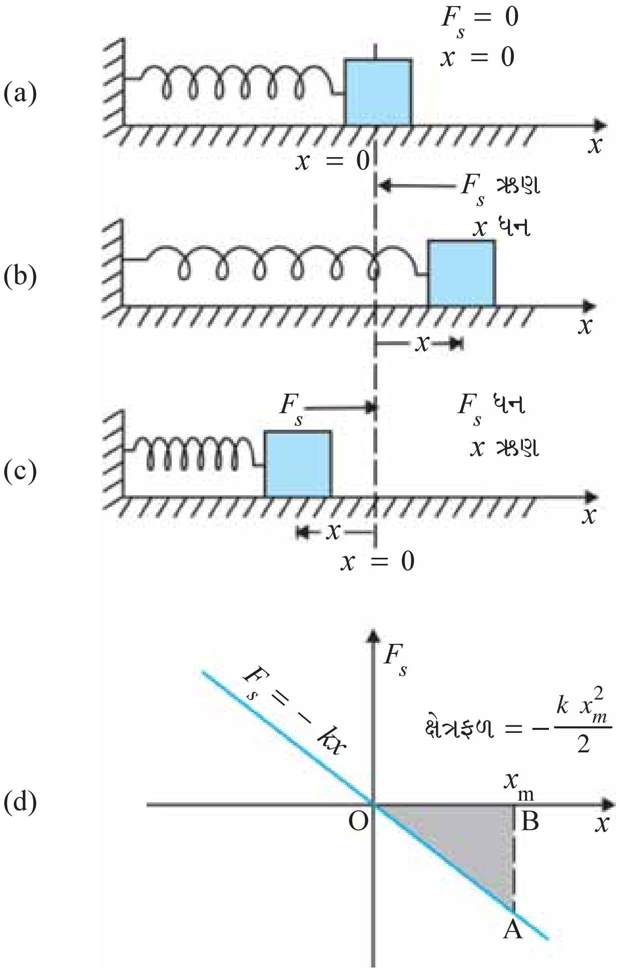
આકૃતિ 6.7(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે આપણે બ્લૉકને બહારની તરફ ખેંચીએ છીએ. જો લંબાઈમાં થતો વધારો x_m હોય, તો સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલ કાર્ય

$$W_s = \int_0^{x_m} F_s \mathrm{d}x = -\int_0^{x_m} kx\, \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{k\,x_m^2}{2} \qquad (6.15)$$

આ સમીકરણ આકૃતિ 6.7(d)માં દર્શાવેલ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળથી પણ મેળવી શકાય. યાદ રાખો કે, બાહ્ય ખેંચાણ બળ F વડે થયેલ કાર્ય ધન છે કારણ કે તે સ્પ્રિંગ બળને પહોંચી વળે (Overcomes) છે.

$$W = \frac{k\,x_m^2}{2} \qquad (6.16)$$



આકૃતિ 6.7 *સ્પ્રિંગના મુક્ત છેડા સાથે જોડાયેલા બ્લૉક માટે સ્પ્રિંગ બળ (a) જ્યારે સંતુલિત સ્થિતિથી સ્થાનાંતર x શૂન્ય હોય ત્યારે સ્પ્રિંગ બળ F_s શૂન્ય થાય છે, (b) ખેંચાયેલ સ્પ્રિંગ માટે $x > 0$ અને $F_s < 0$, (c) સંકોચાયેલ સ્પ્રિંગ માટે $x < 0$ અને $F_s > 0$, (d) F_s વિરુદ્ધ xનો આલેખ. ઘાટા કરેલા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલ કાર્ય દર્શાવે છે. F_s અને xની નિશાની પરસ્પર વિરુદ્ધ હોવાથી, આ કાર્ય ઋણ હોય છે, $W_s = -kx_m^2 / 2$.*

જ્યારે સ્પ્રિંગને $x_c (< 0)$ સ્થાનાંતર સુધી સંકોચવામાં આવે ત્યારે પણ આ (સમીકરણ) સત્ય છે. સ્પ્રિંગ બળ $W_s = -kx_c^2/2$ જેટલું કાર્ય કરે છે, જ્યારે બાહ્ય બળ F વડે

થતું કાર્ય $+kx_c^2/2$ છે. જો બ્લૉકને પ્રારંભિક સ્થાનાંતર x_iથી અંતિમ સ્થાનાંતર x_f સુધી ગતિ કરાવવામાં આવે, તો સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલ કાર્ય W_sનું મૂલ્ય

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} kx\, dx = \frac{k\,x_i^2}{2} - \frac{k\,x_f^2}{2} \qquad (6.17)$$

આમ, સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલું કાર્ય અંતિમ બિંદુઓ પર જ આધાર રાખે છે. સ્પષ્ટ રીતે જોઈએ તો, જો બ્લૉકને x_iથી ખેંચવામાં આવે અને x_i સુધી પાછો આવવા દઈએ તો

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_i} kx\, dx = \frac{k\,x_i^2}{2} - \frac{k\,x_i^2}{2}$$

$$= 0 \qquad (6.18)$$

ચક્રિય પ્રક્રિયામાં સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલું કાર્ય શૂન્ય છે. આપણે સ્પષ્ટ રીતે દર્શાવ્યું છે કે, (i) હૂકે સૌપ્રથમ દર્શાવ્યા મુજબ ($F_s = -kx$), સ્પ્રિંગ બળ ફક્ત સ્થાન પર આધારિત છે. (ii) સ્પ્રિંગ બળ વડે થયેલ કાર્ય ફક્ત પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થાન પર આધાર રાખે છે. દા.ત., સમીકરણ (6.17). આમ, સ્પ્રિંગ બળ **સંરક્ષી બળ** છે.

જ્યારે બ્લૉક અને સ્પ્રિંગનું તંત્ર સંતુલનની સ્થિતિમાં હોય ત્યારે આપણે સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા $V(x)$ શૂન્ય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ. x જેટલા ખેંચાણ (કે સંકોચન) માટે ઉપરનું વિશ્લેષણ દર્શાવે છે કે,

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} \qquad (6.19)$$

તમે સરળતાથી ચકાસી શકો કે સ્પ્રિંગ બળ $-dV/dx = -kx$. જો આકૃતિ 6.7માં દર્શાવેલ m દળના બ્લૉકને સંતુલિત સ્થિતિમાંથી x_m સુધી ખેંચીને છોડવામાં આવે, તો કોઈ પણ બિંદુ x, જ્યાં xનું મૂલ્ય $-x_m$ અને $+x_m$ની વચ્ચે હોય, પાસે તેની કુલ યાંત્રિકઊર્જા

$$\frac{1}{2}k\,x_m^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

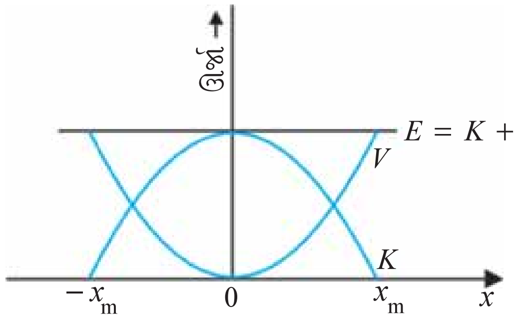
જ્યાં આપણે યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે તેમ માન્યું છે. આ દર્શાવે છે કે સંતુલન સ્થિતિ $x = 0$ પર ઝડપ અને ગતિઊર્જા મહત્તમ હશે. એટલે કે,

$$\frac{1}{2}m\upsilon_m^2 = \frac{1}{2}k\,x_m^2$$

જ્યાં, υ_m એ મહત્તમ ઝડપ છે.

અથવા $\upsilon_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x_m$

અહીંયાં નોંધો કે k/mના પરિમાણ $[T^{-2}]$ છે અને આપણું સમીકરણ પરિમાણની રીતે સાચું છે. ગતિઊર્જાનું સ્થિતિઊર્જામાં રૂપાંતર થાય છે અને તેથી ઊલટું પણ, પરંતુ કુલ યાંત્રિકઊર્જા અચળ રહે છે, જે આકૃતિ 6.8માં આલેખ દ્વારા દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.8 હૂકના નિયમનું પાલન કરતી સ્પ્રિંગ સાથે જોડેલા બ્લૉક માટે સ્થિતિઊર્જા V અને ગતિઊર્જા Kના પરવલય આલેખો. બંને આલેખો એકબીજાના પૂરક છે, એક વધે ત્યારે બીજું ઘટે છે. કુલ યાંત્રિકઊર્જા $E = K + V$ અચળ રહે છે.

ઉદાહરણ 6.8 કારના ઍક્સિડન્ટ (અથડામણ)ને તાદૃશ્ય (Simulation) કરવા માટે, કારના ઉત્પાદકો જુદા જુદા સ્પ્રિંગ અચળાંકવાળી સ્પ્રિંગ સાથે કારોની અથડામણનો અભ્યાસ કરે છે. એક એવું તાદૃશ્ય વિચારો કે જેમાં 18.0 km/hની ઝડપથી લીસા રસ્તા પર ગતિ કરતી 1000 kg દળની કાર, સમક્ષિતિજ રીતે લગાડેલ $6.25 \times 10^3\ N\ m^{-1}$ સ્પ્રિંગ અચળાંકવાળી સ્પ્રિંગ સાથે અથડાય છે. સ્પ્રિંગનું મહત્તમ સંકોચન કેટલું હશે ?

ઉકેલ મહત્તમ સંકોચન માટે કારની સંપૂર્ણ ગતિઊર્જાનું સ્થિતિઊર્જામાં રૂપાંતર થાય છે.

ગતિ કરતી કારની ગતિઊર્જા

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^3 \times 5 \times 5$$

$$K = 1.25 \times 10^4\ J$$

અહીંયાં આપણે 18 km h^{-1}ને 5 m s^{-1}માં રૂપાંતરિત કરેલ છે. **(એ યાદ રાખવું ઉપયોગી છે કે 36 km h^{-1} = 10 m s^{-1}).** યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ, મહત્તમ સંકોચન x_m માટે, સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા V એ ગતિ કરતી કારની ગતિઊર્જા જેટલી હોય છે.

$$V = \frac{1}{2}k\,x_m^2$$

$= 1.25 \times 10^4$ J

આથી,

$x_m = 2.00$ m મળે.

અહીંયાં નોંધીએ કે આપણે આદર્શ પરિસ્થિતિનું નિર્માણ કર્યું છે. સ્પ્રિંગને દળરહિત ધારી છે. સમતલને આપણે નજીવા ઘર્ષણવાળું ગણ્યું છે. ◀

આપણે સંરક્ષી બળો વિશે કેટલીક નોંધ કરીને આ વિભાગ પૂર્ણ કરીએ.

(i) અગાઉ (ઉપર)ની ચર્ચાઓમાં સમય વિશે કોઈ માહિતી ઉપલબ્ધ નથી. ઉપરના ઉદાહરણમાં, આપણે સંકોચનની ગણતરી કરી શકીએ છીએ, પરંતુ કેટલા સમય દરમિયાન સંકોચન થાય છે તે નહિ. ન્યૂટનના બીજા નિયમનું સમાધાન કરવા આ તંત્રની સમય આધારિત માહિતી જરૂરી છે.

(ii) બધાં બળો સંરક્ષી નથી. ઉદાહરણ તરીકે ઘર્ષણ, એ અસંરક્ષી બળ છે. આ કિસ્સા માટે ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમમાં જરૂરી ફેરફાર કરવો પડે. આ બાબત ઉદાહરણ 6.9માં દૃષ્ટાંત સાથે સમજાવી છે.

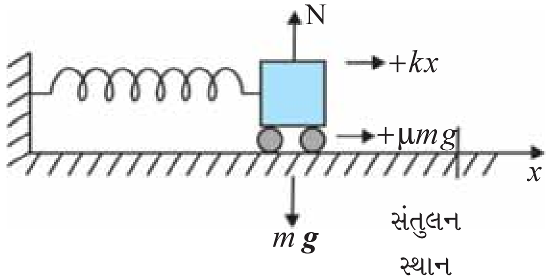
(iii) સ્થિતિઊર્જાનું શૂન્ય મૂલ્ય યાદચ્છિક છે. તે અનુકૂળતા મુજબ નક્કી કરી શકાય છે. સ્પ્રિંગ બળ માટે $x = 0$ પાસે આપણે $V(x) = 0$ લીધું, એટલે કે તણાવરહિત સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય હતી. પૃથ્વીની સપાટી (જમીન) પર અચળ ગુરુત્વાકર્ષણ બળ mg માટે આપણે $V = 0$ લીધું હતું. હવે પછીના પ્રકરણમાં આપણે જોઈશું કે ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમથી મળતા બળ માટે, ગુરુત્વાકર્ષણના ઉદ્ગમથી અનંત અંતરે સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લેવી શ્રેષ્ઠ છે. તેમ છતાં, કોઈ ચર્ચા (ઉદાહરણ)માં સ્થિતિઊર્જાનું શૂન્ય મૂલ્ય નક્કી કરવામાં આવે તે પછી સંપૂર્ણ ચર્ચા દરમિયાન તે મૂલ્યને વળગી રહેવું જોઈએ. ઘોડાદોડમાં તમે વચ્ચેથી ઘોડા ના બદલી શકો !

▶ **ઉદાહરણ 6.9** ઘર્ષણના અચળાંક μના 0.5 મૂલ્ય માટે ઉદાહરણ 6.8 ધ્યાનમાં લો અને સ્પ્રિંગનું મહત્તમ સંકોચન ગણો.

ઉકેલ ઘર્ષણની હાજરીમાં સ્પ્રિંગ બળ અને ઘર્ષણબળ બંને સ્પ્રિંગના સંકુચનની વિરુદ્ધ લાગે છે, જે આકૃતિ 6.9માં દર્શાવેલ છે.

આપણે યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણને બદલે કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેયની મદદ લઈશું.

ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર



આકૃતિ 6.9 *કાર પર લાગતાં બળો*

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

પરિણામી બળ વડે થતું કાર્ય

$$W = -\frac{1}{2}k\,x_m^2 - \mu m\,g\,x_m$$

બંને સમીકરણો સરખાવતાં,

$$\frac{1}{2}m\,\upsilon^2 = \frac{1}{2}k\,x_m^2 + \mu m\,g\,x_m$$

પરંતુ, $\mu mg = 0.5 \times 10^3 \times 10 = 5 \times 10^3$ N ($g = 10.0$ m s^{-2} લેતાં)

ઉપરનું સમીકરણ બીજી રીતે લખીએ તો આપણને અજ્ઞાત x_m માટે દ્વિઘાત સમીકરણ મળે.

$$k\,x_m^2 + 2\mu m\,g\,x_m - m\,\upsilon^2 = 0$$

$$x_m = \frac{-\mu m g + [\mu^2 m^2 g^2 + m k \upsilon^2]^{1/2}}{k}$$

અહીંયાં આપણે ધન વર્ગમૂળ લીધું છે કારણ કે x_m ધન છે. આપેલી કિંમતો આમાં મૂકતાં,

$x_m = 1.35$ m

જે આપણે ધાર્યું હતું તેમ, ઉદાહરણ 6.8ના મૂલ્ય કરતાં ઓછું છે.

જો પદાર્થ પર લાગતાં બળો, સંરક્ષી બળ F_c અને અસંરક્ષી બળ F_{nc} હોય, તો યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ દર્શાવતું સૂત્ર બદલવું પડે. કાર્યઊર્જા પ્રમેય મુજબ

$$(F_c + F_{nc})\,\Delta x = \Delta K$$

પણ, $F_c \Delta x = -\Delta V$

આથી, $\Delta(K + V) = F_{nc}\Delta x$

$$\Delta E = F_{nc}\Delta x$$

જ્યાં, E એ કુલ યાંત્રિકઊર્જા છે. પૂર્ણ માર્ગ માટે આ સમીકરણનું સ્વરૂપ

$$E_f - E_i = W_{nc}$$

જ્યાં, W_{nc} એ સંપૂર્ણ માર્ગ પર અસંરક્ષી બળ વડે થયેલું કુલ

કાર્ય છે. યાદ રહે કે સંરક્ષી બળથી અલગ, W_{nc} એ i થી f સુધીના ચોક્કસ માર્ગ પર આધાર રાખે છે.

6.10 ઊર્જાનાં જુદાં જુદાં સ્વરૂપો : ઊર્જા-સંરક્ષણનો નિયમ (VARIOUS FORMS OF ENERGY : THE LAW OF CONSERVATION OF ENERGY)

અગાઉના વિભાગમાં આપણે યાંત્રિકઊર્જા વિશે ચર્ચા કરી. આપણે જોયું કે તેને બે સ્પષ્ટ વિભાગોમાં દર્શાવી શકાય છે : એક ગતિ આધારિત, જેમ કે ગતિઊર્જા અને બીજી ગોઠવણી (સ્થાન) આધારિત, જેમ કે સ્થિતિઊર્જા. ઊર્જા ઘણા બધા સ્વરૂપે મળે છે જે એકમાંથી બીજા સ્વરૂપમાં કઈ કઈ રીતે રૂપાંતરિત થાય છે તેનો કદાચ આપણને (ખ્યાલ) અંદાજ પણ ન હોય.

6.10.1 ઉષ્મા (Heat)

આપણે જોયું કે ઘર્ષણ બળ એ સંરક્ષી બળ નથી. આમ છતાં, ઘર્ષણ બળ કાર્ય સાથે સંકળાયેલ છે, ઉદાહરણ 6.5. ખરબચડી સપાટીવાળા સમતલ પર υ_0 ઝડપથી સરકતો m દળનો બ્લૉક, x_0 અંતર કાપીને સ્થિર થાય છે. ગતિક ઘર્ષણ બળ fના કારણે x_0 અંતર સુધીમાં થતું કાર્ય $-f\,x_0$ છે. કાર્યઊર્જા પ્રમેય મુજબ $m\upsilon_0^2/2 = f\,x_0$. જો આપણે યંત્રશાસ્ત્રના સંદર્ભમાં વિચારીએ તો કહી શકીએ કે બ્લૉકની ગતિઊર્જા ઘર્ષણબળના કારણે વેડફાઈ જાય છે. બ્લૉક અને ટેબલનું અવલોકન કરીએ તો તેમના તાપમાનમાં થતો અલ્પ (નજીવો) વધારો જોવા મળે છે. ઘર્ષણ વડે થયેલું કાર્ય નકામું જતું નથી, પણ તે ઉષ્મા ઊર્જામાં ફેરવાય છે. તે બ્લૉક અને ટેબલની આંતરિક ઊર્જામાં વધારો કરે છે. શિયાળામાં, ગરમાવાનો અહેસાસ કરવા (ગરમાવો મેળવવા), આપણે આપણી બંને હથેળીઓ જોરથી ઘસીને ગરમી ઉત્પન્ન કરીએ છીએ. હવે પછી આપણે જોઈશું કે આંતરિક ઊર્જા અણુઓની અવિરત અને અનિયમિત ગતિ સાથે સંકળાયેલી છે. ઉષ્માઊર્જાના રૂપાંતરણનો ખ્યાલ એ પરથી આવે કે 1 kg પાણી 10°C જેટલું ઠંડું થાય ત્યારે તે 42000 J ઊર્જા મુક્ત કરે છે.

6.10.2 રાસાયણિક ઊર્જા (Chemical Energy)

માનવજાતિની મોટામાં મોટી ટેક્નિકલ ઉપલબ્ધિ એ હતી કે આપણે અગ્નિને કેવી રીતે પ્રજ્વલિત કરી શકાય તેની શોધ કરી. આપણે ચકમકના બે પથ્થરોને એકબીજા સાથે ઘસીને (યાંત્રિકઊર્જા), તેમાં ગરમી પેદા કરીને સૂકાં પાંદડાંના ઢગલાંને સળગાવતા (રાસાયણિક ઊર્જા) શીખ્યાં, જેથી સતત હૂંફ (ગરમી) મળી શકે. દીવાસળી જ્યારે વિશેષ રીતે તૈયાર કરેલ રાસાયણિક સપાટી પર ઘસવામાં આવે ત્યારે એક ચમકતી જ્વાળાના રૂપમાં સળગે છે. જ્યારે સળગાવેલી દીવાસળી, ફટાકડાને લગાડવામાં આવે, ત્યારે અવાજ અને પ્રકાશનું ભવ્ય પ્રદર્શન થાય છે.

રાસાયણિક પ્રક્રિયામાં ભાગ લેતા અણુઓની જુદી જુદી બંધન ઊર્જાઓના કારણે રાસાયણિક ઊર્જા ઉત્પન્ન થાય છે. એક સ્થિર સંયોજનની ઊર્જા તેનાં મુક્ત ઘટકો કરતાં ઓછી હોય છે. રાસાયણિક પ્રક્રિયા મુખ્યત્વે પરમાણુઓની પુનઃ ગોઠવણી છે. જો પ્રક્રિયકોની કુલ ઊર્જા-પ્રક્રિયાની ઉપજોની ઊર્જા કરતાં વધારે હોય, તો ઉષ્મા મુક્ત થાય છે અને આ પ્રક્રિયા **ઉષ્માક્ષેપક પ્રક્રિયા** કહેવાય છે. જો આનાથી વિપરીત થતું હોય, ઉષ્માનું શોષણ થતું હોય, તો પ્રક્રિયા **ઉષ્માશોષક** કહેવાય. કોલસો કાર્બનનો બનેલો હોય છે અને તેના 1 kg જેટલા દહનના પરિણામે 3×10^7 J ઊર્જા મુક્ત થાય છે.

રાસાયણિક ઊર્જા એવાં બળો સાથે સંકળાયેલી છે કે જે પદાર્થોને સ્થિરતા પૂરી પાડે. આ બળો પરમાણુઓને અણુઓમાં, અણુઓને મિશ્રઅણુ (બહુલક-Polymeric Chain) શ્રૃંખલા (શ્રેણી) વગેરેમાં બાંધે છે. કોલસા, રાંધણગૅસ, લાકડું અને પેટ્રોલિયમના દહનથી ઉત્પન્ન થતી રાસાયણિક ઊર્જા આપણા રોજિંદા જીવન (અસ્તિત્વ) માટે અનિવાર્ય છે.

6.10.3 વિદ્યુતઊર્જા (Electrical Energy)

વિદ્યુતપ્રવાહના વહનથી બલ્બ પ્રકાશે છે, પંખો ફરે છે અને ઘંટડી રણકે છે. વિદ્યુતભારો અને પ્રવાહોના આકર્ષણ અને અપાકર્ષણનું સંચાલન કરતા નિયમો આપણે આગળ જતાં ભણીશું. વિદ્યુતપ્રવાહ સાથે ઊર્જા સંકળાયેલી છે. ભારતીય શહેરનો (કોઈ) એક પરિવાર સરેરાશ રીતે એક સેકન્ડમાં આશરે 200 J જેટલી ઊર્જા વાપરે છે.

6.10.4 દળ અને ઊર્જાની સમતુલ્યતા (The Equivalence of Mass and Energy)

ઓગણીસમી સદીના અંત સુધી, ભૌતિક વિજ્ઞાનીઓ એવું માનતા હતા કે, દરેક ભૌતિક અને રાસાયણિક પ્રક્રિયામાં, અલગ કરેલા તંત્રનું દ્રવ્યમાન સંરક્ષિત રહે છે. દ્રવ્ય પોતાની અવસ્થા બદલી શકે. દા.ત., હિમનદીનો બરફ ઓગળીને પાણીનો ધસમસતો પ્રવાહ બની શકે છે, પરંતુ દ્રવ્ય નથી તો ઉત્પન્ન કરી શકાતું નથી કે નષ્ટ કરી શકાતું. પરંતુ, આઈન્સ્ટાઈને (1879-1955) દર્શાવ્યું કે દ્રવ્યમાન અને ઊર્જા સમતુલ્ય છે અને તેમને જોડતું સમીકરણ

$$E = m\,c^2 \tag{6.20}$$

છે, જ્યાં, c શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશની ઝડપ કે જે લગભગ 3×10^8 m s^{-1} છે. આમ, ફક્ત એક કિલોગ્રામ પદાર્થ સાથે સંકળાયેલી ઊર્જા આશ્ચર્યજનક રીતે,

$$E = 1 \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} = 9 \times 10^{16} \text{ J}$$

જેટલી હોય છે. જે એક વર્ષમાં (3000 MW) પાવર ઉત્પન્ન કરતા બહુ મોટા પાવર-સ્ટેશનના આઉટપુટ જેટલી છે.

6.10.5 ન્યુક્લિઅર ઊર્જા (Nuclear Energy)

માનવનિર્મિત મહાવિનાશક શસ્ત્રો (આયુધો) જેવા કે વિખંડન (ફિશન) અને સંલયન (ફ્યુઝન) બૉમ્બ એક પ્રકારે દળ અને ઊર્જાની સમતુલ્યતાનાં જ ઉદાહરણો છે. બીજી બાજુ જોઈએ તો જીવન

કોષ્ટક 6.3 જુદી જુદી ઘટનાઓ સાથે સંકળાયેલી ઊર્જાનાં લગભગ મૂલ્યો

વર્ગીકરણ	ઊર્જા (J)
બિગ બેન્ગ	10^{68}
આકાશગંગાએ તેના જીવનકાળ દરમિયાન ઉત્સર્જેલી રેડિયોઊર્જા	10^{55}
આકાશગંગાની પરિભ્રમણ ઊર્જા	10^{52}
સુપરનોવા (અતિવિરાટ તારા)ના ધડાકા દરમિયાન મુક્ત થતી ઊર્જા	10^{44}
સમુદ્રના હાઇડ્રોજનનું ફ્યુઝન	10^{34}
પૃથ્વીની પરિભ્રમણ ઊર્જા	10^{29}
સૂર્ય પરથી પૃથ્વી પર આપાત થતી વાર્ષિક ઊર્જા	5×10^{24}
પૃથ્વીની સપાટી પાસે વેડફાતી વાર્ષિક પવનઊર્જા	10^{22}
સમગ્ર વિશ્વમાં માનવ દ્વારા ઉપયોગમાં લેવાતી વાર્ષિક ઊર્જા	3×10^{20}
સમુદ્રના મોજાઓમાં રહેલી (વેડફાતી) વાર્ષિક ઊર્જા	10^{20}
15 મેગાટનના ફ્યુઝન બૉમ્બમાંથી મુક્ત થતી ઊર્જા	10^{17}
વિદ્યુતઊર્જા ઉત્પન્ન કરતા મોટા પ્લાન્ટ વડે મળતી વાર્ષિક ઊર્જા	10^{16}
વાવાઝોડું	10^{15}
1000 kg કોલસાના દહન દરમિયાન મુક્ત થતી ઊર્જા	3×10^{10}
એક મોટા જેટ વિમાનની ગતિઊર્જા	10^{9}
1 લિટર પેટ્રોલના દહન દરમિયાન મુક્ત થતી ઊર્જા	3×10^{7}
પુખ્ત વયના માણસનો દરરોજનો ખોરાક	10^{7}
માનવહૃદયે એક ધબકારા દરમિયાન કરેલ કાર્ય	0.5
આ કાગળને ફેરવવા માટે	10^{-3}
(Fleahop) ચાંચડ (જંતુ)નો કૂદકો	10^{-7}
એક ન્યુટ્રૉનમાંથી નીકળતી ઊર્જા	10^{-10}
ન્યુક્લિયસમાં રહેલા પ્રોટોનની લાક્ષણિક ઊર્જા	10^{-13}
પરમાણુમાં રહેલા ઇલેક્ટ્રૉનની લાક્ષણિક ઊર્જા	10^{-18}
DNAના એક બંધને તોડવા માટે જરૂરી ઊર્જા	10^{-20}

બક્ષતી, સૂર્યમાંથી ઉદ્ભવતી ઊર્જા પણ ઉપરના સમીકરણ પર આધારિત છે. અહીંયાં અસલમાં હાઇડ્રોજનના ચાર ન્યુક્લિયસ ફ્યુઝ (એકબીજામાં ભળીને) થઈને હિલિયમનું એક ન્યુક્લિયસ બનાવે છે. જેનું દળ આ ચારેય પ્રક્રિયકોના કુલ દળ કરતાં ઓછું હોય છે. દળનો આ તફાવત કે જેને દળક્ષતિ (માસ ડિફેક્ટ) Δm કહે છે તે $(\Delta m)c^2$ જેટલી ઊર્જાનો સ્રોત છે. ફિશનમાં યુરેનિયમ $^{235}_{92}U$ જેવા ભારે ન્યુક્લિયસ, બે હલકા ન્યુક્લિયસમાં વહેંચાય છે. અહીં પણ અંતિમ દ્રવ્યમાન પ્રારંભિક દ્રવ્યમાન કરતાં ઓછું હોય છે અને આ દ્રવ્યમાન તફાવત ઊર્જામાં રૂપાંતરિત થાય છે, જેનો ઉપયોગ તેને કોઈ રીતે બહાર લઈ વિદ્યુતઊર્જા મેળવવા માટે કરી શકાય, જેમ કે ન્યુક્લિયર પાવર પ્લાન્ટ (Controlled Nuclear Fisson)માં અથવા ન્યુક્લિયર શસ્ત્રો બનાવવા માટે કરી શકાય (Uncontrolled Nuclear Fisson). રાસાયણિક પ્રક્રિયામાં મુક્ત થતી ઊર્જા ΔEને પણ ચોક્કસ દ્રવ્યમાન તફાવત $\Delta m = \Delta E/c^2$ સાથે સાંકળી શકાય. પરંતુ રાસાયણિક પ્રક્રિયા માટે આ દ્રવ્યમાન તફાવત ન્યુક્લિયર પ્રક્રિયા માટે મળતા મૂલ્ય કરતાં ઘણો નાનો (ઓછો) છે. કોષ્ટક 6.3માં જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓ અને ઘટનાઓ માટે કુલ ઊર્જાનાં મૂલ્યો દર્શાવ્યાં છે.

▶ ***ઉદાહરણ 6.10*** કોષ્ટક 6.3 જુઓ અને (a) DNAમાં રહેલા એક બંધને તોડવા માટે જરૂરી ઊર્જાને eVમાં, (b) હવાના એક અણુની ગતિઊર્જા (10^{-21} J)ને eVમાં, (c) પુખ્ત વયના માણસના દરરોજના ખોરાકને Kilocalories માં દર્શાવો.

ઉકેલ (a) DNAના એક બંધને તોડવા માટે જરૂરી ઊર્જા

$$\frac{10^{-20}\,\text{J}}{1.6\times10^{-19}\,\text{J/eV}} \simeq 0.06 \text{ eV}$$

જ્યાં '$\simeq$' ચિહ્ન લગભગ મૂલ્ય દર્શાવે છે.

નોંધો કે, 0.1 eV = 100 meV (100 millielectron Volt)

(b) હવાના અણુની ગતિઊર્જા

$$\frac{10^{-21}\,\text{J}}{1.6\times10^{-19}\,\text{J/eV}} \simeq 0.0062 \text{ eV}$$

જે 6.2 meV જેટલી છે.

(c) માણસનો દરરોજનો ખોરાક

$$\frac{10^{7}\,\text{J}}{4.2\times10^{3}\,\text{J/kcal}} \simeq 2400 \text{ kcal}$$

અહીં આપણે છાપાઓ અને મૅગેઝિન્સમાં આવતી ગેરસમજ (ભરેલી વાત) તરફ ધ્યાન દોરીએ. તેમાં ખોરાકનાં મૂલ્યો કૅલરીમાં દર્શાવવામાં આવે છે અને આપણને દરરોજ 2400 કૅલરી કરતા ઓછો ખોરાક લેવા માટે પ્રેરણા આપવામાં આવે છે. ખરેખર તેમણે કૅલરીના બદલે કિલોકૅલરી (kcal) લખવું જોઈએ. 2400 કૅલરી ખોરાક લેતી વ્યક્તિ ભૂખના દુઃખથી જ મરી જાય ! ખોરાકની 1 કૅલરી એ 1 kcal છે. ◀

6.10.6 ઊર્જા-સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત (The Principle of Conservation of Energy)

આપણે જોયું કે જો તંત્ર પર કાર્ય કરતાં બળો સંરક્ષી હોય, તો તેની કુલ યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે. જો કેટલાંક અસંરક્ષી બળો પણ લાગતાં હોય, તો યાંત્રિકઊર્જાનો અમુક ભાગ (હિસ્સો) બીજા પ્રકારમાં રૂપાંતર પામે છે. જેમકે, ઉષ્મા, પ્રકાશ અને અવાજ. આમ છતાં, બધા પ્રકારની ઊર્જાઓને ધ્યાનમાં લઈએ તો અલગ કરેલા તંત્રની કુલ ઊર્જા બદલાતી નથી. ઊર્જાનું એક પ્રકારમાંથી બીજા પ્રકારમાં રૂપાંતરણ થાય છે. પણ અલગ કરેલા તંત્રની કુલ ઊર્જા અચળ રહે છે. ક્યારેય ઊર્જા ઉત્પન્ન કરી શકાતી નથી કે નથી તેનો નાશ કરી શકાતો.

સમગ્ર વિશ્વને અલગ કરેલું તંત્ર ગણી શકાય અને તેથી સમગ્ર વિશ્વની કુલ ઊર્જા અચળ છે. જો વિશ્વના કોઈ ભાગમાં ઊર્જાનો વ્યય થાય તો બીજા ભાગને તેટલી જ ઊર્જા મળવી જોઈએ.

ઊર્જા-સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત સાબિત કરી શકાતો નથી. આમ છતાં, આ સિદ્ધાંતનું ખંડન થતું હોય તેવું પણ જાણવામાં આવ્યું નથી. ઊર્જા-સંરક્ષણ અને જુદા જુદા પ્રકારમાં તેના રૂપાંતરણનો સિદ્ધાંત ભૌતિકવિજ્ઞાન, રસાયણ વિજ્ઞાન અને જીવવિજ્ઞાનના જુદા જુદા વિભાગોને એકબીજા સાથે સાંકળે છે. તે આપણી વૈજ્ઞાનિક ધારણાઓને સંગઠિત રીતે ટકાવી રાખવા માટે મહત્ત્વ ધરાવે છે. ઇજનેરીની દૃષ્ટિએ વિદ્યુતીય સંચાર અને યાંત્રિક સાધનો કેટલાક પ્રકારની ઊર્જાના રૂપાંતરણ પર આધાર રાખે છે.

6.11 શક્તિ (પાવર, POWER)

પદાર્થ પર કાર્ય થયું એ કરતાં કેટલા દરથી આ કાર્ય થયું તે જાણવું ક્યારેક રસપ્રદ બની રહે છે. માણસ ફક્ત ચાર માળ ચડી શકે તે નહિ પરંતુ ઝડપથી ચડી જાય છે તે ચુસ્ત શરીરવાળો છે તેમ આપણે કહીએ છીએ. કાર્ય કરવાના કે ઊર્જાના રૂપાંતરણના સમય-દરને **પાવર (કાર્યત્વરા)** તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

કાર્ય W અને તે માટે લીધેલ કુલ સમય t ના ગુણોત્તરને તે બળનો સરેરાશ પાવર કહે છે.

$$P_{av} = \frac{W}{t}$$

સમય અંતરાલ શૂન્યની નજીક પહોંચે તે લક્ષમાં સરેરાશ પાવરનું મૂલ્ય તાત્ક્ષણિક પાવર (Instantaneons Power) તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{6.21}$$

બળ **F** વડે સ્થાનાંતર $d\mathbf{r}$ માટે થયેલ કાર્ય dWનું મૂલ્ય $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. બીજી રીતે તાત્ક્ષણિક પાવર દર્શાવીએ તો,

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{6.22}$$

જ્યાં, $\mathbf{v}$ એ બળ **F** દરમિયાનનો તાત્ક્ષણિક વેગ છે.

કાર્ય અને ઊર્જાની જેમ પાવર પણ અદિશ રાશિ છે. તેના પરિમાણ $[ML^2T^{-3}]$ છે. SI પદ્ધતિમાં તેનો એકમ watt (W) છે. 1 watt એટલે 1 J s^{-1}. પાવરનો એકમ જેમ્સ વૉટ (James Watt)ના નામ પરથી પાડવામાં આવ્યો છે. જે અઢારમી સદીમાં વરાળયંત્રના શોધકોમાંનો એક છે. પાવરનો એક બીજો એકમ છે, હૉર્સ પાવર (hp)

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

આ એકમનો ઉપયોગ હજી પણ વાહનો, મોટરબાઇક વગેરેની ક્ષમતા દર્શાવવા માટે થાય છે.

જ્યારે આપણે વિદ્યુત ઉપકરણો, જેમકે બલ્બ, હીટર અને રેફ્રિજરેટર ખરીદીએ ત્યારે આપણે watt શબ્દ સાંભળીએ છીએ. 100 wattનો એક બલ્બ 10 કલાક માટે ચાલુ રહે, તો તે 1 કિલોવૉટ અવર (kWh) જેટલી ઊર્જા વાપરે છે.

$$100 \text{ (watt)} \times 10 \text{ (hour)}$$
$$= 1000 \text{ watt hour}$$
$$= 1 \text{ kilowatt hour (kWh)}$$
$$= 10^3 \text{ (W)} \times 3600 \text{ (s)}$$
$$= 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

આપણાં વીજળી-બિલો ઊર્જાના વપરાશને kWhના એકમમાં દર્શાવે છે. નોંધો કે kWh એ ઊર્જાનો એકમ છે નહિ કે પાવરનો.

▶ *ઉદાહરણ 6.11* મહત્તમ 1800 kg (લિફ્ટ + મુસાફરો) સહન કરી શકે એવી એક લિફ્ટ 2 m s^{-1}ની અચળ ઝડપથી ઉપર તરફ જઈ રહી છે. વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતું ગતિનું ઘર્ષણબળ 4000 N છે. મોટર વડે લિફ્ટને પૂરો પાડેલો (આપેલ) લઘુતમ પાવર watt અને horse powerમાં ગણો.

ઉકેલ લિફ્ટ પર નીચે તરફ (અધોદિશામાં) લાગતું બળ,

$F = m\,g + F_f = (1800 \times 10) + 4000 = 22000$ N

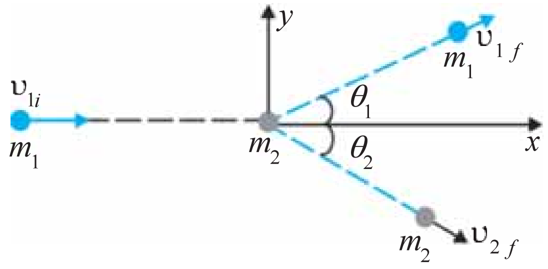
આ બળને સમતુલ્ય પૂરતું બળ તો મોટરે આપવું જ પડે. આથી,

$P = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\upsilon} = 22000 \times 2 = 44000$ W $= 59$ hp ◀

6.12 સંઘાત (અથડામણો) (COLLISIONS)

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે ગતિનો (સ્થાનમાં ફેરફાર) અભ્યાસ કરીએ છીએ. તે જ સમયે, આપણે એવી ભૌતિકરાશિઓ શોધવા પ્રયત્ન કરીએ છીએ કે જે ભૌતિક-પ્રક્રિયા સાથે બદલાય નહિ. વેગમાન અને ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમો મહત્ત્વનાં ઉદાહરણો છે. આ પરિચ્છેદમાં આપણે આ નિયમોને સામાન્યતઃ જોવા મળતી પ્રક્રિયા એટલે કે અથડામણો (સંઘાત)ને લાગુ પાડીશું. કેટલીક રમતો જેમ કે, બિલિયર્ડ (Billiards), લખોટીઓ અથવા કેરમ અથડામણો સાથે સંકળાયેલ હોય છે. આપણે આદર્શ પરિસ્થિતિમાં બે દળોની અથડામણ સમજીશું.

બે દળો m_1 અને m_2 ધારો. m_1 દળનો કણ υ_{1i} ઝડપથી ગતિ કરે છે. Subscript 'i'નો અર્થ પ્રારંભિક (Initial) છે. આપણે m_2 સ્થિર છે તેમ ધારીશું. આવું ધારવામાં આપણે કોઈ સામાન્ય પરિસ્થિતિનો ભંગ કરતા નથી. આ પરિસ્થિતિમાં દળ m_1, સ્થિર દળ m_2 સાથે અથડાય છે અને તે આકૃતિ 6.10માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 6.10 સ્થિર દળ m_2 સાથે દળ m_1ની અથડામણ

સંઘાત પછી દળો m_1 અને m_2 જુદી જુદી દિશાઓમાં જાય છે. આ દળો, વેગ અને ખૂણાઓને સાંકળતાં કેટલાંક સમીકરણો આપણે જોઈશું.

6.12.1 સ્થિતિસ્થાપક અને અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણો (Elastic and Inelastic Collisions)

અથડામણોમાં કુલ રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે; તંત્રનું પ્રારંભિક વેગમાન તે તંત્રના અંતિમ વેગમાન જેટલું હોય છે. કોઈ તે માટે આ રીતે દલીલ કરી શકે. જ્યારે બે પદાર્થો અથડાય ત્યારે અથડામણના Δt સમય દરમિયાન પરસ્પર લાગતાં (impulsive) બળો તેમના અનુરૂપ વેગમાનમાં ફેરફાર કરે છે :

$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_{12}\ \Delta t$

$\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_{21}\ \Delta t$

જ્યાં, $\mathbf{F}_{12}$ એ પ્રથમ કણ પર બીજા કણે લગાડેલ બળ છે. તે જ રીતે, $\mathbf{F}_{21}$ એ બીજા કણ પર પહેલા કણે લગાડેલ બળ છે. હવે, ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ આનો અર્થ એ કે

$$\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0$$

અથડામણ વખતે Δt સમય દરમિયાન બળો જટિલ રીતે બદલાતા હોય તોપણ ઉપરનું તારણ સત્ય છે. ત્રીજો નિયમ દરેક ક્ષણે સાચો રહેતો હોવાથી, પ્રથમ પદાર્થ પર લાગતો આઘાત બીજા પદાર્થ પર લાગતા આઘાત જેટલો જ અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે.

બીજી તરફ, તંત્રની કુલ યાંત્રિકઊર્જા હંમેશાં માટે સંરક્ષી હોય તે જરૂરી નથી. અથડામણ દરમિયાન લાગતા આઘાત અને આકારના વિકાર દરમિયાન ઉષ્મા અને અવાજ (ધ્વની) પણ ઉત્પન્ન થઈ શકે છે. પ્રારંભિક ગતિઊર્જાનો કેટલોક ભાગ ઊર્જાનાં બીજાં સ્વરૂપોમાં રૂપાંતરિત થાય છે. અથડામણ દરમિયાન આકારના વિકારને સંકોચાયેલી સ્પ્રિંગ દ્વારા તાદૃશ્ય કરી શકાય. જો બે દળોને જોડતી 'સ્પ્રિંગ' ઊર્જાનો વ્યય કર્યા વગર તેનો આકાર પાછો મેળવી લે, તો પ્રારંભિક ગતિઊર્જા એ અંતિમ ગતિઊર્જા જેટલી હોય, પરંતુ અથડામણના સમય Δt દરમિયાન ગતિઊર્જા અચળ ન હોય. આવી અથડામણને **સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ** કહે છે. બીજી તરફ આકારના વિકારમાંથી પાછું ના ફરી શકાય અને બંને પદાર્થો અથડામણ પછી સાથે જ ગતિ કરી શકે છે. જે અથડામણમાં અથડામણ બાદ બંને કણો સાથે ગતિ કરવા લાગે તો તેને **સંપૂર્ણ અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણ** કહે છે. સામાન્ય કિસ્સામાં જ્યારે આકારનો વિકાર કેટલેક અંશે પાછો મેળવી શકાય અને થોડીક ગતિઊર્જાનો વ્યય થતો હોય છે, તેને **અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણ** કહે છે.

6.12.2 એક પરિમાણમાં અથડામણો (Collisions in One Dimension)

પહેલા એક પરિમાણમાં અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણ વિચારો તો, આકૃતિ 6.10માં,

$\theta_1 = \theta_2 = 0$

$m_1\upsilon_{1i} = (m_1 + m_2)\upsilon_f$ (વેગમાન સંરક્ષણ)

$$\upsilon_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\upsilon_{1i} \qquad (6.23)$$

અથડામણ દરમિયાન ગતિઊર્જાનો વ્યય

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1i}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_f^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1i}^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\upsilon_{1i}^2$$

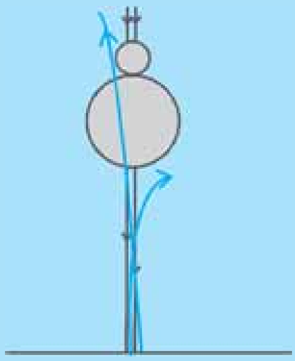
(સમીકરણ 6.23નો ઉપયોગ કરતા)

$$= \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1i}^2\left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]$$

સન્મુખ (Head On) સંઘાત દર્શાવતા પ્રયોગ

સમક્ષિતિજ સપાટી પર સંઘાત દર્શાવતો પ્રયોગ કરતાં આપણે ત્રણ તકલીફો અનુભવીએ છીએ. એક એ કે તેમાં ઘર્ષણ હોય છે અને પદાર્થો એક સમાન વેગથી ગતિ કરતા નથી. બીજું, જ્યારે જુદાં જુદાં પરિમાણનાં બે પદાર્થો કોષ્ટક પર અથડાવાના હોય ત્યારે જો તેમનાં ગુરુત્વકેન્દ્રો સપાટીથી એકસરખી ઊંચાઈએ ન હોય તો તેમને સન્મુખ (Head On) સંઘાત માટે ગોઠવવા ખૂબ અઘરા પડે છે. ત્રીજું, બંને પદાર્થોના સંઘાત પહેલા અને પછીના તરતના વેગ માપવા પણ અઘરા પડે છે.

આ પ્રયોગને ઊર્ધ્વદિશામાં કરવાથી આ ત્રણેય તકલીફોનો અંત આવે છે. બે બૉલ લો. એક ભારે (બાસ્કેટ બૉલ/ફૂટબૉલ/વોલીબૉલ) અને બીજો હલકો (ટેનિસ બૉલ/રબરનો બૉલ/ટેનિસબૉલ). પહેલા માત્ર ભારે બૉલ લો અને તેને કોઈ ઊંચાઈ (લગભગ 1 m)થી લંબરૂપે પડતો મૂકો. તે ક્યાં સુધી ઉપર પાછો આવે છે તે નોંધો. આ પરથી જમીન પાસે પાછા આવતા પહેલાં અને પછીના તરતના ($\upsilon^2 = 2gh$નો ઉપયોગ કરીને) વેગ મળે છે. આ પરથી તમે રેસ્ટિટ્યુશન અંક (પરત ફરવાનો અંક) શોધી શકો.



હવે મોટો બૉલ અને એક નાનો બૉલ લો અને તેમને અહીં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજા પર ભારે બૉલ નીચે રહે અને હલકો ઉપર રહે તેમ હાથથી પકડી રાખો. તેમને એક સાથે એવી રીતે પડતા મૂકો કે જેથી પડતી વખતે તે સાથે જ જાય અને જુઓ કે શું થાય છે ? તમે જોશો કે ભારે બૉલ તેને એકલો પડવા દીધો હતો ત્યારે ઊંચાઈ સુધી પાછો આવતો હતો તે કરતાં ઓછી ઊંચાઈ સુધી પાછો આવે છે, જ્યારે હલકો બૉલ લગભગ 3 m ઊંચાઈ સુધી ઊછળે છે. થોડા પ્રયત્નોથી તમે બૉલને વ્યવસ્થિત રીતે પકડતાં શીખી જશો કે જેથી હલકો બૉલ આજુબાજુમાં જવાને બદલે સીધો ઊર્ધ્વદિશામાં જ ઊછળે. આ સન્મુખ સંઘાત છે.

તમે બૉલની સારામાં સારી જોડ શોધી શકો કે જે તમને સર્વોત્તમ અસર આપે. તમે પ્રમાણભૂત તુલા દ્વારા તેમના દળ માપી શકો. બંને બૉલના પ્રારંભિક અને અંતિમ વેગ કેવી રીતે શોધવા તે વિચારવાનું તમારા પર છોડીએ છીએ.

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{1i}^2$$

જે, ધાર્યું હતું તેમ ધન સંખ્યા છે.

હવે સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ વિચારો $\theta_1 = \theta_2 = 0$ સાથે ઉપરના નામાભિધાનનો ઉપયોગ કરતાં, વેગમાન અને ગતિઊર્જાના સંરક્ષણનાં સમીકરણો.

$$m_1\upsilon_{1i} = m_1\upsilon_{1f} + m_2\upsilon_{2f} \qquad (6.24)$$

$$m_1\upsilon_{1i}^2 = m_1\upsilon_{1f}^2 + m_2\upsilon_{2f}^2 \qquad (6.25)$$

છે. સમીકરણ (6.24) અને (6.25) પરથી આ મુજબ મળે,

$$m_1\upsilon_{1i}(\upsilon_{2f} - \upsilon_{1i}) = m_1\upsilon_{1f}(\upsilon_{2f} - \upsilon_{1f})$$

અથવા $\upsilon_{2f}(\upsilon_{1i} - \upsilon_{1f}) = \upsilon_{1i}^2 - \upsilon_{1f}^2$

$$= (\upsilon_{1i} - \upsilon_{1f})(\upsilon_{1i} + \upsilon_{1f})$$

આથી, $\upsilon_{2f} = \upsilon_{1i} + \upsilon_{1f}$ (6.26)

જેને સમીકરણ (6.24)માં મૂકતાં, આપણને

$$\upsilon_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\upsilon_{1i} \qquad (6.27)$$

અને $\upsilon_{2f} = \frac{2m_1\upsilon_{1i}}{m_1 + m_2}$ મળે. (6.28)

આમ, 'અજ્ઞાત' (υ_{1f}, υ_{2f})નાં મૂલ્યો આપણને 'જ્ઞાત' (m_1, m_2, υ_{1i})ના રૂપમાં મળે. આપણા આ અર્થઘટનના મહત્ત્વના મુદ્દાઓ રસપ્રદ છે.

કિસ્સો I : જો બંને દળ સરખા હોય, તો

$$\upsilon_{1f} = 0$$

$$\upsilon_{2f} = \upsilon_{1i}$$

અથડામણ દરમિયાન, પહેલું દળ સ્થિર થાય છે અને બીજા દળને તેની પ્રારંભિક ઝડપથી ધક્કો મારે છે.

કિસ્સો II : જો એક દળ ઘણું વધુ હોય, દા.ત., $m_2 >> m_1$ તો

$$\upsilon_{1f} \simeq -\upsilon_{1i} \qquad \upsilon_{2f} \simeq 0$$

ભારેખમ દળને કશી અસર થતી નથી, જ્યારે હલકું દળ તેના વેગની દિશા ઉલટાવે છે.

▶ **ઉદાહરણ 6.12 ન્યુટ્રૉન્સનું ધીમા પડવું :** ન્યુક્લિયર રિએક્ટરમાં એક ઝડપી ન્યુટ્રૉન (આશરે 10^7 m s^{-1})ને 10^3 m s^{-1} જેટલો ધીમો પાડવો જરૂરી છે, કે જેથી તેની $^{235}_{92}U$ સમસ્થાનિક સાથે આંતરક્રિયાની સંભાવના ખૂબ વધે અને તેનું વિખંડન થાય. દર્શાવો કે ડ્યુટેરિયમ કે કાર્બન કે જેમનું દળ ન્યુટ્રૉનના દળ કરતાં ફક્ત થોડા ગણું જ વધારે હોય છે, તેમની સાથે સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દરમિયાન ન્યુટ્રૉન તેમની મોટા ભાગની ગતિઊર્જા ગુમાવી શકે છે. હલકા ન્યુક્લિયસ બનાવતા પદાર્થ; જેવા કે ભારે પાણી (D_2O) અથવા ગ્રેફાઇટને મૉડરેટર કહે છે.

ઉકેલ ન્યુટ્રૉનની પ્રારંભિક ગતિઊર્જા

$$K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1i}^2$$

જ્યારે તેની અંતિમ ગતિઊર્જા સમીકરણ (6.27) પરથી

$$K_{1f} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1f}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \upsilon_{1i}^2$$

ગતિઊર્જાનો ગુમાવાયેલ અંશ

$$f_1 = \frac{K_{1f}}{K_{1i}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

જ્યારે મૉડરેટિંગ ન્યુક્લિયસે ગતિઊર્જાનો મેળવેલ અંશ K_{2f}/K_{1i}નું મૂલ્ય

$$f_2 = 1 - f_1 \quad \text{(સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ)}$$

$$= \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

કોઈ પણ વ્યક્તિ આ પરિણામ સમીકરણ (6.28) પરથી મેળવીને ચકાસી શકે છે.

ડ્યુટેરિયમ માટે $m_2 = 2m_1$ અને આપણને $f_1 = 1/9$ જ્યારે $f_2 = 8/9$ મળે. ન્યુટ્રૉનની લગભગ 90 % ઊર્જા ડ્યુટેરિયમને મળે છે કાર્બન માટે f_1 = 71.6 % અને f_2 = 28.4 %. વ્યવહારમાં જોકે, આ સંખ્યા નાની હોય છે, કારણ કે સન્મુખ (Head on) અથડામણ ભાગ્યે જ થાય છે.◀

જો બંને પદાર્થોના પ્રારંભિક વેગ અને અંતિમ વેગ એક જ સીધી રેખા પર હોય, તો તેને એક-પારિમાણિક અથડામણ અથવા **સન્મુખ (Head on) અથડામણ** કહે છે. નાના ગોળાકાર પદાર્થોમાં, આ ત્યારે જ શક્ય બને કે જ્યારે પદાર્થ-1ની ગતિની દિશા સ્થિર રહેલા પદાર્થ-2ના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય. સામાન્ય રીતે અથડામણ દ્વિપારિમાણિક હોય છે, જ્યાં પ્રારંભિક વેગ અને અંતિમ વેગ એક સમતલમાં રહેલા હોય.

6.12.3 દ્વિ-પરિમાણમાં અથડામણો (Collisions in Two Dimensions)

આકૃતિ 6.10, એ ગતિ કરતા દળ m_1ની સ્થિર રહેલા દળ m_2 સાથેની અથડામણ પણ દર્શાવે છે. આ અથડામણમાં રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. પરંતુ વેગમાન સદિશ હોવાનો મતલબ એ કે ત્રણ દિશાઓ $\{x, y, z\}$ માટે ત્રણ સમીકરણો હોય. m_1 અને m_2ના અંતિમ વેગોની દિશાઓ વડે બનતું એક સમતલ વિચારો અને તેને x–y સમતલ તરીકે ધારો. રેખીય વેગમાનના z-ઘટકના સંરક્ષણનો મતલબ એ કે સંપૂર્ણ અથડામણ x–y સમતલમાં થાય છે. આથી x- અને y-ઘટક સમીકરણો

$$m_1 \upsilon_{1i} = m_1 \upsilon_{1f} \cos\theta_1 + m_2 \upsilon_{2f} \cos\theta_2 \qquad (6.29)$$

$$0 = m_1 \upsilon_{1f} \sin\theta_1 - m_2 \upsilon_{2f} \sin\theta_2 \qquad (6.30)$$

મોટા ભાગની પરિસ્થિતિઓમાં (m_1, m_2, υ_{1i}) જાણીતા હોય છે. આથી, હવે ચાર અજ્ઞાત રહે છે (υ_{1f}, υ_{2f}, θ_1 અને θ_2) તથા ફક્ત બે સમીકરણો. જો $\theta_1 = \theta_2 = 0$ હોય, તો આપણને ફરીથી એક પરિમાણનું સમીકરણ (6.24) મળે. તથા જો અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક હોય, તો

$$\frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{2f}^2 \qquad (6.31)$$

આમ, આપણને એક વધારાનું સમીકરણ મળે. હજી આપણને એક સમીકરણની ઘટ પડે છે. આ કોયડો ઉકેલી શકાય તે માટે ચાર અજ્ઞાતમાંથી, ઓછામાં ઓછો એક, ધારો કે θ_1, જાણીતો હોવો જોઈએ. દાખલા તરીકે, ડિટેક્ટરને કોણીય રીતે x થી y અક્ષની દિશામાં ઘુમાવીને (ફેરવીને) θ_1 શોધી શકાય. આપેલ (m_1, m_2, υ_{1i}, θ_1) માટે સમીકરણો (6.29)–(6.31) પરથી આપણે (υ_{1f}, υ_{2f}, θ_2)ની ગણતરી કરી શકીએ.

▶ **ઉદાહરણ 6.13** આકૃતિ 6.10માં સમાન દળ $m_1 = m_2$ના બે બિલિયર્ડ બૉલ વચ્ચેની અથડામણ દર્શાવી છે. પ્રથમ બૉલ મારક(Cue) કહેવાય છે જ્યારે બીજો બૉલ લક્ષ્ય (Target) કહેવાય છે. બિલિયર્ડનો ખેલાડી લક્ષ્ય બૉલને ખૂણાના કાણામાં 'નાખવા' (To Sink) માગે છે, જે $\theta_2 = 37^\circ$ ખૂણે રહેલ છે. ધારો કે અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે અને ઘર્ષણ તથા ચાકગતિ મહત્ત્વના નથી. તો θ_1 મેળવો.

ઉકેલ વેગમાનના સંરક્ષણ પરથી તથા બંને દળ સમાન હોવાથી

$$\boldsymbol{\upsilon}_{1i} = \boldsymbol{\upsilon}_{1f} + \boldsymbol{\upsilon}_{2f}$$

અથવા $$\upsilon_{1i}^2 = (\boldsymbol{\upsilon}_{1f} + \boldsymbol{\upsilon}_{2f}) \cdot (\boldsymbol{\upsilon}_{1f} + \boldsymbol{\upsilon}_{2f})$$

$$= \upsilon_{1f}^2 + \upsilon_{2f}^2 + 2\boldsymbol{\upsilon}_{1f} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_{2f}$$

$= \{\upsilon_{1f}^2 + \upsilon_{2f}^2 + 2\upsilon_{1f}\upsilon_{2f}\cos(\theta_1 + 37^o)\}$ (6.32)

અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે અને $m_1 = m_2$ હોવાથી, ગતિઊર્જાના સંરક્ષણ પરથી લખી શકાય કે,

$$\upsilon_{1i}^2 = \upsilon_{1f}^2 + \upsilon_{2f}^2 \quad (6.33)$$

(6.32) અને (6.33) સરખાવતાં,

$$\cos(\theta_1 + 37^o) = 0$$

અથવા $\theta_1 + 37^o = 90^o$

આથી $\theta_1 = 53^o$

જે નીચેનું પરિણામ સાબિત કરે છે : જ્યારે બે સરખા દળો, બેમાંથી એક સ્થિર હોય ત્યારે, એકબીજા સાથે ત્રાંસી (તિર્યક) સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ અનુભવે, તો અથડામણ પછી, તેઓ એકબીજાની સાપેક્ષે લંબ ખૂણે (દિશામાં) ગતિ કરે છે. ◀

જો આપણે લીસી સપાટીવાળા ગોળાકાર દળો વિચારીએ તો, આ વાત સહેલી થઈ જાય છે અને માની શકાય કે જ્યારે બે પદાર્થો એકબીજાને અડે ત્યારે જ અથડામણ થાય છે. લખોટીઓ, કેરમ કે બિલિયર્ડની રમતોમાં આમ જ થાય છે.

આપણી રોજિંદી દુનિયામાં, જ્યારે બે પદાર્થો એકબીજાને અડે ત્યારે જ અથડામણ થાય છે. પરંતુ ઘણા લાંબા અંતરેથી સૂર્ય તરફ આવતો ધૂમકેતુ કે ન્યુક્લિયસ તરફ આવીને બીજી કોઈ દિશામાં દૂર જતો α-કણ વિચારો. અહીંયા આપણે અમુક અંતરેથી લાગતાં બળો સાથે પણ કામ લેવું પડે છે. આવી ઘટનાને પ્રકિર્ણન (Scattering) કહે છે. બે કણો કેટલા વેગથી અને કઈ દિશામાં દૂર જશે તે, તેમના પ્રારંભિક વેગ ઉપરાંત તેમની વચ્ચે આંતરક્રિયાના પ્રકાર, તેમના દળ, આકાર અને કદ પર આધાર રાખે છે.

સારાંશ

1. કાર્યઊર્જા પ્રમેય દર્શાવે છે કે કોઈ પદાર્થની ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર તે પદાર્થ પર લાગતા પરિણામી બળ વડે થયેલ કાર્ય દર્શાવે છે.

$$K_f - K_i = W_{net}$$

2. બળ સંરક્ષી તો જ હોય જો (i) તેના દ્વારા કોઈ પદાર્થ પર થયેલ કાર્ય માર્ગ પર આધાર રાખતું ન હોય અને ફક્ત તેનાં અંતિમ બિંદુઓ (x_i, x_f) પર આધાર રાખતું હોય અથવા (ii) પદાર્થે લીધેલા કોઈ વૈકલ્પિક બંધ માર્ગ પર કે જેમાં પદાર્થ તેના પ્રારંભિક સ્થાન પર પાછો ફરતો હોય તે દરમિયાન બળ વડે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોય છે.

3. એક પરિમાણમાં કોઈ સંરક્ષી બળ માટે આપણે સ્થિતિઊર્જા વિધેય $V(x)$ને આ રીતે વ્યાખ્યાયીત કરી શકીએ :

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

અથવા
$$V_i - V_f = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

4. યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત દર્શાવે છે કે, જો પદાર્થ પર ફક્ત સંરક્ષી બળો લાગતાં હોય, તો પદાર્થની કુલ યાંત્રિકઊર્જા અચળ રહે છે.

5. પૃથ્વીની સપાટીથી x ઊંચાઈએ રહેલા m દળના કણની ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જા

$$V(x) = m\,g\,x$$

જેટલી હોય છે, જ્યાં ઊંચાઈ સાથે gમાં થતો ફેરફાર અવગણ્યો છે.

6. બળ-અચળાંક k અને x જેટલું ખેંચાણ (Extension) ધરાવતી સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા

$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ જેટલી હોય છે.

7. બે સદિશો **A** અને **B**નો અદિશ કે ડૉટ ગુણાકાર **A·B** વડે દર્શાવાય છે અને તે અદિશ રાશિ છે. જેનું મૂલ્ય : **A·B** = AB cos θ, જ્યાં θ એ **A** અને **B** વચ્ચેનો ખૂણો છે. તે ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે છે જે θના મૂલ્ય પર આધાર રાખે છે. બે સદિશોના અદિશ ગુણાકારને એક સદિશના મૂલ્ય (Magnitude) અને બીજા સદિશના પહેલા સદિશ પરના ઘટક (પ્રક્ષેપ)ના ગુણાકારથી સમજી શકાય. એકમ સદિશો માટે

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1 \text{ અને } \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

અદિશ ગુણાકારો ક્રમના અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

ભૌતિકરાશિ	સંજ્ઞા (સંકેત)	પરિમાણ	એકમો	નોંધ
કાર્ય (Work)	W	$[ML^2T^{-2}]$	J	$W = \mathbf{F.d}$
ગતિઊર્જા (Kinetic Energy)	K	$[ML^2T^{-2}]$	J	$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$
સ્થિતિઊર્જા (Potential Energy)	$V(x)$	$[ML^2T^{-2}]$	J	$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$
યાંત્રિકઊર્જા (Mechanical Energy)	E	$[ML^2T^{-2}]$	J	$E = K + V$
સ્પ્રિંગ અચળાંક (Spring Constant)	k	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	$F = -kx$ $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$
પાવર (Power)	P	$[ML^2T^{-3}]$	W	$P = \mathbf{F.\upsilon}$ $P = \frac{dW}{dt}$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ (POINTS TO PONDER)

1. શબ્દસમૂહ (Phrase) 'થયેલ કાર્ય શોધો' એ અધૂરો છે. આપણે ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ (એ બાબતની સ્પષ્ટતા કરવી જોઈએ) કે કયા ચોક્કસ બળ કે બળોના સમૂહ વડે કોઈ પદાર્થ પર કોઈ ચોક્કસ સ્થાનાંતર દરમિયાન કાર્ય થયું છે.
2. થયેલ કાર્ય એ અદિશ રાશિ છે. તે ધન કે ઋણ હોઈ શકે, નહિ કે દળ અથવા ગતિઊર્જાની જેમ જે ધન રાશિઓ છે. ઘર્ષણ કે શ્યાનતા બળ વડે ગતિ કરતા પદાર્થ પર થયેલ કાર્ય ઋણ હોય છે.
3. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ પરથી, બે પદાર્થો માટે, તેમની વચ્ચે લાગતાં પરસ્પર બળોનો સરવાળો શૂન્ય હોય છે.
$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$
પરંતુ આ બળો વડે થયેલ કાર્યનો સરવાળો હંમેશાં નાબૂદ થાય એ જરૂરી નથી. એટલે કે
$$W_{12} + W_{21} \neq 0$$
આમ છતાં, ક્યારેક તે સાચું પણ બની શકે.
4. ક્યારેક બળનો પ્રકાર જાણીતો ન હોય તોપણ આ બળ વડે થયેલ કાર્ય ગણી શકાય છે. ઉદાહરણ 6.1 પરથી આ બાબત સ્પષ્ટ થાય છે જ્યાં આ પરિસ્થિતિમાં કાર્યઊર્જા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરેલ છે.
5. કાર્યઊર્જા પ્રમેય ન્યૂટનના બીજા નિયમથી સ્વતંત્ર નથી. કાર્યઊર્જા પ્રમેયને બીજા નિયમના સદિશ સ્વરૂપ તરીકે જોઈ શકાય. યાંત્રિકઊર્જા સંરક્ષણના સિદ્ધાંતને સંરક્ષી બળો માટેના કાર્યઊર્જા પ્રમેયના સંદર્ભમાં જોઈ શકાય.
6. કાર્યઊર્જા પ્રમેય દરેક જડત્વીય નિર્દેશન (Frame) માટે લાગુ પડે છે. તેને અજડત્વીય નિર્દેશન (Frame) માટે પણ વિસ્તારી શકાય. જો આપણને આપેલ પદાર્થ પર લાગતા કુલ બળમાં આભાસી (Pseudo) બળોને પણ ગણતરીમાં લઈએ
7. સંરક્ષી બળની અસર હેઠળ રહેલા પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા હંમેશાં કોઈ અચળ કિંમત સુધી અચોક્કસ (અસ્પષ્ટ) હોય છે. દા. ત, કોઈ બિંદુ કે જ્યાં સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય હોય તે સ્વૈચ્છિક છે. સ્થિતિઊર્જાના મૂલ્ય mgh માટે જમીન (Ground) પરની સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય માનવામાં આવે છે. સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા $kx^2/2$ માટે આંદોલન કરતા દળની સંતુલન સ્થિતિએ સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય હોય છે.
8. યંત્રશાસ્ત્રમાં આવતા દરેક બળ સાથે સ્થિતિઊર્જા સંકળાયેલી હોતી નથી. દા.ત., બંધ માર્ગ પર ઘર્ષણ વડે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોતું નથી અને ઘર્ષણ સાથે કોઈ પણ સ્થિતિઊર્જા સાંકળી શકાય નહિ.
9. અથડામણ દરમિયાન : (a) દરેક અથડામણની ક્ષણે કુલ રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. (b) ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ દરેક અથડામણ બાદ લાગુ પડે છે. (ભલેને પછી તે સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ હોય) અને તે અથડામણની દરેક ક્ષણે લાગુ પડતું નથી. ખરેખર તો તે વખતે અથડામણ અનુભવતા પદાર્થોના આકારમાં વિકૃતિ ઉદ્ભવે છે અને તે ક્ષણ પૂરતા બંને પદાર્થો એકબીજાની સાપેક્ષે સ્થિર હોય છે.

સ્વાધ્યાય

6.1 કોઈ પદાર્થ પર થતા કાર્યનું ચિહ્ન સમજવું અગત્યનું છે. આપેલી રાશિઓ ધન કે ઋણ છે તે કાળજીપૂર્વક દર્શાવો :

(a) દોરડા સાથે બાંધેલી બાલદી (ડૉલ) કૂવામાંથી બહાર કાઢતાં માણસ વડે થયેલ કાર્ય

(b) ઉપરના કિસ્સામાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે થયેલું કાર્ય.

(c) ઢળતા સમતલ પર લપસતા પદાર્થ પર ઘર્ષણ વડે થયેલું કાર્ય

(d) ખરબચડા સમક્ષિતિજ સમતલ પર સમાન વેગથી ગતિ કરતા પદાર્થ પર લગાડેલ બળ વડે થતું કાર્ય

(e) દોલન કરતા લોલકને સ્થિર કરવા માટે હવાના અવરોધક બળ વડે થયેલું કાર્ય

6.2 પ્રારંભમાં સ્થિર રહેલ 2 kg દળનો એક પદાર્થ 7 N જેટલા સમક્ષિતિજ દિશાના બળની અસર હેઠળ ટેબલ પર ગતિક ઘર્ષણ આંક = 0.1 સાથે ગતિ કરે છે, તો આપેલી ગણતરીઓ કરો અને તમારા પરિણામનું અર્થઘટન કરો :

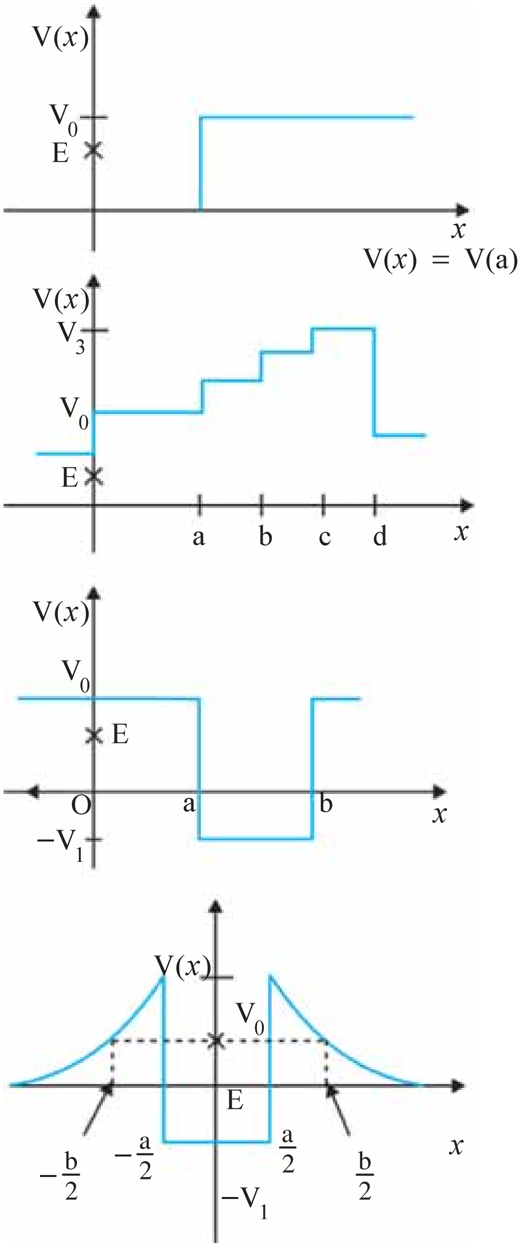
(a) લગાડેલ બળ વડે 10 sમાં થયેલ કાર્ય

(b) ઘર્ષણ વડે 10 sમાં થયેલ કાર્ય

(c) 10 sમાં પરિણામી બળ વડે પદાર્થ પર થયેલ કાર્ય

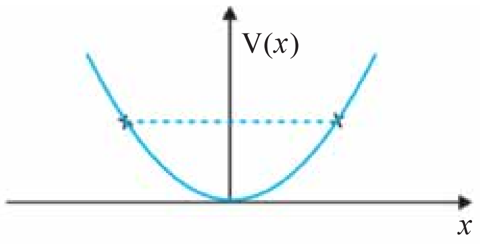
(d) 10 sમાં પદાર્થની ગતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર

6.3 આકૃતિ 6.11માં એક પરિમાણમાં સ્થિતિઊર્જા વિધેયના કેટલાંક ઉદાહરણો આપ્યાં છે. કણની કુલ ઊર્જાનું મૂલ્ય y (Ordinate) અક્ષ પર ચોકડી (Cross)ની નિશાની વડે દર્શાવ્યું છે. દરેક કિસ્સામાં, એવા વિસ્તાર દર્શાવો જો હોય તો, કે જેમાં આપેલ ઊર્જા માટે કણ અસ્તિત્વ ધરાવતો ન હોય. આ ઉપરાંત, દરેક કિસ્સામાં કણની કુલ લઘુતમ ઊર્જા કેટલી હોવી જોઈએ તે દર્શાવો. ભૌતિકશાસ્ત્રની દૃષ્ટિએ આવાં કેટલાંક ઉદાહરણો વિચારો કે જેમની સ્થિતિઊર્જાનાં મૂલ્યો આ સાથે મળતાં આવે.



આકૃતિ 6.11

6.4 રેખીય સરળ આવર્તગતિ કરતા એક કણ માટે સ્થિતિઊર્જા વિધેય $V(x) = kx^2/2$ આપેલ છે, જ્યાં k દોલકનો બળ અચળાંક છે. $k = 0.5$ N m^{-1} માટે, $V(x)$ વિરુદ્ધ xનો આલેખ આકૃતિ 6.2માં દર્શાવ્યો છે. દર્શાવો કે આ સ્થિતિમાં 1 J જેટલી કુલ ઊર્જા ધરાવતો ગતિ કરતો કણ $x = \pm 2$ m પહોંચે એટલે 'પાછો' જ ફરવો જોઈએ.

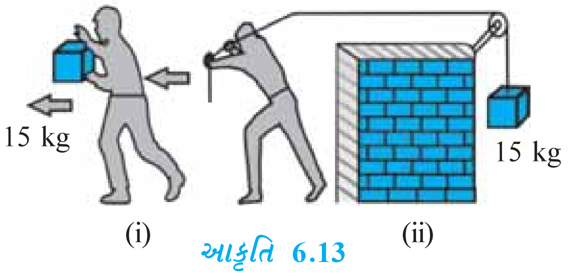


આકૃતિ 6.12

6.5 જવાબ આપો :

(a) રૉકેટનું અસ્તર (Casing) ઉડાણ દરમિયાન ઘર્ષણના કારણે સળગી ઊઠે છે. કોના ભોગે સળગવા માટે જરૂરી ઉષ્માઊર્જા મળે છે ? રૉકેટ કે વાતાવરણના ?

(b) સૂર્યની આસપાસ ધૂમકેતુઓ અતિ-દીર્ઘવૃત્તીય (Highly Elliptical) કક્ષામાં ઘૂમે છે. સામાન્ય રીતે સૂર્યના કારણે ધૂમકેતુ પર લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ લંબરૂપે લાગતું નથી. તેમ છતાં ધૂમકેતુની સંપૂર્ણ ભ્રમણકક્ષા દરમિયાન તેના પર લાગતા ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોય છે. શા માટે ?



આકૃતિ 6.13

(c) પૃથ્વીની આજુબાજુ પાતળા વાતાવરણમાં ભ્રમણ કરતો કૃત્રિમ ઉપગ્રહ, વાતાવરણના અવરોધને કારણે તેની ઊર્જા ક્રમશઃ ગુમાવે છે, ભલે તે સૂક્ષ્મ પ્રમાણમાં હોય. તેમ છતાં તે જેમ પૃથ્વીની નજીક અને નજીક આવતો જાય તેમ તેની ઝડપ શા માટે ક્રમશઃ વધતી જાય છે ?

(d) આકૃતિ 6.13(i)માં, એક માણસ તેના હાથોમાં 15 kg દળ ઊંચકીને 2 m જેટલું ચાલે છે. આકૃતિ 6.13(ii)માં, તે આટલું જ અંતર દોરડું ખેંચતા ખેંચતા ચાલે છે. દોરડું ગરગડી પરથી પસાર થઈને તેના બીજા છેડે 15 kg જેટલું દળ લટકાવેલ છે. કયા કિસ્સામાં વધુ કાર્ય થયું હશે ?

6.6 સાચા વિકલ્પ નીચે લીટી કરો :

(a) જ્યારે સંરક્ષી બળ પદાર્થ પર ધન કાર્ય કરે છે ત્યારે, પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા વધે છે/ઘટે છે/અચળ રહે છે.

(b) પદાર્થ વડે ઘર્ષણ વિરુદ્ધ થયેલું કાર્ય હંમેશાં તેની ગતિઊર્જા/સ્થિતિઊર્જાના ઘટાડામાં પરિણમે છે.

(c) વધુ કણ ધરાવતા તંત્રના કુલ વેગમાનમાં થતા ફેરફારનો દર બાહ્ય બળ/તંત્ર પરનાં આંતરિક બળોના સરવાળાને સપ્રમાણ હોય છે.

(d) બે પદાર્થોની અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણમાં જે રાશિઓ અથડામણ પછી બદલાતી નથી તે કુલ ગતિઊર્જા/કુલ રેખીય વેગમાન/બે પદાર્થો વડે બનતા તંત્રની કુલ ઊર્જા છે.

6.7 આપેલું વિધાન સાચું છે કે ખોટું તે દર્શાવો. તમારા જવાબ માટે કારણ આપો :

(a) બે પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણમાં, દરેક પદાર્થના વેગમાન અને ઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે.

(b) પદાર્થ પર લાગતા કોઈ પણ પ્રકારનાં આંતરિક કે બાહ્ય બળોની હાજરીમાં પણ તંત્રની કુલ આંતરિક ઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે.

(c) પદાર્થની બંધ માર્ગ પરની ગતિ દરમિયાન કુદરતમાંના દરેક પ્રકારનાં બળ માટે થયેલ કાર્ય શૂન્ય હોય છે.

(d) અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણમાં તંત્રની અંતિમ ગતિઊર્જા હંમેશાં તેની પ્રારંભિક ગતિઊર્જા કરતાં ઓછી હોય છે.

6.8 ધ્યાનપૂર્વક કારણ આપીને જવાબ લખો :

(a) બે બિલિયર્ડ બૉલની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દરમિયાન, અથડામણના ટૂંકા ગાળા દરમિયાન (એટલે કે જ્યારે તેઓ એકબીજાના સંપર્કમાં હોય તે દરમિયાન) શું બૉલની ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે ?

(b) શું બે બૉલની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દરમિયાનના ટૂંકા ગાળામાં તેમના રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે ?

(c) અસ્થિતિસ્થાપક અથડામણ માટે (a) અને (b)ના જવાબ શું હશે ?

(d) જો બે બિલિયર્ડ બૉલની સ્થિતિઊર્જા તેમના કેન્દ્ર વચ્ચેના અંતર પર આધાર રાખતી હોય, તો આ અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે કે અસ્થિતિસ્થાપક ? (નોંધ : અહીં આપણે અથડામણ દરમિયાન લાગતા બળને અનુલક્ષીને સ્થિતિઊર્જાની વાત કરીએ છીએ, ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જાની નહિ.)

6.9 પ્રારંભમાં એક પદાર્થ સ્થિર છે. તે એક પરિમાણમાં અચળ પ્રવેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. t સમયે તેને મળતો પાવર કોના સમપ્રમાણમાં હશે ?

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

6.10 એક પદાર્થ અચળ પાવરના ઉદ્‌ગમની અસર હેઠળ એક દિશામાં ગતિ કરે છે. t સમયમાં તેનું સ્થાનાંતર કોના સમપ્રમાણમાં હશે ?

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

6.11 એક પદાર્થને યામપદ્ધતિની z-અક્ષ પર ગતિ સીમિત રાખવા **F** જેટલું અચળ બળ લગાડવામાં આવે છે, જે

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}} \text{ N છે.}$$

અહીં $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ અનુક્રમે તંત્રના X-, Y- અને Z-અક્ષ પરના એકમ સદિશો છે. આ પદાર્થને Z-અક્ષ પર 4 m અંતર સુધી ગતિ કરાવવા માટે આ બળ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

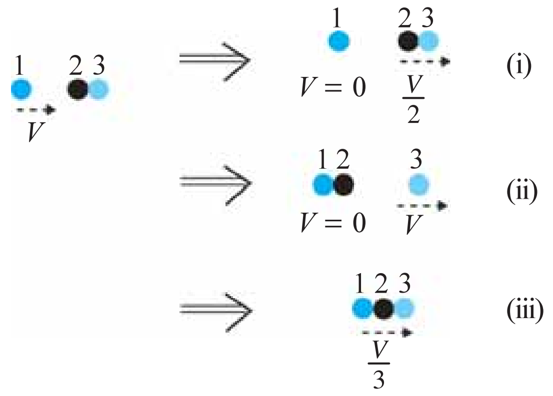
6.12 કૉસ્મિક કિરણોના એક પ્રયોગમાં એક ઇલેક્ટ્રૉન અને એક પ્રોટોનની હાજરી જોવા મળે છે, જેમાં ઇલેક્ટ્રૉનની ગતિઊર્જા 10 keV અને પ્રોટોનની 100 keV છે. કોણ ઝડપી હશે, ઇલેક્ટ્રૉન કે પ્રોટોન ? બંનેની ઝડપનો ગુણોત્તર મેળવો. (ઇલેક્ટ્રૉનનું દળ = 9.11×10^{-31} kg, પ્રોટોનનું દળ = 1.67×10^{-27} kg, 1 eV = 1.60×10^{-19} J)

6.13 2 mm ત્રિજ્યાનું વરસાદનું એક ટીપું 500 m ઊંચાઈએથી જમીન પર પડે છે. ઘટતા પ્રવેગથી (હવાના શ્યાનતા અવરોધને કારણે) તે મૂળ ઊંચાઈએથી અડધી ઊંચાઈ પ્રાપ્ત ના કરે ત્યાં સુધી પડે છે, જ્યાં તે અંતિમ (ટર્મિનલ) ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે અને ત્યાર બાદ તે એકધારી (સમાન) ઝડપથી ગતિ કરે છે. તેની સફરના પ્રથમ અને બીજા અડધા ભાગ દરમિયાન ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વડે ટીપાં પર થયેલ કાર્ય કેટલું હશે ? જો તે 10 m s^{-1}ની ઝડપથી તેની સફર પૂરી કરીને જમીન પર પડે, તો તેની આ સફર દરમિયાન અવરોધક બળ વડે ટીપાં પર કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

6.14 વાયુપાત્રમાં એક અણુ સમક્ષિતિજ દીવાલને 200 m s^{-1} ઝડપથી, લંબ સાથે 30° ખૂણે અથડાય છે અને તે જ ઝડપથી પાછો ફેંકાય છે. આ અથડામણમાં વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે ? અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે કે અસ્થિતિસ્થાપક ?

6.15 એક બિલ્ડિંગના ગ્રાઉન્ડ ફ્લોર પર રહેલ પંપ (મોટર) 30 m^3 કદની ટાંકીને 15 minમાં ભરી શકે છે. જો ટાંકી ગ્રાઉન્ડથી 40 m ઊંચાઈએ હોય અને પંપની કાર્યક્ષમતા 30 % હોય, તો પંપ દ્વારા કેટલા વિદ્યુતપાવરનો ઉપયોગ થયો હશે ?

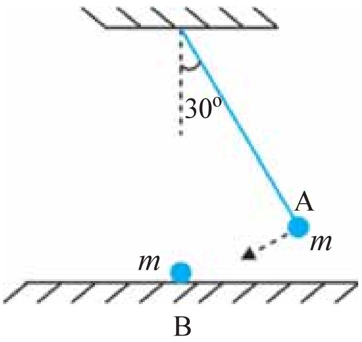
6.16 બે એક જ સરખા બૉલ બેરિંગ એકબીજાના સંપર્કમાં રહે તે રીતે ઘર્ષણરહિત ટેબલ પર સ્થિર રહેલા છે, જેમને તેટલા જ દળનું V જેટલી ઝડપથી ગતિ કરતું બૉલ બેરિંગ સન્મુખ (Head-On) અથડાય છે. જો અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક હોય, તો અથડામણ બાદ નીચે આપેલ આકૃતિ 6.14માં કયું પરિણામ શક્ય છે ?



આકૃતિ 6.14

6.17 એક લોલકના ગોળા Aને લંબ સાથે 30° ખૂણેથી છોડતાં, આકૃતિ 6.15માં દર્શાવ્યા મુજબ, તે એટલા જ દળના ટેબલ પર સ્થિર રહેલા દટ્ટા B સાથે અથડાય છે. અથડામણ બાદ ગોળો A કેટલે ઊંચે સુધી જશે ? ગોળાઓના કદને અવગણો અને અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક છે તેમ માનો.

6.18 એક લોલકના ગોળાને સમક્ષિતિજ સ્થિતિ (સ્થાન) પરથી છોડવામાં આવે છે. જો લોલકની લંબાઈ 1.5 m હોય, તો ગોળો જ્યારે ન્યૂનતમ બિંદુએ આવે ત્યારે તેની ઝડપ કેટલી હશે ? અહીં આપેલ છે કે તે તેની પ્રારંભિક ઊર્જાની 5 % ઊર્જા હવાના અવરોધક બળ સામે ગુમાવે છે.



આકૃતિ **6.15**

6.19 300 kg દળની એક લારી, 25 kg રેતીનો કોથળો લઈને ઘર્ષણરહિત રસ્તા પર 27 km/hની એક ધારી ઝડપથી ગતિ કરે છે. થોડા સમય પછી રેતી એક કાણામાંથી 0.05 kg s^{-1}ના દરે નીકળીને લારીના તળિયા પર ઢોળાવા લાગે છે. રેતીનો સંપૂર્ણ કોથળો ખાલી થઈ જાય ત્યારે લારીની ઝડપ કેટલી હશે ?

6.20 0.5 kgનો એક પદાર્થ સીધી રેખામાં વેગ $\upsilon = ax^{3/2}$ થી જાય (મુસાફરી કરે) છે, જ્યાં $a = 5\ m^{-1/2}\ s^{-1}$. તેના $x = 0$ થી $x = 2$ m સ્થાનાંતર દરમિયાન પરિણામી બળ વડે કેટલું કાર્ય થયું હશે ?

6.21 એક પવનચક્કીનાં પાંખિયાં ફરે ત્યારે A જેટલા ક્ષેત્રફળનું વર્તુળ આવરી લે છે. (a) જો પવન υ વેગથી આ વર્તુળને લંબરૂપે વહેતો હોય, તો t સમયમાં કેટલા દળની હવા તેમાંથી પસાર થશે ? (b) હવાની ગતિઊર્જા કેટલી હશે ? (c) ધારો કે પવનચક્કી પવનઊર્જાની 25 % ઊર્જાનું વિદ્યુતઊર્જામાં રૂપાંતર કરે છે અને $A = 30\ m^2$, $\upsilon = 36$ km/h તથા હવાની ઘનતા 1.2 kg m^{-3} છે, તો કેટલો વિદ્યુતપાવર ઉત્પન્ન થશે ?

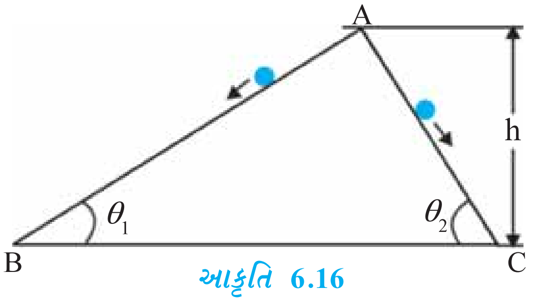
6.22 વજન ઓછું કરવા માગતી (ડાયેટિંગ કરતી) એક વ્યક્તિ, 10 kg દળને એક હજારવાર દરેક વખતે 0.5 m જેટલું ઊંચકે છે. ધારો કે તેણી જેટલી વખત દળને નીચે લાવે તેટલી વખત સ્થિતિઊર્જાનો વ્યય થાય છે. (a) તેણી ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વિરુદ્ધ કેટલું કાર્ય કરે છે ? (b) ખોરાક (ફૅટ)માંથી કિલોગ્રામ દીઠ 3.8×10^7 J ઊર્જા મળે છે જેનું યાંત્રિકઊર્જામાં રૂપાંતરણ 20 % કાર્યક્ષમતાના દરે થાય છે. ડાયેટિંગ કરનારે કેટલું ફૅટ વાપર્યુ હશે ?

6.23 એક કુટુંબ 8 kW પાવરનો ઉપયોગ કરે છે. (a) સમક્ષિતિજ સપાટી પર સૂર્યઊર્જા સીધી જ, એક ચોરસ મીટર દીઠ 200 W જેટલા સરેરાશ દરથી, આપાત થાય છે. જો આની 20 % ઊર્જાનું ઉપયોગી વિદ્યુતઊર્જામાં રૂપાંતરણ થઈ શકતું હોય, તો 8 kW મેળવવા માટે કેટલું મોટું ક્ષેત્રફળ જોઈએ ? (b) આ ક્ષેત્રફળને સામાન્ય રીતે જોવા મળતા ઘરના છાપરાના ક્ષેત્રફળ સાથે સરખાવો.

વધારાનું સ્વાધ્યાય

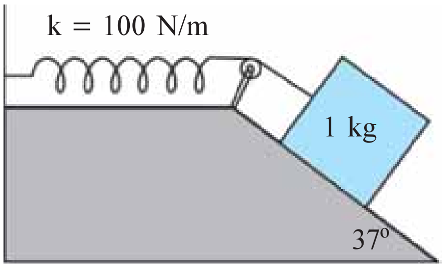
6.24 0.012 kg દળની એક બુલિટ (ગોળી) 70 m s^{-1}ની સમક્ષિતિજ ઝડપથી 0.4 kg દળના લાકડાના બ્લૉકને અથડાય છે અને તરત જ બ્લૉકની સાપેક્ષે સ્થિર થઈ જાય છે. આ બ્લૉકને ઉપરની છત સાથે પાતળા તાર વડે લટકાવ્યો છે. બ્લૉક કેટલી ઊંચાઈ સુધી જશે તે ગણો. આ ઉપરાંત, બ્લૉકમાં કેટલી ઉષ્મા ઉત્પન્ન થઈ જશે તે ગણો.

6.25 બે ઘર્ષણરહિત રસ્તાઓ એક ધીમો અને બીજો ઝડપી ઢાળવાળો એકબીજાને A પાસે મળે છે, જ્યાંથી બે પથ્થરોને સ્થિર સ્થિતિમાંથી દરેક રસ્તા પર સરકાવવામાં આવે છે (આકૃતિ 6.16). શું બંને પથ્થરો તળિયે એક જ સમયે પહોંચશે ? શું બંને ત્યાં એકસરખી ઝડપથી પહોંચશે ? સમજાવો. અહીંયાં $\theta_1 = 30^o$, $\theta_2 = 60^o$ અને $h = 10$ m આપેલ હોય, તો બંને પથ્થરોની ઝડપ અને તેમણે લીધેલ સમય કેટલા હશે ?



આકૃતિ **6.16**

6.26 આકૃતિ 6.17માં દર્શાવ્યા મુજબ ખરબચડા ઢાળ પર રાખેલ 1 kgનો એક બ્લૉક, 100 N m^{-1} જેટલા સ્પ્રિંગ અચળાંકવાળી સ્પ્રિંગ સાથે જોડેલ છે. સ્પ્રિંગની ખેંચાયા પહેલાંની સામાન્ય પરિસ્થિતિમાં બ્લૉકને સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરવામાં આવે છે. બ્લૉક સ્થિર સ્થિતિમાં આવતા પહેલાં ઢાળ પર 10 cm જેટલું નીચે જાય છે. બ્લૉક અને ઢાળ વચ્ચેનો ઘર્ષણ-આંક શોધો. ધારો કે સ્પ્રિંગનું દળ અવગણ્ય છે અને ગરગડી ઘર્ષણરહિત છે.

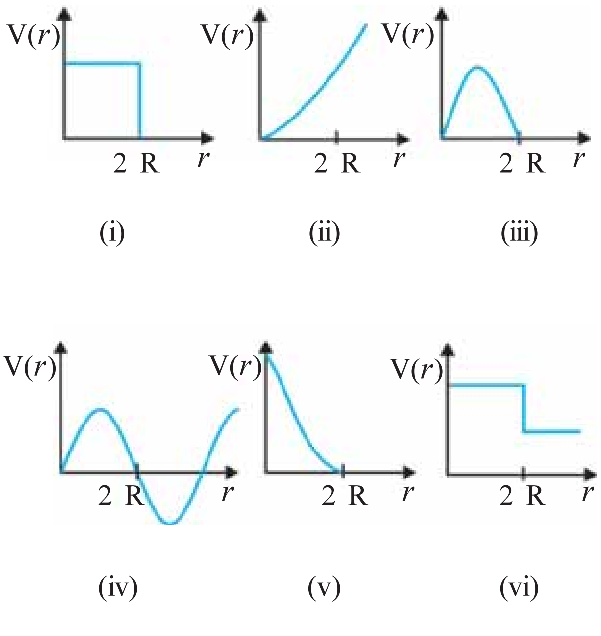


આકૃતિ 6.17

6.27 સમાન ઝડપ 7 m s^{-1}થી નીચે તરફ જતી લિફ્ટની ઉપરની છત પરથી 0.3 kgનો એક સ્ક્રૂ (બૉલ્ટ) નીચે પડે છે. તે લિફ્ટના ભોંયતળિયા પર (લિફ્ટની લંબાઈ = 3 m) પડે છે અને પાછો ઉછળતો નથી. આ ધક્કા વડે કેટલી ઉષ્મા ઉત્પન્ન થઈ હશે ? જો લિફ્ટ સ્થિર હોત, તો તમારો જવાબ જુદો હોત ?

6.28 200 kg દળની એક લારી ઘર્ષણરહિત પટ્ટા પર 36 km/hની સમાન (એક ધારી) ઝડપે ગતિ કરે છે. 20 kg દળનો એક બાળક લારી પર તેના એક છેડાથી બીજા છેડા સુધી (10 મીટર સુધી) લારીની સાપેક્ષે તેની વિરુદ્ધ દિશામાં 4 m s^{-1}ની ઝડપથી દોડે છે અને લારી પરથી બહાર કૂદકો મારે છે. લારીની અંતિમ ઝડપ કેટલી છે ? છોકરો દોડવાનું શરૂ કરે તે સમયથી લારી કેટલે સુધી ગઈ હશે ?

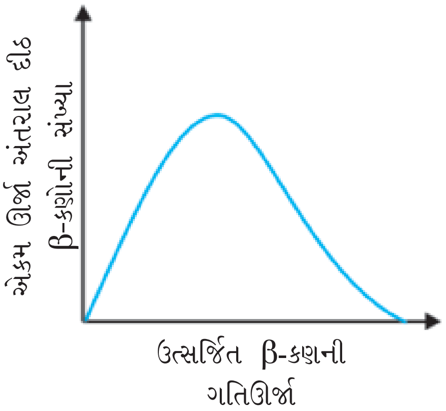
6.29 આકૃતિ 6.18માં દર્શાવેલ સ્થિતિઊર્જા વક્રોમાંથી કયા વક્રો બે બિલિયર્ડ બૉલની સ્થિતિસ્થાપક અથડામણ દર્શાવતા નથી ? અહીં r એ બૉલનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર છે.



આકૃતિ 6.18

6.30 સ્થિર રહેલા ન્યૂટ્રૉનનો ક્ષય વિચારો : $n \rightarrow p + e^-$

દર્શાવો કે આ પ્રકારના દ્વિ-કણ ક્ષયમાં ચોક્કસ ઊર્જા ધરાવતો જ ઇલેક્ટ્રૉન મળવો જોઈએ અને તેથી ન્યુટ્રૉન કે ન્યુક્લિયસના (આકૃતિ 6.19) β-ક્ષયના સતત ઊર્જા-વિતરણને સમજાવી ન શકે.



આકૃતિ **6.19**

[**નોંધ :** આ સ્વાધ્યાયનું સામાન્ય પરિણામ, W. Pouli ના β-ક્ષય દરમિયાન ત્રીજા કણના અસ્તિત્વની ધારણા માટેની ઘણી દલીલોમાંનું એક હતું. આ કણને ન્યુટ્રિનો કહે છે. આપણે હવે જાણીએ છીએ કે, આ કણનો પ્રાકૃતિક સ્પીન (પરિક્રમણાંક) 1/2 (e^-, p અથવા nની જેમ) હોય છે, પરંતુ તે તટસ્થ (વિદ્યુતભારરહિત) હોય છે અને તે લગભગ દળરહિત અથવા અત્યંત નહિવત (ઇલેક્ટ્રૉનના દળ કરતાં પણ ઘણું ઓછું) દળ ધરાવે છે તથા તે દ્રવ્ય સાથે ખૂબ નબળી રીતે આંતરક્રિયા કરે છે. ન્યુટ્રૉનના ક્ષયની સાચી પ્રક્રિયા આ મુજબ છે : $n \rightarrow p + e^- + \nu$]

પરિશિષ્ટ 6.1 : ચાલતી વખતે થતો પાવરનો વપરાશ (વ્યય) (POWER CONSUMPTION IN WALKING)

નીચે આપેલ કોષ્ટકમાં 60 kg દળના પુખ્ત માણસે ખર્ચેલ (વાપરેલ) પાવરનું લિસ્ટ દર્શાવ્યું છે :

કોષ્ટક 6.4 પાવરના વપરાશનું લગભગ મૂલ્ય

પ્રવૃત્તિ	પાવર (W)
સુતી વખતે	75
ધીમેથી ચાલવું	200
સાઈકલ ચલાવવી	500
હૃદયનો ધબકાર	1.2

યાંત્રિક કાર્યની ગેરસમજ દરરોજના સામૂહિક કાર્ય (ટીમ વર્ક) સાથે ના કરવી જોઈએ. માથા પર ખૂબ ભાર ઊંચકીને ઊભી રહેલ સ્ત્રી ખૂબ થાકી જાય છે. પરંતુ કોઈ યાંત્રિક કાર્ય સંકળાયેલું નથી. આનો મતબલ એ નથી કે, માણસની દરરોજની પ્રવૃત્તિ (કામ)ને યાંત્રિક કાર્ય સાથે સાંકળી ન શકાય.

ધારો કે કોઈ વ્યક્તિ અચળ ઝડપ υ_0થી ચાલે છે. તેણે કરેલ યાંત્રિક કાર્યને કાર્યઊર્જા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સહેલાઈથી શોધી શકાય. ધારો કે,

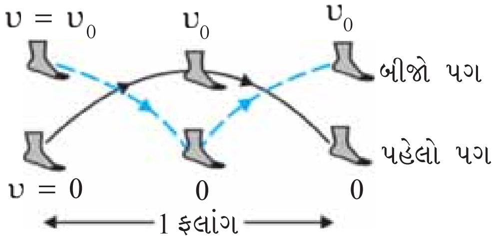
(a) ચાલતી વખતે ફલંગો (Stride) દરમિયાન બંને પગના પ્રવેગ અને પ્રતિપ્રવેગના કારણે મહત્તમ કાર્ય થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 6.20)

(b) હવાનો અવરોધ અવગણો.

(c) પગને ગુરુત્વાકર્ષણની વિરુદ્ધ ઉપાડતી વખતે થતું નાનું કાર્ય અવગણો.

(d) ચાલતી વખતે હાથ વગેરેના ઝૂલવાને અવગણો.

આકૃતિ 6.20માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, દરેક ફલાંગ દરમિયાન પગને સ્થિર સ્થિતિમાંથી ઝડપ (ગતિ) આપવામાં આવે છે, જે લગભગ ચાલવાની ઝડપ જેટલી હોય છે અને ત્યાર બાદ ફરીથી તે સ્થિર સ્થિતિમાં આવે છે.



આકૃતિ **6.20** ચાલતી વખતે એક તરફની ફલાંગનું ઉદાહરણ. જ્યારે પહેલો પગ જમીનથી મહત્તમ ઊંચાઈએ હોય ત્યારે બીજો પગ જમીન પર હોય અને તે રીતે વારાફરતી

કાર્યઊર્જા પ્રમેય અનુસાર, ફલાંગ વખતે એક પગ વડે થયેલ કાર્ય, $m_1\upsilon_0^2$ છે. અહીંયાં $m_1\upsilon_0^2/2$ ઊર્જા એક પગના સ્નાયુઓ વડે ખર્ચાય છે, જ્યારે વધારાની $m_1\upsilon_0^2/2$ સામેના પગને સ્થિર સ્થિતિમાંથી υ_0 ઝડપ આપવા માટે ખર્ચાય છે. આથી બંને પગ વડે એક ફલાંગ દરમિયાન થયેલ કાર્ય (આકૃતિ 6.20નો ધ્યાનથી અભ્યાસ કરો.)

$$W_s = 2m_1\upsilon_0^2 \qquad (6.34)$$

m_1 = 10 kg અને ધીમી ઝડપે દોડીને નવ માઈલ જેટલું સામાન્ય અંતર SI એકમમાં 3 m s^{-1} જેટલી ઝડપે કાપવામાં આવે તો આપણને

$$W_s = 180 \text{ J / ફલાંગ}$$

મળે. જો આપણે ફલાંગ 2 m લાંબી ગણીએ, તો માણસ એક સેકન્ડમાં 3 m s^{-1}ની ઝડપે 1.5 ફલાંગ કાપે. આથી વપરાયેલ પાવર

$$P = 180\frac{\text{J}}{\text{ફલાંગ}} \times 1.5\frac{\text{ફલાંગ}}{\text{second}}$$

$$= 270 \text{ W}$$

આપણે એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ કે આ આછો અંદાજ છે કારણ કે પાવરના વ્યયના કેટલાય રસ્તાઓ (દા.ત., હાથનું ઝૂલવું, હવાનો અવરોધ વગેરે) અવગણવામાં આવ્યા છે. અગત્યની વાત એ છે કે આપણે આમાં સંકળાયેલાં બળોની ચિંતા કરવાની જરૂર નથી. અહીંયાં ઘર્ષણ અને શરીરના બીજા સ્નાયુઓ વડે પગ પર લાગતાં બળોની ગણતરી કરવી મુશ્કેલ છે. સ્થિત ઘર્ષણ કોઈ કાર્ય કરતું નથી અને આપણે કાર્યઊર્જા પ્રમેયનો આધાર લઈને સ્નાયુઓ વડે થતા કાર્યને ટાળ્યું છે. આપણે પૈડાની અગત્ય પણ જોઈ શકીએ છીએ. પૈડું આપણા સ્નાયુઓને સ્વયંસંચાલિત રીતે શરૂ કરવા અને ઊભા રહેવાની, હલન-ચલનની પળોજણમાંથી મુક્તિ આપે છે.