પ્રકરણ 8

ગુરુત્વાકર્ષણ (GRAVITATION)

8.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આપણે આપણા જીવનના પ્રારંભિક તબક્કાથી બધા પદાર્થોના પૃથ્વી તરફ આકર્ષાવાના વલણથી સભાન છીએ. કંઈક પણ ઉપર તરફ ફેંકીએ તો તે (છેવટે તો) પૃથ્વી તરફ પાછું ફરે છે. ટેકરી પર ચઢવાનું, ટેકરી પરથી ઊતરવા કરતાં ઘણું વધારે થકવી દે તેવું છે. ઊંચે રહેલા વાદળોમાંથી વર્ષાબિંદુઓ પૃથ્વી તરફ પડે છે અને આવી બીજી ઘણી ઘટનાઓ છે. ઐતિહાસિક રીતે, ઇટાલિયન ભૌતિકવિજ્ઞાની ગૅલિલિયોએ (1564-1642) એ હકીકત જાણી લીધી હતી કે, કોઈપણ દળ ધરાવતા હોય તેવા બધા પદાર્થો અચળ પ્રવેગથી પૃથ્વી તરફ પ્રવેગિત થાય છે. એવું કહેવાય છે કે તેણે આ હકીકતનું સાર્વજનિક નિર્દેશન કર્યું હતું. સત્ય શોધવા માટે તેણે ઢોળાવવાળાં સમતલો પરથી ગબડતા પદાર્થો અંગે ખાસ પ્રયોગો કર્યા અને તે પરથી તેણે ગુરુત્વપ્રવેગનું જે મૂલ્ય મેળવ્યું તે ત્યાર પછીથી, વધારે ચોકસાઈપૂર્વક મેળવાયેલ મૂલ્યની નજીક હતું.

તારાઓ, ગ્રહો અને તેમની ગતિનું અવલોકન આની સાથે સંબંધ ધરાવતી ન હોય તેવી ઘટના લાગે છે પણ છેક આદિકાળથી ઘણા દેશોમાં તે ધ્યાન આકર્ષક વિષય રહ્યો છે. આદિકાળથી અવલોકનોમાં વર્ષોનાં વર્ષો સુધી આકાશમાં જેમનું સ્થાન બદલાતું દેખાતું ન હોય તેવા તારાઓની ઓળખ થઈ હતી. વધુ રસપ્રદ પદાર્થો તો તે ગ્રહો છે જે તારાઓની પૃષ્ઠભૂમિમાં પોતાની નિયમિત ગતિ ધરાવે છે. ગ્રહોની ગતિ અંગે સૌથી પ્રથમ નોંધાયેલ મોડેલ, લગભગ 2000 વર્ષ પહેલાં ટૉલેમી (Ptolemy)એ રજૂ કરેલું 'પૃથ્વી કેન્દ્રિય' (Geo-Centric) મોડેલ હતું, જેમાં તારાઓ, સૂર્ય અને ગ્રહો એ બધા આકાશી પદાર્થો પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે. અવકાશી પદાર્થો માટે વિચારી શકાય તેવી શક્ય ગતિ એ વર્તુળાકાર ગતિ હતી. ગ્રહોની દેખાતી ગતિને રજૂ કરવા માટે ટૉલેમીએ ગતિની ગૂંચવણભરી (જટિલ) યોજનાઓ રજૂ કરી હતી. તેણે ગ્રહોને વર્તુળમાં ગતિ કરતા જણાવ્યા હતા અને આ વર્તુળના કેન્દ્ર વધુ મોટા વર્તુળમાં ગતિ કરતા હતા. ભારતીય ખગોળશાસ્ત્રીઓએ પણ લગભગ 400 વર્ષ પછી આવા સિદ્ધાંતો રજૂ કર્યા હતા. જોકે આર્યભટ્ટ (ઈશુની પાંચમી સદી) દ્વારા તેના પુસ્તકમાં એક વધારે સુંદર મોડેલ-'સૂર્યકેન્દ્રી' (Helio-Centric) મોડેલનો ઉલ્લેખ કરાયેલો હતો જેમાં સૂર્ય કેન્દ્રમાં હતો, જેની આસપાસ બધા ગ્રહો ભ્રમણ કરતા હતા. એક હજાર વર્ષ પછી નિકોલસ કૉપરનિક્સ (1473-1543) નામના પોલૅન્ડના એક સાધુએ એક નિર્ણાયક મોડેલ રજૂ કર્યું જેમાં સૂર્ય કેન્દ્રમાં સ્થિર હોય તેવાં વર્તુળોમાં, ગ્રહો ગતિ કરતા હતા. તેના સિદ્ધાંતને ચર્ચ દ્વારા અમાન્ય કરવામાં

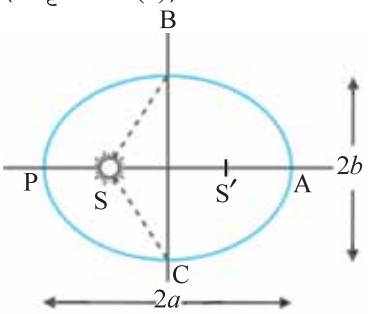
આવ્યું હતું, પરંતુ તેના ટેકેદારોમાં ગૅલિલિયો નોંધપાત્ર હતો જેને પોતાની માન્યતા માટે રાજસત્તા તરફથી કાયદાકીય કાર્યવાહીનો સામનો કરવો પડ્યો હતો.

લગભગ ગૅલિલિયોના સમય દરમિયાન ડેન્માર્કના એક ઉમદા વ્યક્તિ ટાઈકો બ્રાહે (1546-1601)એ પોતાનું સમગ્ર જીવન નરી આંખે ગ્રહોનાં અવલોકનો નોંધવામાં વિતાવ્યું હતું. તેણે એકઠી કરેલી વિગતોનું પાછળથી તેના મદદનીશ જોહનસ કૅપ્લર (1571-1640) દ્વારા વિશ્લેષણ કરવામાં આવ્યું. એ વિગતો પરથી તેણે ત્રણ અદ્‌ભુત નિયમો તારવ્યા જે કૅપ્લરના નિયમો તરીકે ઓળખાય છે. આ નિયમોની ન્યૂટનને ખબર હતી અને તેથી વૈજ્ઞાનિક હરણફાળ લગાવતા ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમને રજૂ કરવામાં તેનાથી તેને મદદ મળી હતી.

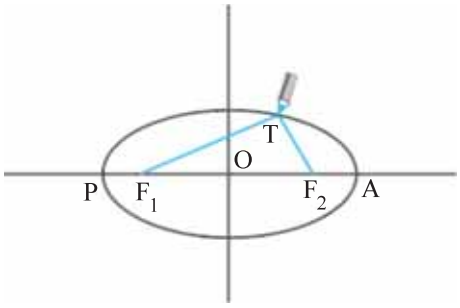
8.2 કૅપ્લરના નિયમો (KEPLER'S LAWS)

કૅપ્લરના ત્રણ નિયમો નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

1. કક્ષાઓનો નિયમ (Law of Orbits) : બધા ગ્રહો એવી દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે કે જેના એક કેન્દ્ર પર સૂર્ય રહેલો હોય. (આકૃતિ 8.1(a))



આકૃતિ 8.1(a) ગ્રહ વડે સૂર્યની આસપાસ રચાયેલું દીર્ઘવૃત્ત. સૌથી નજીકનું બિંદુ P છે અને સૌથી દૂરનું બિંદુ A છે. Pને સૂર્યનીચ બિંદુ (Perihelion) અને Aને સૂર્યોચ્ચ બિંદુ (Aphelion) કહે છે. અર્ધદીર્ઘ અક્ષ એ AP અંતરનું અડધું છે.



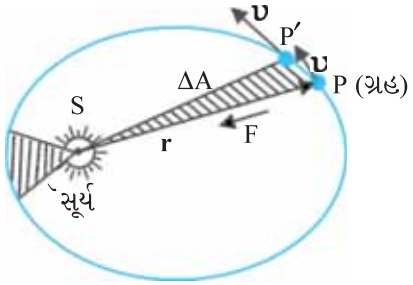
આકૃતિ 8.1(b) દીર્ઘવૃત્ત દોરવું. એક દોરીના છેડાઓને F_1 અને F_2 આગળ જડી દીધેલ છે. પેન્સિલની અણી વડે દોરીને કડક રાખી અણીને ફેરવવામાં આવે છે.

* પૃ. 182 પર બૉક્સમાં આપેલ માહિતીનો સંદર્ભ લો.

આ નિયમ કૉપરનિક્સના મોડેલ કે જેમાં માત્ર વર્તુળાકાર કક્ષાઓ માન્ય હતી તેના કરતાં જુદો પડે છે. દીર્ઘવૃત્ત એ એક બંધ વક્ર છે જેનો એક વિશિષ્ટ કિસ્સો એ વર્તુળ છે. આવું દીર્ઘવૃત્ત સહેલાઈથી નીચે મુજબ દોરી શકાય :

બે બિંદુઓ F_1 અને F_2 પસંદ કરો. અમુક લંબાઈની દોરી લઈને તેના છેડાઓને ટાંકણીની મદદથી F_1 અને F_2 આગળ જડી દો. પેન્સિલની અણી વડે દોરીને કડક ખેંચેલી રાખી પેન્સિલને ફેરવતા જઈ એક વક્ર દોરો. (આકૃતિ 8.1(b)) આ રીતે મળેલો બંધ વક્ર દીર્ઘવૃત્ત કહેવાય છે. સ્પષ્ટ જ છે કે દીર્ઘવૃત્ત પરના કોઈ પણ બિંદુ T માટે F_1 અને F_2થી અંતરોનો સરવાળો અચળ રહે છે. F_1 અને F_2ને કેન્દ્રો કહે છે. F_1 અને F_2 બિંદુઓને જોડી તે રેખાને લંબાવો જે દીર્ઘવૃત્તને આકૃતિ 8.1(b)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે P અને A બિંદુએ છેદે. PA રેખાનું મધ્યબિંદુ O દીર્ઘવૃત્તનું મધ્યબિંદુ છે અને PO = AO લંબાઈને દીર્ઘવૃત્તની અર્ધદીર્ઘ અક્ષ કહે છે. વર્તુળ માટે બે કેન્દ્રો ભળી જઈને એક બને અને અર્ધદીર્ઘઅક્ષ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા બને છે.

2. ક્ષેત્રફળોનો નિયમ (Law of Areas) : કોઈ પણ ગ્રહને સૂર્ય સાથે જોડતી રેખા સમાન સમયગાળામાં સમાન ક્ષેત્રફળ આંતરે છે (આકૃતિ 8.2). આ નિયમ એવાં અવલોકનો પરથી મળેલ છે કે જ્યારે ગ્રહો સૂર્યથી દૂર હોય ત્યારે તે નજીક હતા તેના કરતાં ધીમા ફરતા જણાય છે.



આકૃતિ 8.2 ગ્રહ P સૂર્યની આસપાસ દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષામાં ગતિ કરે છે. છાયાંકિત ક્ષેત્રફળ એ નાના સમયગાળા Δtમાં આંતરાતું ક્ષેત્રફળ ΔA છે.

(3) આવર્તકાળનો નિયમ (Law of Periods) : ગ્રહના પરિભ્રમણના આવર્તકાળનો વર્ગ તેણે રચેલા દીર્ઘવૃત્તની અર્ધદીર્ઘ અક્ષના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

કોષ્ટક 8.1 આઠ* ગ્રહોના સૂર્યની ફરતે પરિભ્રમણના આવર્તકાળ (લગભગ) તેમજ તેમની અર્ધદીર્ઘઅક્ષનાં મૂલ્યો આપે છે.

કોષ્ટક 8.1 નીચે આપેલ ગ્રહોની ગતિની માપણીની વિગતો કેપ્લરના આવર્તકાળના નિયમની પુષ્ટિ કરે છે.
(a = અર્ધદીર્ઘ અક્ષ, 10^{10}mના એકમોમાં
T = ગ્રહના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ, વર્ષમાં (y)
Q = (T^2/a^3) આંક, $10^{-34}y^2m^{-3}$ના એકમોમાં

ગ્રહ	a	T	Q
બુધ	5.79	0.24	2.95
શુક્ર	10.8	0.615	3.00
પૃથ્વી	15.0	1	2.96
મંગળ	22.8	1.88	2.98
ગુરુ	77.8	11.9	3.01
શનિ	143	29.5	2.98
યુરેનસ	287	84	2.98
નેપ્ચ્યૂન	450	165	2.99
પ્લુટો*	590	248	2.99

ક્ષેત્રફળોનો નિયમ કે જે કોઈ પણ કેન્દ્રિય બળ માટે સાચો છે તે કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના પરિણામ તરીકે સમજી શકાય છે. કેન્દ્રિય બળ એવું છે કે ગ્રહ પર લાગતું બળ, સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતા સદિશ પર હોય છે. સૂર્યને ઉદ્ગમ તરીકે લઈ ગ્રહનાં સ્થાન અને વેગમાન અનુક્રમે ધારો કે **r** અને **P** વડે દર્શાવાય છે. m દળના ગ્રહ દ્વારા Δt સમયગાળામાં આંતરાતું ક્ષેત્રફળ $\Delta \mathbf{A}$ છે. (આકૃતિ 8.2), જ્યાં

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon}\Delta t) \qquad (8.1)$$

તેથી,

$$\Delta \mathbf{A}/\Delta t = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/m, \text{ (કારણ કે, } \boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{p}/m)$$

$$= \mathbf{L} / (2m) \qquad (8.2)$$

જ્યાં $\boldsymbol{\upsilon}$ વેગ છે, **L** કોણીય વેગમાન છે, જે ($\mathbf{r} \times \mathbf{p}$) બરાબર છે. સ્થાનસદિશ **r**ની દિશા પર લાગતા કેન્દ્રિય બળ માટે, ગ્રહ પરિભ્રમણ કરતો જાય તે દરમિયાન **L** અચળ રહે છે. તેથી છેલ્લા સમીકરણ મુજબ $\Delta \mathbf{A}/\Delta t$ એ અચળાંક છે. આ ક્ષેત્રફળોનો નિયમ જ છે. ગુરુત્વ બળ એ કેન્દ્રિય બળ છે અને તેથી ક્ષેત્રફળોનો નિયમ પળાય છે.

જોહનસ કેપ્લર (1571-1630) એ જર્મન મૂળનો વિજ્ઞાની હતો. તેણે ટાઇકો બ્રાહે અને તેના સહકાર્યકરોએ કાળજીપૂર્વક લીધેલાં અવલોકનો પરથી ગ્રહોની ગતિ અંગેના ત્રણ નિયમોની રચના કરી. કેપ્લર પોતે બ્રાહેનો મદદનીશ હતો અને તેને ગ્રહો અંગેના ત્રણ નિયમો પર પહોંચતાં સોળ વર્ષ જેટલો લાંબો સમય લાગ્યો હતો. ટેલિસ્કોપમાં દાખલ થયા પછી પ્રકાશનું શું થાય છે તે જણાવનાર તે પ્રથમ હોવાથી તેને ભૌમિતિક પ્રકાશશાસ્ત્રનો પ્રણેતા ગણવામાં આવે છે.

* પૃ. 182 પર બૉક્સમાં આપેલ માહિતીનો સંદર્ભ લો.

▶ *ઉદાહરણ 8.1* ધારો કે આકૃતિ 8.1(a)માં સૂર્યનીચ (Perihelion) બિંદુ P આગળ ગ્રહની ઝડપ υ_p અને સૂર્યથી ગ્રહનું SP અંતર r_p છે. $\{r_p, \upsilon_p\}$નો, સૂર્યોચ્ચ (Aphetion) બિંદુ A આગળની અનુરૂપ રાશિઓ સાથે સંબંધ મેળવો. ગ્રહને BAC અને CPB અંતર કાપતાં સરખો સમય લાગશે ?

ઉકેલ P આગળ કોણીય વેગમાનનું માન $L_p = m_p \upsilon_p r_p$ છે કારણ કે આકૃતિ જોતાં જ $\boldsymbol{r}_p$ અને $\boldsymbol{\upsilon}_p$ પરસ્પર લંબ દેખાય છે. તે જ પ્રમાણે $L_A = m_p \upsilon_A r_A$. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણ પરથી,

$$m_p \upsilon_p r_p = m_p \upsilon_A r_A$$

અથવા $\dfrac{\upsilon_p}{\upsilon_A} = \dfrac{r_A}{r_p}$ ◀

અહીં, $r_A > r_p$ હોવાથી $\upsilon_p > \upsilon_A$

આકૃતિ 8.1માં ત્રિજ્યા સદિશો SB અને SC સાથે દીર્ઘવૃત્ત વડે ઘેરાયેલું ક્ષેત્રફળ SBAC, SBPC કરતાં વધુ છે. કેપ્લરના બીજા નિયમ પરથી એકસમાન સમયમાં એકસરખું ક્ષેત્રફળ આંતરાય છે. આથી, ગ્રહને CPB અંતર કરતાં BAC અંતર કાપતાં વધુ સમય લાગશે.

8.3 ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ (UNIVERSAL LAW OF GRAVITATION)

એક એવી દંતકથા છે કે, ઝાડ પરથી પડતા સફરજનને જોઈને ન્યૂટનને પ્રેરણા થઈ અને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ મેળવ્યો, જેના પરથી પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણ તેમજ કેપ્લરના નિયમોની સમજૂતી આપી શકાઈ. ન્યૂટનનો તર્ક એવો હતો કે, R_m ત્રિજ્યાની કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ચંદ્ર પર, પૃથ્વીના ગુરુત્વને લીધે કેન્દ્રગામી પ્રવેગ હોય છે જેનું માન

$$a_m = \frac{V^2}{R_m} = \frac{4\pi^2 R_m}{T^2} \qquad (8.3)$$

છે, જ્યાં V એ ચંદ્રની ઝડપ છે જે આવર્તકાળ T સાથે $V = 2\pi R_m/T$ સંબંધ ધરાવે છે. આવર્તકાળ T લગભગ 27.3 દિવસ છે અને R_mનું મૂલ્ય, તે સમયે પણ લગભગ 3.84×10^8m હોવાનું જાણીતું હતું. જો આપણે આ મૂલ્યો સમીકરણ (8.3)માં અવેજ કરીએ, તો આપણને a_mનું મૂલ્ય, પૃથ્વીની સપાટી પર પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણથી ઉદ્ભવતા ગુરુત્વપ્રવેગ gના મૂલ્ય કરતાં ઘણું નાનું મળે છે.

કેન્દ્રિય બળો (Central Forces)

આપણે જાણીએ છીએ કે, ઊગમબિંદુને અનુલક્ષીને કોઈ એક કણના કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય-દર $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ છે.

જો તેની પરના બળ **F**ને લીધે લાગતું ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ શૂન્ય બને તો કણના કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. જ્યારે **F** શૂન્ય હોય અથવા **F** એ **r**ની દિશામાં હોય ત્યારે આવું થાય છે. આપણને એવાં બળોમાં રસ છે જેઓ બીજી શરતનું પાલન કરતા હોય. કેન્દ્રિય બળો આ બીજી શરતનું પાલન કરે છે.

'કેન્દ્રિય' બળ હંમેશાં એક નિશ્ચિત બિંદુ તરફની દિશામાં અથવા તેનાથી દૂરની દિશામાં હોય છે. એટલે કે નિશ્ચિત બિંદુને અનુલક્ષીને બળના લાગબિંદુના સ્થાનસદિશની દિશામાં હોય છે (નીચેની આકૃતિ જુઓ). ઉપરાંત કેન્દ્રિય બળનું માન નિશ્ચિત બિંદુથી બળના લાગબિંદુના અંતર **r** પર આધાર રાખે છે. $F = F(\mathrm{r})$.

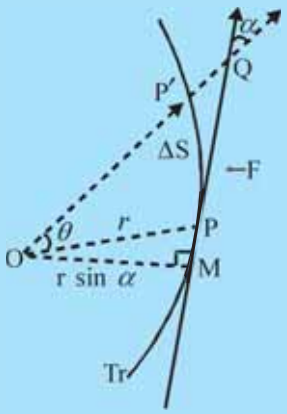
કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ થતી ગતિમાં, કોણીય વેગમાનનું હંમેશાં સંરક્ષણ થાય છે. આ પરથી બે મહત્ત્વનાં પરિણામ મળે :

(1) કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ કણની ગતિ હંમેશાં એક સમતલમાં સીમિત હોય છે.

(2) બળના કેન્દ્ર (નિશ્ચિત બિંદુ)ને અનુલક્ષીને કણના સ્થાનસદિશને અચળ ક્ષેત્રીય વેગ હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ કણ ગતિ કરતો હોય ત્યારે તેનો સ્થાન સદિશ એક સમાન સમયમાં એક સમાન ક્ષેત્રફળ આંતરે છે.

આ બંને પરિણામો સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરો. તમારે એ જાણવું જરૂરી છે કે ક્ષેત્રીય વેગ, $dA/dt = \frac{1}{2} r\, \upsilon \sin\alpha$ વડે અપાય છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચાનો ત્વરિત ઉપયોગ, સૂર્યના ગુરુત્વબળની અસર હેઠળ ગ્રહની ગતિ પર કરી શકાય છે. સરળતા ખાતર આપણે સૂર્યને એટલો ભારે ગણી લઈએ કે તે સ્થિર રહે છે. સૂર્યનું ગ્રહ પરનું ગુરુત્વબળ, સૂર્ય તરફની દિશામાં છે. આ બળ, $F = F(\mathrm{r})$ આવશ્યકતાનું પણ પાલન કરે છે. કારણ કે $F = G\, m_1 m_2/r^2$ જ્યાં m_1 અને m_2 એ અનુક્રમે ગ્રહ અને સૂર્યના દળ છે અને G એ ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક છે. આથી ઉપર દર્શાવેલાં બે પરિણામો, (1) અને (2), ગ્રહની ગતિને લાગુ પાડી શકાય છે. વાસ્તવમાં, પરિણામ (2)એ ખૂબ જાણીતો એવો કેપ્લરનો બીજો નિયમ છે.



Tr એ કેન્દ્રિય બળની અસર હેઠળ કણનો ગતિપથ છે. *P* સ્થાને બળ **OP** પર (**PO** દિશામાં) છે, *O* બળનું કેન્દ્ર છે, તેને ઊગમબિંદુ તરીકે લીધેલ છે. Δt સમયમાં, કણ *P* થી *P'* પર ગતિ કરે છે. ચાપ $PP' = \Delta s = \upsilon \Delta t$. *P* આગળ ગતિપથને દોરેલો સ્પર્શક *PQ*, *P* આગળના વેગની દિશા આપે છે. Δt સમયમાં આંતરાતું ક્ષેત્રફળ; $POP' \approx (r \sin\alpha)\, PP'/2 = (r\, \upsilon \sin\alpha)\, \Delta t/2$ છે.

આ સ્પષ્ટ દર્શાવે છે કે, પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ અંતર સાથે ઘટે છે. જો પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ઘટતું જાય તો, $a_m \propto R_m^{-2}$ મળે, વળી $g \propto R_E^{-2}$ અને આમ,

$$\frac{g}{a_m} = \frac{R_m^2}{R_E^2} = 3600 \qquad (8.4)$$

જે, $g \approx 9.8$ m s^{-2} અને સમીકરણ (8.3) પરથી મળતા a_mના મૂલ્ય સાથે સુસંગત છે. આ અવલોકનો પરથી ન્યૂટને ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ નીચે મુજબ આપ્યો :

વિશ્વમાંનો દરેક પદાર્થ બીજા દરેક પદાર્થને બળ દ્વારા આકર્ષે છે કે જે તેમના દળના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

આ અવતરણ ન્યૂટનના પ્રખ્યાત ગ્રંથ 'Mathematical Principles of Natural Philosophy' (ટૂંકમાં Principia)માંથી છે.

ન્યૂટનના ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમને ગાણિતીક રીતે આમ રજૂ કરાય : એક બિંદુવત્ દળ m_1ને લીધે બીજા બિંદુવત્ દળ m_2 પર લાગતા બળ **F**નું માન

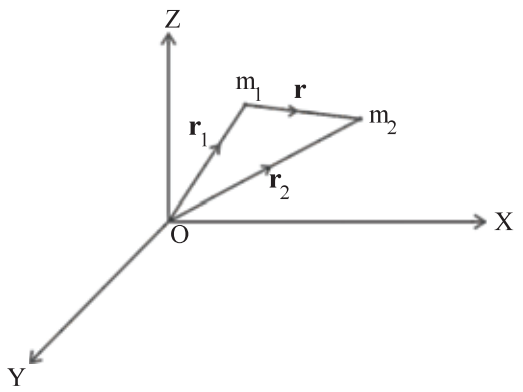
$$|\mathbf{F}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (8.5)$$

છે. સમીકરણ (8.5)ને સદિશ સ્વરૂપમાં નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$$\mathbf{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}(-\hat{\mathbf{r}}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$= -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

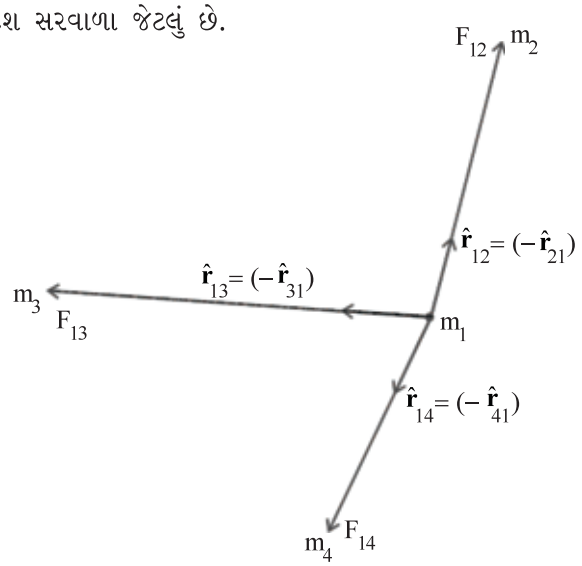
જ્યાં G એ ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક છે. $\hat{\mathbf{r}}$ એ m_1 થી m_2ની દિશામાંનો એકમ સદિશ છે અને આકૃતિ 8.3માં દર્શાવ્યા મુજબ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ છે.



આકૃતિ 8.3 m_1 પર m_2 વડે લાગતું બળ **r** પર છે. જ્યાં સદિશ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ છે.

ગુરુત્વાકર્ષણ બળ એ આકર્ષી બળ છે. એટલે કે બળ **F**, −**r**ની દિશામાં છે. બિંદુવત્ દળ m_1 પર m_2ને લીધે લાગતું બળ, ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ −**F** છે. આમ, પદાર્થ 1 પર 2ને લીધે લાગતું ગુરુત્વબળ $\mathbf{F}_{12}$ અને પદાર્થ 2 પર 1ને લીધે લાગતું ગુરુત્વબળ $\mathbf{F}_{21}$ વચ્ચેનો સંબંધ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ છે.

સમીકરણ (8.5)ને આપણી વિચારણા હેઠળના પદાર્થો પર લાગુ પાડતાં પહેલાં આપણે ધ્યાન રાખવું પડે, કારણ કે નિયમ તો બિંદુવત્ દળો અંગે છે જ્યારે આપણે જેમને પરિમિત પરિમાણ હોય તેવા વિસ્તારીત પદાર્થો સાથે કામ પાડવાનું છે. જો આપણી પાસે બિંદુવત્ દળોનો સમૂહ હોય, તો તેમાંના કોઈ પણ એક પર લાગતું બળ, આકૃતિ 8.4માં દર્શાવ્યા મુજબ, બીજા બધા બિંદુવત્ દળો વડે તેના પર લાગતાં બળોના સદિશ સરવાળા જેટલું છે.



આકૃતિ 8.4 બિંદુવત્ દળ m_1 પર લાગતું ગુરુત્વબળ, m_2, m_3 અને m_4 વડે લાગતાં ગુરુત્વબળોના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે.

m_1 પર લાગતું કુલ બળ

$$\mathbf{F}_1 = -\left(\frac{Gm_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} + \frac{Gm_3 m_1}{r_{31}^2}\hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{Gm_4 m_1}{r_{41}^2}\hat{\mathbf{r}}_{41}\right)$$

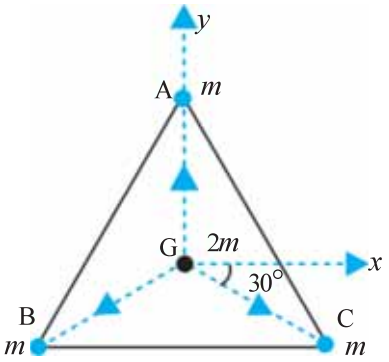
અહીં, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ = m_2 થી m_1 તરફનો એકમ સદિશ, વગેરે.

આપેલા બિંદુએ એકમ દળ દીઠ લાગતા ગુરુત્વબળને તે બિંદુ આગળની ગુરુત્વ તીવ્રતા (અથવા ગુરુત્વક્ષેત્ર) કહે છે. તેનો એકમ N/kg છે.

ઉદાહરણ 8.2 સમબાજુ ત્રિકોણ ABCના દરેક શિરોબિંદુ પર m kg જેટલું દળ ધરાવતાં પદાર્થ રાખેલ છે.

(a) ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર G પર મૂકેલા $2m$ દળ પર કેટલું બળ લાગશે ? (b) જો શિરોબિંદુ A પરનું દળ બમણું કરવામાં આવે તો કેટલું બળ લાગે ?

AG = BG = CG = 1m લો. (જુઓ આકૃતિ 8.5.)



આકૃતિ 8.5 ત્રિકોણ ABCનાં ત્રણ શિરોબિંદુએ સમાન દળ મૂકેલ છે. 2m દળ મધ્યકેન્દ્ર G પર મૂકેલ છે.

ઉકેલ (a) GC અને ધન x-અક્ષ વચ્ચેનો કોણ 30° છે, તેટલા જ કોણ GB અને ઋણ x-અક્ષ વચ્ચે છે. સદિશ રૂપમાં વ્યક્તિગત બળો આ પ્રમાણે છે :

$$\mathbf{F}_{GA} = \frac{Gm(2m)}{1}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}_{GB} = \frac{Gm(2m)}{1}(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ)$$

$$\mathbf{F}_{GC} = \frac{Gm(2m)}{1}(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અને સદિશ સરવાળાના નિયમ પરથી $(2m)$ પર પરિણામી ગુરુત્વબળ $\mathbf{F}_R$ હોય, તો

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F}_{GA} + \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_{GC}$$
$$= 2Gm^2\hat{\mathbf{j}} + 2Gm^2(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ)$$
$$+ 2Gm^2(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^\circ) = 0$$

વૈકલ્પિક રીતે સંમિતિ પરથી પણ પરિણામી બળ શૂન્ય બનવું જોઈએ તેવી કોઈ અપેક્ષા રાખી શકે.

(b) સંમિતિ પરથી બળનો x-ઘટક નાબૂદ થાય છે અને y-ઘટક બાકી રહે છે.

$$\mathbf{F}_R = 4Gm^2\hat{\mathbf{j}} - 2Gm^2\hat{\mathbf{j}} = 2Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$ ◀

પૃથ્વી જેવા વિસ્તારીત પદાર્થ અને બીજા એક બિંદુવત્ દળ વચ્ચેના ગુરુત્વબળ માટે સમીકરણ (8.5) સીધેસીધું વાપરી શકાતું નથી. વિસ્તૃત પદાર્થની અંદરનું દરેક બિંદુવત્ દળ આપેલા બિંદુવત્ દળ પર બળ લગાડશે અને આવાં બધાં બળો એક જ દિશામાં નહિ હોય. કુલ બળ મેળવવા માટે આપણે વિસ્તૃત પદાર્થમાંના દરેક બિંદુવત્ દળ વડે લાગતું બળ મેળવી એ બધાં બળોનો સદિશ સરવાળો કરવો પડશે. કલનશાસ્ત્રની મદદથી આ સહેલાઈથી થઈ શકે છે. આમ કરતાં, બે ખાસ કિસ્સાઓમાં સાદો નિયમ મળે છે.

(1) **એક નિયમિત ઘનતા ધરાવતી પોલી ગોળાકાર કવચ અને તેની બહાર રહેલા બિંદુવત્ દળ વચ્ચેનું ગુરુત્વબળ, કવચનું સમગ્ર દળ જાણે કવચના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયું હોય ત્યારે મળતા બળ જેટલું જ હોય છે.** ગુણાત્મક રીતે આને આ રીતે સમજી શકાય : કવચના વિવિધ વિસ્તારો દ્વારા ઉદ્ભવતાં બળોનાં ઘટકો બિંદુવત્ દળ અને કેન્દ્રને જોડતી રેખા પર પણ હોય છે અને આ રેખાને લંબ દિશામાં પણ હોય છે. જ્યારે બધા વિસ્તારો માટેનો સરવાળો કરીએ ત્યારે આ રેખાને લંબ ઘટકો નાબૂદ થાય છે અને માત્ર તે બિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા પરનાં ઘટકો જ બાકી બચે છે. બળનું માન ઉપર જણાવ્યા જેટલું હોય છે.

ન્યૂટનનું પ્રિન્સિપિયા

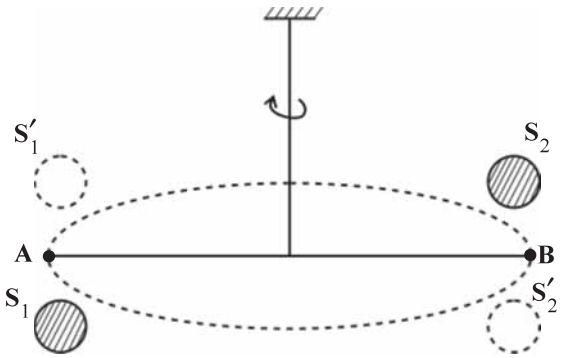
1619 સુધીમાં કેપ્લરે તેનો ત્રીજો નિયમ રચી દીધો હતો. તેમાં કાર્યરત એવા ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમની જાહેરાત લગભગ સિત્તેર વર્ષ પછી 1687માં ન્યૂટનના અદ્ભુત ગ્રંથ **"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"** ઘણી વાર ટૂંકમાં **Principia** કહેવાય છે તેના પ્રકાશન સાથે થઈ.

1685 આસપાસ, એડમંડ હેલી (હેલીના ધૂમકેતુનું નામ જેના પરથી પડ્યું તે) ન્યૂટનને મળવા કેમ્બ્રિજ આવ્યો અને વ્યસ્ત વર્ગના નિયમની અસર હેઠળ ગતિ કરતા પદાર્થના ગતિપથ વિશે પૂછ્યું. જરાય આનાકાની વગર ન્યૂટને જવાબ આપ્યો કે તે દીર્ઘવૃત્ત જ હોય, અને વધારામાં પ્લેગ ફાટી નીકળવાથી તેને કેમ્બ્રિજથી પોતાના ફાર્મ હાઉસ પર નિવૃત્તિ ગાળવી પડી ત્યારે, લગભગ 1665માં આ ગણતરી કરેલ હતી તેમ જણાવ્યું. દુર્ભાગ્યે ન્યૂટનના કાગળો ખોવાઈ ગયા હતા. હેલીએ ન્યૂટનને તેનું કાર્ય પુસ્તકરૂપે રજૂ કરવાનું સમજાવ્યું અને પ્રકાશનનો ખર્ચ ઉપાડી લેવા સંમતિ આપી. અઢાર માસના અતિમાનવ સમા પ્રયત્નથી ન્યૂટને આ પરાક્રમ સંપન્ન કર્યું. **પ્રિન્સિપિયા** એ અજોડ, વૈજ્ઞાનિક કૌશલ્ય છે. લાગ્રાન્જના શબ્દોમાં "માનવીય માનસની મહાનતમ નીપજ" છે. ભારતમાં જન્મેલ ખગોળ-ભૌતિકવિજ્ઞાની અને નોબેલ ઇનામ વિજેતા એસ. ચંદ્રશેખરે **'પ્રિન્સિપિયા'** પર વિવરણ લખવામાં દસ વર્ષ ગાળ્યાં હતાં. તેનું પુસ્તક **Principia for the Common Reader** ન્યૂટનની પદ્ધતિઓમાં રહેલ સુંદરતા, સ્પષ્ટતા અને શ્વાસ થંભાવતી કરકસર પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરે છે.

(2) એક નિયમિત ઘનતા ધરાવતી પોલી ગોળાકાર કવચને લીધે તેની અંદર રહેલા બિંદુવત્ દળ પર લાગતું ગુરુત્વબળ શૂન્ય છે. વળી પાછા, ગુણાત્મક રીતે આપણે આ પરિણામ સમજી શકીએ. ગોળાકાર કવચના વિવિધ વિસ્તારો તે બિંદુવત્ દળને જુદી જુદી દિશાઓમાં આકર્ષે છે. આ બળો સંપૂર્ણ નાબૂદ થાય છે.

8.4 ગુરુત્વાકર્ષી અચળાંક (THE GRAVITATIONAL CONSTANT)

ગુરુત્વાકર્ષણના સાર્વત્રિક નિયમમાં આવતો ગુરુત્વાકર્ષી અચળાંક પ્રયોગ પરથી નક્કી કરી શકાય છે અને આવું સૌપ્રથમ ઇંગ્લિશ વિજ્ઞાની હેન્રી કેવેન્ડિશે 1798માં કર્યું હતું. તેણે વાપરેલા સાધનને સંજ્ઞાત્મક રીતે આકૃતિ 8.6માં દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 8.6 કેવેન્ડિશના પ્રયોગની સંજ્ઞાત્મક આકૃતિ. S_1 અને S_2 બે મોટા ગોળાઓ છે જેમને A અને B દળો (છાયાંકિત દર્શાવેલ છે)ની એક-એક બાજુએ દર્શાવેલ છે. જ્યારે મોટા ગોળાઓને દળોની બીજી બાજુ (ત્રુટક વર્તુળથી દર્શાવેલ) લઈ જવામાં આવે છે ત્યારે ટૉર્કની દિશા ઉલટાવાથી સળિયો AB થોડું ભ્રમણ કરે છે. ભ્રમણ કોણ પ્રયોગ પરથી માપી શકાય છે.

AB સળિયાના છેડાઓ પર બે નાના સીસાના ગોળા લગાડેલા છે. સળિયાને એક દૃઢ આધાર પરથી પાતળા તાર વડે લટકાવેલ છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બે મોટા સીસાના ગોળાઓને નાના ગોળાઓની નજીક પરંતુ સામસામી બાજુએ લાવવામાં આવે છે. મોટા ગોળાઓ નાના ગોળાઓને સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બળો વડે આકર્ષે છે. સળિયા પર કોઈ ચોખ્ખું (પરિણામી) બળ લાગતું નથી પણ F અને સળિયાની લંબાઈના ગુણનફળ જેટલું ટૉર્ક લાગે છે, જ્યાં F એ મોટા ગોળા અને તેની નજીકના નાના ગોળા વચ્ચે લાગતું આકર્ષણ બળ છે. આ ટૉર્કને લીધે લટકાવેલ તારમાં ત્યાં સુધી વળ ચઢે છે કે જ્યારે તારમાનું પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક, ગુરુત્વાકર્ષી ટૉર્ક જેટલું બને. જો લટકાવેલ તારમાં વળ ચઢ્યાનો કોણ θ હોય તો પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક θ ના સમપ્રમાણમાં અને $\tau\theta$ જેટલું હોય છે. જ્યાં, τ એ વળના એકમ કોણ દીઠ ઉદ્ભવતું પુનઃસ્થાપક બળ યુગ્મ (Couple) છે. τ ને બીજા સ્વતંત્ર પ્રયોગથી માપી શકાય છે. દા.ત., જ્ઞાત મૂલ્યનું ટૉર્ક લગાડી વળ ચઢ્યાનો કોણ માપીને. ગોળાઓ વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વ બળ જાણે તેમનાં દળો તેમનાં કેન્દ્રો પર કેન્દ્રિત થયેલાં હોય ત્યારે લાગતા બળ જેટલું જ છે. આમ જો મોટા અને તેની નજીકના નાના ગોળાનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર d હોય, M અને m તેમનાં દળ હોય તો મોટા ગોળા અને તેની નજીકના નાના ગોળા વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વબળ

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \qquad (8.6)$$

જેટલું છે. જો સળિયા ABની લંબાઈ L હોય તો F વડે ઉદ્ભવતું ટૉર્ક, F અને Lના ગુણનફળ જેટલું છે. સંતુલન સ્થિતિમાં આ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક જેટલું હોય છે અને તેથી

$$G\frac{Mm}{d^2}L = \tau\,\theta \qquad (8.7)$$

આમ, θ ના અવલોકન પરથી આ સમીકરણ વડે Gની ગણતરી કરી શકાય છે.

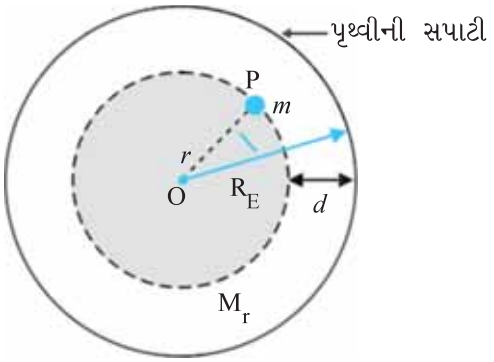
કેવેન્ડિશના સમયથી Gના માપનમાં સુધારા થતા ગયા છે અને હાલમાં સ્વીકૃત મૂલ્ય

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \text{ છે.} \qquad (8.8)$$

8.5 પૃથ્વીના ગુરુત્વથી ઉદ્ભવતો પ્રવેગ (ACCELERATION DUE TO GRAVITY OF THE EARTH)

પૃથ્વીને એક ગોળા તરીકે કલ્પી લઈને તેને ખૂબ મોટી સંખ્યાના સમકેન્દ્રિય ગોળાકાર કવચોનો બનેલો ગણી શકીએ કે, જેમાં સૌથી નાની કવચ કેન્દ્ર પર અને સૌથી મોટી કવચ સપાટી પર હોય. પૃથ્વીની બહાર રહેલું બિંદુ સ્વાભાવિક રીતે જ બધી કવચોની બહાર છે. આમ બધી કવચો બહારના બિંદુએ એટલું ગુરુત્વબળ લગાડે કે જાણે તેમનાં દળો તેમનાં સામાન્ય કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલાં હોય ત્યારે મળે. પરિચ્છેદ 8.3માં જણાવેલ પરિણામ મુજબ બધી કવચોનું સંયુક્ત કુલ દળ પૃથ્વીના દળ જેટલું જ છે. આથી, પૃથ્વીની બહારના બિંદુએ ગુરુત્વબળ, જાણે પૃથ્વીનું સમગ્ર દળ તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય ત્યારે મળતા બળ જેટલું હોય.

પૃથ્વીની અંદરના બિંદુ માટે પરિસ્થિતિ જુદી છે. આ બાબત આકૃતિ 8.7માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 8.7 M_E દળ અને R_E ત્રિજ્યા ધરાવતી પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈ પર આવેલ ખીણમાં દળ m રહેલ છે. આપણે પૃથ્વીને ગોળીય સંમિતિ ધરાવતી ગણી છે.

વળી પાછા, પૃથ્વીને અગાઉની જેમ સમકેન્દ્રિય કવચોની બનેલી ગણો. તેના કેન્દ્રથી r અંતરે એક બિંદુવત્ દળ m રહેલ છે. P બિંદુ r ત્રિજ્યાના ગોળાની બહાર છે. r કરતાં વધુ ત્રિજ્યા ધરાવતી કવચો માટે P બિંદુ અંદર રહેલું છે. આથી છેલ્લા પરિચ્છેદમાં જણાવેલ પરિણામ મુજબ, P આગળ રાખેલ m દળ પર તેઓ કોઈ બળ લગાડતા નથી. ત્રિજ્યા $\leq r$ ધરાવતી કવચો r ત્રિજ્યાનો ગોળો રચે છે, જેને માટે P બિંદુ સપાટી પર રહેલું છે. આ નાનો ગોળો P આગળ રાખેલા દળ m પર જાણે તેનું દળ M_r કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય તે રીતે વર્તીને બળ લગાડે છે. આમ P આગળના દળ m પર લાગતા બળનું માન

$$F = \frac{Gm(M_r)}{r^2} \text{ છે.} \qquad (8.9)$$

આપણે સમગ્ર પૃથ્વીને નિયમિત ઘનતા ધરાવતી ધારી છે તેથી તેનું દળ $M_E = \frac{4\pi}{3} R_E^3 \rho$, જ્યાં M_E પૃથ્વીનું દળ, R_E તેની ત્રિજ્યા અને ρ ઘનતા છે. બીજી બાજુ r ત્રિજ્યાના M_r ગોળાનું દળ, $\frac{4\pi}{3}\rho r^3$ છે અને તેથી

$$F = Gm\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\frac{r^3}{r^2} = Gm\left(\frac{M_E}{R_E^3}\right)\frac{r^3}{r^2}$$

$$= \frac{GmM_E}{R_E^3} r \qquad (8.10)$$

જો દળ m પૃથ્વીની સપાટી પર રહેલ હોય, તો $r = R_E$ અને તેના પરનું ગુરુત્વબળ, સમીકરણ (8.10) પરથી

$$F = G\frac{M_E m}{R_E^2} \qquad (8.11)$$

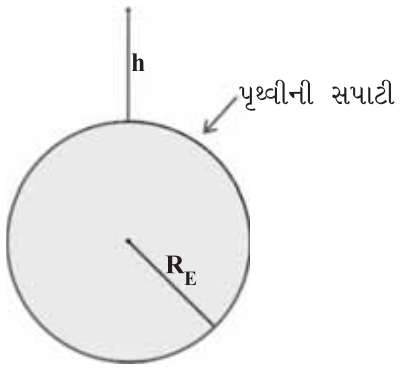
m દળ વડે અનુભવાતા પ્રવેગને સામાન્યતઃ સંજ્ઞા g વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને તે F સાથે ન્યૂટનના બીજા નિયમ $F = mg$ દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે. આમ

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_E}{R_E^2} \qquad (8.12)$$

પ્રવેગ g સહેલાઈથી માપી શકાય તેવો છે. R_E એ જ્ઞાત રાશિ છે. કેવેન્ડિશના પ્રયોગ (અથવા બીજી રીતે) Gની માપણી કરીને g અને R_Eની જાણકારી પરથી સમીકરણ (8.12) પરથી M_Eનો અંદાજ મેળવી શકાય છે. આ કારણથી કેવેન્ડિશ અંગે એક પ્રખ્યાત કથન છે : ''કેવેન્ડિશે પૃથ્વીનું વજન કર્યું''.

8.6 પૃથ્વીની સપાટીથી નીચે અને ઉપર ગુરુત્વપ્રવેગ (ACCELERATION DUE TO GRAVITY BELOW AND ABOVE THE SURFACE OF EARTH)

આકૃતિ 8.8(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ રહેલા એક બિંદુવત્ દળ mનો વિચાર કરો. પૃથ્વીની ત્રિજ્યા R_E વડે દર્શાવેલ છે.



(a)

આકૃતિ 8.8(a) પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ g

આ બિંદુ પૃથ્વીની બહાર હોવાથી પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેનું અંતર $(R_E + h)$ છે. આ બિંદુવત્ દળ m પર લાગતું બળ $F(h)$ વડે દર્શાવીએ, તો સમીકરણ (8.5) પરથી

$$F(h) = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2} \qquad (8.13)$$

આ બિંદુવત્ દળ વડે અનુભવાતો પ્રવેગ $F(h)/m \equiv g(h)$ છે. આમ

$$g(h) = \frac{F(h)}{m} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \qquad (8.14)$$

સ્પષ્ટ રીતે, આ મૂલ્ય gના પૃથ્વીની સપાટી પરના મૂલ્ય $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$ કરતાં ઓછું છે. $h << R_E$ માટે આપણે સમીકરણ (8.14)નું વિસ્તરણ કરી શકીએ.

$$g(h) = \frac{GM_E}{R_E^2(1+h/R_E)^2} = g(1 + h / R_E)^{-2}$$

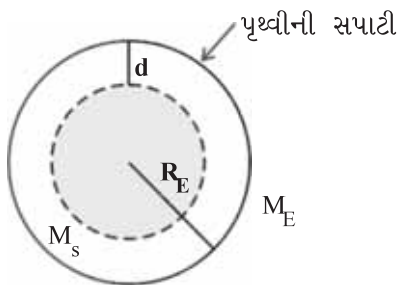
$\frac{h}{R_E} << 1$ માટે, દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$$g(h) \cong g\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \qquad (8.15)$$

સમીકરણ 8.15 જણાવે છે કે સપાટીથી ઉપર નાની ઊંચાઈ h માટે g એ $(1 - 2h / R_E)$ના ગુણાંક મુજબ ઘટે છે.

હવે, પૃથ્વીની સપાટીથી નીચે d ઊંડાઈએ એક બિંદુવત્ દળ mનો વિચાર કરો (આકૃતિ 8.8 (b)), આથી પૃથ્વીના કેન્દ્રથી તેનું અંતર, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ $(R_E - d)$ છે. પૃથ્વીને $(R_E - d)$ ત્રિજ્યાના નાના ગોળા અને d જાડાઈની ગોળાકાર કવચની બનેલી ગણી શકાય. અગાઉના પરિચ્છેદમાં જણાવેલ પરિણામ મુજબ d જાડાઈની બહારની કવચને લીધે m પર લાગતું બળ શૂન્ય છે. જ્યાં સુધી $(R_E - d)$ ત્રિજ્યાના નાના ગોળાને સંબંધ છે ત્યાં સુધી બિંદુવત્ દળ તેની બહાર છે અને અગાઉ જણાવેલ પરિણામ મુજબ આ નાના ગોળા વડે લાગતું બળ જાણે કે તેનું બધું દળ કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય તે પરથી મળે. જો નાના ગોળાનું દળ M_s હોય તો ગોળાનું દળ તેની ત્રિજ્યાના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોવાથી

$$M_s / M_E = (R_E - d)^3 / R_E^3 \qquad (8.16)$$



(b)

આકૃતિ 8.8(*b*) d ઊંડાઈએ g. આ કિસ્સામાં ફક્ત $(R_E - d)$ ત્રિજ્યાનો નાનો ગોળો gમાં ફાળો આપે છે.

આમ બિંદુવત્ દળ m પર લાગતું બળ

$$F(d) = G\, M_s\, m / (R_E - d)^2 \qquad (8.17)$$

ઉપરના સમીકરણમાં M_sનું મૂલ્ય અવેજ કરતાં,

$$F(d) = G\, M_E\, m\, (R_E - d) / R_E^3 \qquad (8.18)$$

આથી d ઊંડાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$g(d) = \frac{F(d)}{m}$ પરથી

$$g(d) = \frac{F(d)}{m} = \left(\frac{GM_E}{R_E^3}\right)(R_E - d)$$

$$= g\frac{R_E - d}{R_E} = g(1 - d / R_E) \qquad (8.19)$$

આમ, આપણે પૃથ્વીની સપાટીથી જેમ નીચે ને નીચે જઈએ તેમ ગુરુત્વપ્રવેગ $(1 - d / R_E)$ના ગુણાંક મુજબ ઘટે છે. પૃથ્વીના ગુરુત્વને લીધે મળતા પ્રવેગ અંગે નોંધનીય બાબત એ છે કે તેની સપાટી પર મહત્તમ છે અને તમે ઉપર કે નીચે તરફ જાઓ તેમ ઘટતો જાય છે.

8.7 ગુરુત્વસ્થિતિ ઊર્જા (GRAVITATIONAL POTENTIAL ENERGY)

અગાઉ આપણે સ્થિતિઊર્જાના ખ્યાલની, આપેલા સ્થાને પદાર્થમાં સંગ્રહ પામેલી ઊર્જા તરીકે ચર્ચા કરી છે. જો પદાર્થનું સ્થાન તેનાં પર બળો લાગવાથી બદલાતું હોય તો તેની સ્થિતિઊર્જામાં થતો ફેરફાર એ બળ વડે પદાર્થ પર થયેલા કાર્ય જેટલો જ હોય. આપણે અગાઉ ચર્ચા કરી છે કે જે બળો વડે કરવામાં આવતું કાર્ય પથ (માર્ગ) પર આધારિત ન હોય તેવાં બળોને સંરક્ષી બળો કહે છે.

ગુરુત્વાકર્ષણ બળ એ સંરક્ષી બળ છે અને આ બળ દ્વારા ઉદ્ભવતી પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા આપણે ગણી શકીએ, જેને ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા કહે છે. પૃથ્વીની સપાટીની નજીક સપાટીથી પૃથ્વીથી ત્રિજ્યા કરતાં ઘણાં નાનાં અંતરોએ રહેલાં બિંદુઓનો વિચાર કરો. આવા કિસ્સાઓમાં ગુરુત્વ બળ વ્યવહારિક હેતુઓ પૂરતું mg જેટલું લગભગ અચળ અને પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ લાગતું હોય છે. જો આપણે પૃથ્વીની સપાટીથી h_1 ઊંચાઈએ એક બિંદુ અને તેનાથી ઊર્ધ્વદિશામાં ઉપર બીજું એક બિંદુ પૃથ્વીની સપાટીથી h_2 ઊંચાઈએ વિચારીએ તો, m દળના કણને પ્રથમથી બીજા બિંદુએ લઈ જવામાં થતું કાર્ય W_{12} વડે દર્શાવતાં

$$W_{12} = \text{બળ} \times \text{સ્થાનાંતર}$$

$$= mg(h_2 - h_1) \qquad (8.20)$$

જો આપણે સપાટીથી h ઊંચાઈએ રહેલા બિંદુ સાથે સ્થિતિઊર્જા $W(h)$ સાંકળીએ કે જેથી

$$W(h) = mgh + W_0 \quad (8.21)$$

(જ્યાં W_0 = અચળ)

તો એ સ્પષ્ટ છે કે

$$W_{12} = W(h_2) - W(h_1) \quad (8.22)$$

પદાર્થને ખસેડવા માટે કરાતું કાર્ય તેનાં અંતિમ અને પ્રારંભિક સ્થાનો આગળની સ્થિતિઊર્જાના તફાવત જેટલું જ હોય છે. સમીકરણ (8.22)માં અચળ પદ W_0 નાબૂદ થાય છે તે જુઓ. આ અંતિમ સમીકરણમાં $h = 0$ મૂકતાં આપણને $W(h = 0) = W_0$ મળે. $h = 0$ એટલે પૃથ્વીની સપાટી પરનાં બિંદુઓ. આમ, W_0 એ પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિતિઊર્જા છે.

જો આપણે પૃથ્વીની સપાટીથી યાદચ્છિક અંતરે આવેલાં બિંદુઓ વિચારીએ તો હમણાં જ મળેલું પરિણામ યથાર્થ (valid) નથી કારણ કે ગુરુત્વબળ mg અચળ છે એવી ધારણા યથાર્થ નથી. આમ છતાં આપણી ચર્ચા પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે પૃથ્વીની સપાટીની બહારના બિંદુએ રહેલ કણ પર, પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ લાગતું બળ

$$F = \frac{G M_E m}{r^2} \quad (8.23)$$

છે, જ્યાં M_E પૃથ્વીનું દળ, m = કણનું દળ અને r = તેનું પૃથ્વીના કેન્દ્રથી અંતર. હવે જો આપણે કણને $r = r_1$ થી $r = r_2$ $(r_1 > r_2)$ સુધી ઊર્ધ્વ પથ પર લઈ જવા માટે કરવું પડતું કાર્ય ગણીએ તો સમીકરણ (8.20)ને બદલે,

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{G M_E}{r^2} dr \text{ લખાય.}$$

$$W_{12} = -G\, M_E\, m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \quad (8.24)$$

સમીકરણ (8.21)ની જગ્યાએ, હવે આપણે r અંતરે સ્થિતિઊર્જા $W(r)$ સાંકળી શકીએ, જ્યાં

$$W(r) = -\frac{G M_E m}{r} + W_1 \quad (8.25)$$

જે $r > R$ માટે યથાર્થ રહે છે.

આમ, ફરીથી આપણને $W_{12} = W(r_2) - W(r_1)$ મળે. સમીકરણ 8.25માં r = અનંત મૂકતાં, $W(r = \text{અનંત}) = W_1$ મળે. આમ, W_1 એ અનંત અંતરે સ્થિતિઊર્જા છે. સમીકરણ (8.22) અને (8.24) પરથી આપણે નોંધવું જોઈએ કે સ્થિતિઊર્જાના માત્ર તફાવતને જ કંઈક નિશ્ચિત અર્થ છે. રૂઢિગત રીતે W_1 ને શૂન્ય લેવામાં આવે છે. આથી, આપેલા બિંદુએ સ્થિતિઊર્જા એ કણને અનંત અંતરેથી ખસેડીને તે બિંદુને લાવવામાં કરવું પડતું કાર્ય છે.

આપણે આપેલા બિંદુએ કણ પર પૃથ્વીના ગુરુત્વબળને લીધે ઉદ્ભવતી સ્થિતિઊર્જા ગણી છે, તે કણના દળના સમપ્રમાણમાં છે. પૃથ્વીના ગુરુત્વબળને લીધે આપેલા બિંદુએ ગુરુત્વ સ્થિતિમાનને તે બિંદુએ એકમ દળના કણની સ્થિતિઊર્જા તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. અગાઉની ચર્ચા પરથી, આપણે જાણી શકીએ કે m_1 અને m_2 દળના બે કણો વચ્ચે અંતર r હોય, તો તેમની સાથે સંકળાયેલ સ્થિતિઊર્જા

$$V = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$ (જો $r \to \infty$ માટે $V = 0$ પસંદ કરીએ તો)

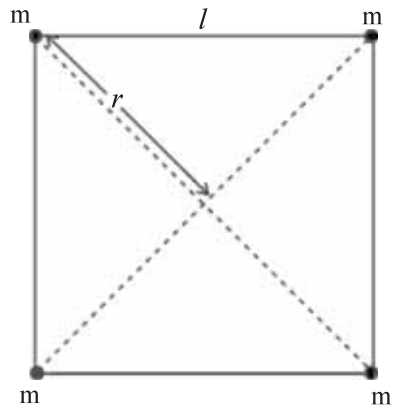
પરથી મળે છે. એ નોંધવું જોઈએ કે કણોના અલગ કરેલા તંત્રની કુલ સ્થિતિઊર્જા (ઉપરના સમીકરણ પરથી મળતી), તેના ઘટક કણોની દરેક શક્ય જોડ માટેની ઊર્જાઓના સરવાળા જેટલી હોય છે. આ સંપાતપણાના સિદ્ધાંતના ઉપયોગનું ઉદાહરણ છે.

ઉદાહરણ 8.3 l લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ પર મૂકેલા ચાર કણના તંત્રની સ્થિતિઊર્જા શોધો. ચોરસના કેન્દ્ર પર સ્થિતિમાન શોધો.

ઉકેલ l લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા ચોરસના દરેક શિરોબિંદુ પર m દળ વિચારો. (જુઓ આકૃતિ 8.9.) આપણને l અંતર ધરાવતી દળની ચાર જોડ અને $\sqrt{2}\,l$ અંતર ધરાવતી દળની બે વિકર્ણ જોડ મળે છે.

તેથી,

$$W(r) = -4\frac{G m^2}{l} - 2\frac{G m^2}{\sqrt{2}\, l}$$



આકૃતિ 8.9

$$= -\frac{2Gm^2}{l}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5.41\frac{Gm^2}{l}$$

ચોરસના કેન્દ્ર આગળ ($r = \sqrt{2}\,l/2$) ગુરુત્વીય સ્થિતિમાન

$$U(r) = -4\sqrt{2}\,\frac{Gm}{l}$$ ◀

8.8 નિષ્ક્રમણ ઝડપ (ESCAPE SPEED)

જો એક પથ્થરને હાથથી ઉપર ફેંકવામાં આવે તો આપણે જોઈએ છીએ કે તે છેવટે તો પાછો પૃથ્વી પર પડે છે. અલબત્ત, આપણે યંત્રનો ઉપયોગ કરીને પદાર્થને વધુ ને વધુ પ્રારંભિક ઝડપે ઉપર ફેંકી શકીએ અને આવી વધુ ને વધુ ઝડપ સાથે પદાર્થ વધુ ને વધુ ઊંચાઈ સર કરી શકે. આ પરથી આપણા મનમાં એક જે સ્વાભાવિક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે તે આ છે : શું આપણે પદાર્થને એટલી પ્રારંભિક ઝડપથી ફેંકી શકીએ કે જેથી તે પાછો પૃથ્વી પર પડે જ નહિ ?

ઊર્જા-સંરક્ષણનો નિયમ આ પ્રશ્નનો ઉત્તર મેળવવામાં આપણને મદદરૂપ થાય છે. ધારો કે પદાર્થ અનંત અંતરે પહોંચ્યો અને ત્યાં તેની ઝડપ V_f છે. પદાર્થની ઊર્જા એ સ્થિતિઊર્જા અને ગતિઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે. અગાઉની જેમજ W_1 અનંત અંતરે પદાર્થની સ્થિતિઊર્જા દર્શાવે છે. આમ, આ પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની કુલ ઊર્જા

$$E(\infty) = W_1 + \frac{mV_f^2}{2} \qquad (8.26)$$

જો આ પદાર્થને પ્રારંભિક ઝડપ V_i વડે, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $(h + R_E)$ અંતરે આવેલા બિંદુએથી ફેંકવામાં આવ્યો હોય, (R_E = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા) તો પ્રારંભમાં તેની ઊર્જા

$$E(h + R_E) = \frac{1}{2}mV_i^2 - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} + W_1 \qquad (8.27)$$

ઊર્જા-સંરક્ષણના સિદ્ધાંત મુજબ સમીકરણો (8.26) અને (8.27) સમાન થવા જોઈએ. તેથી,

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} = \frac{mV_f^2}{2} \qquad (8.28)$$

સમીકરણની જમણી બાજુ એ ધન રાશિ છે અને તેનું લઘુતમ મૂલ્ય શૂન્ય છે. આથી ડાબી બાજુ પણ તેમજ થવી જોઈએ. આમ, જ્યાં સુધી V_iનું મૂલ્ય નીચેની શરતનું પાલન કરે ત્યાં સુધી જ પદાર્થ અનંત અંતરે પહોંચી શકે :

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} \geq 0 \qquad (8.29)$$

V_iના લઘુતમ મૂલ્ય માટે સમીકરણ (8.29)ની ડાબી બાજુ શૂન્ય બરાબર થવી જોઈએ. આમ, કોઈ પદાર્થને અનંત અંતરે પહોંચવા (એટલે કે પૃથ્વીથી મુક્ત થવા) માટેની જરૂરી ઝડપ $(V_i)_{min}$ લખીએ તો,

$$\frac{1}{2}m(V_i^2)_{min} = \frac{GmM_E}{(h+R_E)} \qquad (8.30)$$

જો પદાર્થને પૃથ્વીની સપાટી પરથી ફેંકવામાં આવેલો હોય, તો $h = 0$ અને તેથી

$$(V_i)_{min} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \qquad (8.31)$$

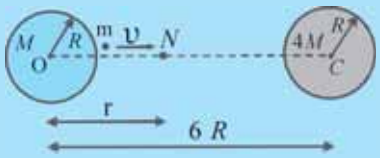
$g = GM_E / R_E^2$, સંબંધનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$(V_i)_{min} = \sqrt{2gR_E} \qquad (8.32)$$

મળે. g અને R_Eનાં મૂલ્યોનો ઉપયોગ કરતાં $(V_i)_{min} \approx 11.2$ km/s મળે છે. આને નિષ્ક્રમણ ઝડપ કહે છે. તેને કેટલીકવાર નિષ્ક્રમણ વેગ પણ કહે છે.

આ સમીકરણ (8.32) ચંદ્રની સપાટી પરથી ફેંકેલા પદાર્થ માટે પણ લાગુ પડે છે, જ્યાં g ચંદ્રની સપાટી પરનો ગુરુત્વપ્રવેગ, R_Eને સ્થાને ચંદ્રની ત્રિજ્યા r મુકાય. આ બંને મૂલ્યો પૃથ્વી માટેનાં મૂલ્યો કરતાં નાનાં છે અને ચંદ્ર માટે નિષ્ક્રમણ ઝડપ 2.3 km/s મળે છે, જે પૃથ્વી માટેના મૂલ્યના લગભગ પાંચમા ભાગનું છે. આ કારણથી જ ચંદ્રને વાતાવરણ નથી. વાયુના અણુઓ ચંદ્રની સપાટી પર રચાય તોપણ ચંદ્રના ગુરુત્વાકર્ષણમાંથી તેઓ છટકી જાય છે.

▶ ***ઉદાહરણ 8.4*** આકૃતિ 8.10માં દર્શાવ્યા મુજબ R ત્રિજ્યાના બે નિયમિત ઘન ગોળાઓનાં દળ M અને $4M$ છે અને તેમનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર $6R$ છે. બંને ગોળાઓને સ્થિર જકડી રાખેલ છે. M દળના ગોળાની સપાટી પરથી m દળનો એક પદાર્થ સીધો બીજા ગોળાના કેન્દ્ર તરફ ફેંકવામાં આવે છે. આ પદાર્થ બીજા ગોળાની સપાટી પર પહોંચે તે માટે જરૂરી લઘુતમ ઝડપનું સૂત્ર મેળવો.



આકૃતિ 8.10

ઉકેલ અહીં, ફેંકાયેલા પદાર્થ પર બે ગોળાઓને લીધે, બે ગુરુત્વબળો પરસ્પર વિરુદ્ધ લાગે છે. આ બે બળો જે બિંદુએ

એકબીજાને બરાબર નાબૂદ કરે તે બિંદુ N (જુઓ આકૃતિ 8.10)ને તટસ્થ બિંદુ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં છે. જો ON = r હોય તો,

$$\frac{G\,M\,m}{r^2} = \frac{4\,G\,M\,m}{(6R-r)^2}$$

$$(6R - r)^2 = 4r^2$$

$$6R - r = \pm 2r$$

$$r = 2R \text{ અથવા } -6R$$

$r = -6R$ તટસ્થબિંદુની આ ઉદાહરણમાં આપણે ચિંતા કરવાની નથી. આમ, ON = r = 2R આથી પદાર્થને N બિંદુ સુધી પહોંચવા માટે જરૂરી હોય તેટલી ઝડપથી ફેંકવાનું પૂરતું છે. ત્યાર બાદ $4M$ વડે લાગતું ગુરુત્વબળ મોટું હોવાથી પદાર્થને તેની સપાટી પર ખેંચી જશે.

Mની સપાટી પર યાંત્રિકઊર્જા,

$$E_i = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{G\,M\,m}{R} - \frac{4\,G\,M\,m}{5R}$$

તટસ્થબિંદુએ ઝડપ શૂન્ય બને છે અને N આગળ યાંત્રિકઊર્જા માત્ર સ્થિતિઊર્જા છે.

$$E_N = -\frac{G\,M\,m}{2R} - \frac{4\,G\,M\,m}{4R}$$

યાંત્રિકઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ પરથી,

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = -\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R}$$

અથવા

$$v^2 = \frac{2GM}{R}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$v = \left(\frac{3GM}{5R}\right)^{1/2}$$

◀

એક નોંધપાત્ર મુદ્દો એ છે કે ફેંકેલા પદાર્થની ઝડપ N બિંદુએ શૂન્ય છે પરંતુ ભારે ગોળા 4 M ને અથડાય ત્યારે શૂન્ય નથી. આ ઝડપની ગણતરી વિદ્યાર્થી પર સ્વાધ્યાય તરીકે છોડેલ છે.

8.9 પૃથ્વીના ઉપગ્રહો (EARTH SATELLITES)

પૃથ્વીના ઉપગ્રહો એ પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરતા પદાર્થો છે. તેમની ગતિ, સૂર્યની આસપાસ ગ્રહોની ગતિ જેવી જ છે અને તેથી ગ્રહોની ગતિના કેપ્લરના નિયમો તેમને પણ સમાન રીતે લાગુ પડે છે. વિશેષ કરીને પૃથ્વીની આસપાસની તેમની કક્ષાઓ વર્તુળાકાર અથવા દીર્ઘવૃત્તિય હોય છે. ચંદ્ર એ પૃથ્વીનો એકમાત્ર કુદરતી ઉપગ્રહ છે. તેની કક્ષા લગભગ વર્તુળાકાર અને આવર્તકાળ લગભગ 27.3 દિવસ છે જે આશરે ચંદ્રની પોતાની અક્ષની આસપાસના તેના ભ્રમણના આવર્તકાળ જેટલો છે. 1957થી ટેક્નોલૉજીમાંના વિકાસને લીધે, ભારત સહિત ઘણા દેશોએ દૂરસંચાર, જીઓફિઝિક્સ અને હવામાનશાસ્ત્ર જેવાં ક્ષેત્રોમાંના વ્યાવહારિક ઉપયોગ માટે કૃત્રિમ ઉપગ્રહો પૃથ્વીની ફરતે તરતા મૂક્યા છે.

આપણે પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $(R_E + h)$ અંતરે આવેલી વર્તુળકક્ષામાંના ઉપગ્રહનો વિચાર કરીએ, જ્યાં R_E = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા. જો m એ ઉપગ્રહનું દળ અને V તેની ઝડપ હોય, તો કક્ષા માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ

$$\text{F(કેન્દ્રગામી)} = \frac{mV^2}{(R_E + h)} \qquad (8.33)$$

છે અને તે પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ હોવું જોઈએ. આ કેન્દ્રગામી બળ ગુરુત્વબળ દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે જે

$$\text{F(ગુરુત્વાકર્ષણ)} = \frac{G\,m\,M_E}{(R_E + h)^2} \qquad (8.32)$$

છે, જ્યાં M_E એ પૃથ્વીનું દળ છે. સમીકરણો (8.33) અને (8.34)ની જમણી બાજુઓને સરખાવતાં અને mનો છેદ ઉડાડતાં,

$$V^2 = \frac{G\,M_E}{(R_E + h)} \qquad (8.35)$$

આમ, જેમ h વધે છે તેમ V ઘટે છે. આ સમીકરણ પરથી $h = 0$ માટે ઝડપ Vનું મૂલ્ય

$$V^2(h = 0) = GM / R_E = gR_E \qquad (8.36)$$

પરથી મળે, જ્યાં આપણે $g = GM / R_E^2$ સંબંધનો ઉપયોગ કર્યો છે. દરેક કક્ષામાં ઉપગ્રહ $2\pi(R_E + h)$ અંતર V ઝડપથી કાપે છે. આથી તેનો આવર્તકાળ T

$$T = \frac{2\pi(R_E + h)}{V} = \frac{2\pi(R_E + h)^{3/2}}{\sqrt{G\,M_E}} \qquad (8.37)$$

છે. સમીકરણ (8.35)માંથી Vનું મૂલ્ય અવેજ કરેલ છે. સમીકરણની બંને બાજુનો વર્ગ કરતાં

$$T^2 = k(R_E + h)^3 \text{ (જ્યાં } k = 4\pi^2/GM_E) \qquad (8.38)$$

જે પૃથ્વીની આસપાસના ઉપગ્રહને લાગુ પાડેલ કેપ્લરનો આવર્તકાળનો નિયમ છે. પૃથ્વીની સપાટીની ખૂબ નજીકના ઉપગ્રહ માટે સમીકરણ (8.38)માં R_Eની સરખામણીએ hને અવગણી શકાય છે. આથી આવા ઉપગ્રહ માટે Tને T_0 કહીએ તો,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{R_E / g} \qquad (8.39)$$

મળે. જો આપણે સંખ્યાત્મક મૂલ્યો $g \approx 9.8$ m s^{-2} અને R_E = 6400 km અવેજ કરીએ તો,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}} \text{ s}$$

મળે. જે લગભગ 85 મિનિટ મળે છે.

ઉદાહરણ 8.5 મંગળ ગ્રહને બે ચંદ્રો છે. ફોબોસ અને ડેલ્મોસ. (i) ફોબોસનો આવર્તકાળ 7 કલાક 39 મિનિટ છે અને કક્ષીય ત્રિજ્યા 9.4×10^3 km છે. મંગળનું દળ શોધો. (ii) પૃથ્વી અને મંગળ સૂર્યની આસપાસ વર્તુળાકારમાં ભ્રમણ કરતા ધારો. પૃથ્વીની કક્ષીય ત્રિજ્યા કરતાં મંગળની કક્ષા 1.52 ગણી છે. મંગળના વર્ષની લંબાઈ કેટલા દિવસની હશે ?

ઉકેલ (i) આપણે સમીકરણ (8.38) લગાડીએ. સૂર્યના દળની જગ્યાએ મંગળનું દળ M_m લઈએ.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_m} R^3$$

$$M_m = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$$

$$= \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times10^{-11}\times(459\times60)^2}$$

$$M_m = \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times(4.59\times6)^2\times10^{-5}}$$

$$= 6.48 \times 10^{23} \text{ kg}$$

(ii) વળી પાછા આપણે કેપ્લરના ત્રીજા નિયમની મદદ લઈએ.

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}$$

જ્યાં R_{MS} એ મંગળ અને સૂર્ય વચ્ચેનું અંતર છે તથા R_{ES} એ પૃથ્વી અને સૂર્ય વચ્ચેનું અંતર છે.

$\therefore\ T_M = (1.52)^{3/2} \times 365$

$= 684$ દિવસ

આપણે નોંધીએ કે બુધ, મંગળ અને પ્લુટો* સિવાયના બધા ગ્રહોની કક્ષા વર્તુળાકારની ખૂબ નજીક જેવી છે. દાખલા તરીકે આપણી પૃથ્વી માટે અર્ધલઘુ અક્ષ અને અર્ધદીર્ઘ અક્ષનો ગુણોત્તર $b/a = 0.99986$ છે.

ઉદાહરણ 8.6 પૃથ્વીનું વજન કરવું : તમને નીચેની વિગતો આપી છે : $g = 9.81$ m s^{-2}, $R_E = 6.37 \times 10^6$ m ચંદ્રનું, અંતર $R = 3.84 \times 10^8$ m અને ચંદ્રના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ 27.3 દિવસ છે. બે જુદી-જુદી રીતોથી પૃથ્વીનું દળ M_E મેળવો.

ઉકેલ સમીકરણ (8.12) પરથી

$$M_E = \frac{gR_E^2}{G}$$

$$= \frac{9.81\times(6.37\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}}$$

$$= 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

ચંદ્ર, પૃથ્વીનો ઉપગ્રહ છે. કેપ્લરના ત્રીજા નિયમ (સમીકરણ 8.38) પરથી

$$T^2 = \frac{4\pi^2R^3}{GM_E}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2R^3}{GT^2}$$

$$= \frac{4\times3.14\times3.14\times(3.84)^3\times10^{24}}{6.67\times10^{-11}\times(27.3\times24\times60\times60)^2}$$

$$= 6.02 \times 10^{24} \text{ kg}$$

બંને રીતોથી લગભગ સરખો જવાબ મળે છે. તેમની વચ્ચેનો તફાવત 1 % કરતાં ઓછો છે.

ઉદાહરણ 8.7 સમીકરણ (8.38)માંના અચળાંક kને દિવસ અને કિલોમીટરમાં દર્શાવો. k = 10^{-13} s^{2}m^{-3} આપેલ છે. ચંદ્ર, પૃથ્વીથી 3.8×10^5 km અંતરે છે. તેના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ કેટલા દિવસ છે તે શોધો.

ઉકેલ અહીં આપેલ છે, k = 10^{-13} s^{2}m^{-3}

$$= 10^{-13}\left[\frac{1}{(24\times60\times60)^2}\text{d}^2\right]\left[\frac{1}{(1/1000)^3\text{km}^3}\right]$$

$$= 1.33 \times 10^{-14}\text{d}^2\ \text{km}^{-3}$$

સમીકરણ (8.38) અને kના આપેલ મૂલ્યનો ઉપયોગ કરતાં, ચંદ્રનો આવર્તકાળ T હોય તો

$T^2 = (1.33 \times 10^{-14})(3.84 \times 10^5)^3$

$T = 27.3$ d

એ નોંધપાત્ર છે કે સમીકરણ (8.38), દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષા માટે પણ સાચું છે. જો આપણે $(R_E + h)$ની જગ્યાએ દીર્ઘવૃત્તની અર્ધદીર્ઘ અક્ષ લઈએ તો તે કિસ્સામાં પૃથ્વી દીર્ઘવૃત્તના એક કેન્દ્ર પર હશે.

8.10 કક્ષીય ગતિમાંના ઉપગ્રહની ઊર્જા (ENERGY OF AN ORBITING SATELLITE)

સમીકરણ (8.35)નો ઉપયોગ કરતાં, વર્તુળકક્ષામાં υ ઝડપથી ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહની ગતિઊર્જા

$$\text{ગતિઊર્જા} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$= \frac{GmM_E}{2(R_E+h)} \qquad (8.40)$$

* પૃ. 182 પર બૉક્સમાં આપેલ માહિતીનો સંદર્ભ લો.

અનંત અંતરે ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય ગણતાં, પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $(R_E + h)$ અંતરે

$$\text{સ્થિતિઊર્જા} = -\frac{G m M_E}{(R_E + h)} \quad (8.41)$$

ગતિઊર્જા ધન છે જ્યારે સ્થિતિઊર્જા ઋણ છે. વળી, ગતિઊર્જા સ્થિતિઊર્જાથી અડધી છે. આથી કુલ ઊર્જા E,

$$E = \text{ગતિઊર્જા} + \text{સ્થિતિઊર્જા} = -\frac{G m M_E}{2(R_E + h)} \quad (8.42)$$

આમ, વર્તુળાકાર કક્ષામાંના ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા ઋણ છે કારણ કે ધન ગતિઊર્જા કરતાં ઋણ સ્થિતિઊર્જા બમણી છે.

જ્યારે ઉપગ્રહની કક્ષા દીર્ઘવૃત્તિય બને છે ત્યારે ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા બિંદુએ બિંદુએ બદલાય છે. વર્તુળાકાર કક્ષાના કિસ્સાની જેમ જ, કુલ ઊર્જા કે જે અચળ છે તે ઋણ છે. આ આપણી અપેક્ષા મુજબનું જ છે કારણ કે આપણે અગાઉ ચર્ચા કરી તેમ જો કુલ ઊર્જા ધન હોય કે શૂન્ય હોય તો પદાર્થ અનંત અંતરે છટકી જાય છે. ઉપગ્રહો હંમેશાં પૃથ્વીથી નિશ્ચિત અંતરે હોય છે અને તેથી તેમની ઊર્જા ધન કે શૂન્ય ન હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 8.8 એક 400 kgનો ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ $2R_E$ ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં છે. તેને બદલીને $4R_E$ ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર કક્ષામાં લઈ જવા માટે કેટલી ઊર્જાની જરૂર પડે ? તેની ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જામાં શું ફેરફાર થાય ?

ઉકેલ પ્રારંભમાં,

$$E_i = -\frac{G M_E m}{4R_E}$$

જ્યારે અંતમાં,

$$E_f = -\frac{G M_E m}{8R_E}$$

કુલ ઊર્જામાં તફાવત, $\Delta E = E_f - E_i$

$$= \frac{G M_E m}{8R_E} = \left(\frac{G M_E}{R_E^2}\right)\frac{m R_E}{8}$$

$$\Delta E = \frac{g m R_E}{8} = \frac{9.81 \times 400 \times 6.37 \times 10^6}{8} = 3.13 \times 10^9 \text{ J}$$

ગતિઊર્જામાં, ΔE જેટલા મૂલ્યનો ઘટાડો થાય છે.

$\Delta K = K_f - K_i = -3.13 \times 10^9$ J

સ્થિતિઊર્જામાં ફેરફાર, કુલ ઊર્જામાંના ફેરફાર કરતાં બમણો થાય છે.

$\Delta V = V_f - V_i = -6.25 \times 10^9$ J ◀

8.11 ભૂસ્થિર અને ધ્રુવીય ઉપગ્રહો (GEOSTATIONARY AND POLAR SATELLITES)

જો આપણે $(R_E + h)$નું મૂલ્ય એવું યોગ્ય ગોઠવીએ કે જેથી સમીકરણ (8.37)માં Tનું મૂલ્ય 24 કલાક મળે તો એક રસપ્રદ ઘટના ઉદ્ભવે છે. જો વર્તુળાકાર કક્ષા પૃથ્વીના વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં હોય તો આવા ઉપગ્રહ માટે આવર્તકાળ, પૃથ્વીના પોતાની ધરીની આસપાસના ભ્રમણના આવર્તકાળ જેટલો થવાથી, પૃથ્વી પરના કોઈ બિંદુએથી જોતાં આવો ઉપગ્રહ સ્થિર દેખાશે. આ હેતુ માટે $(R_E + h)$નું મૂલ્ય R_Eની સરખામણીમાં મોટું મળે છે.

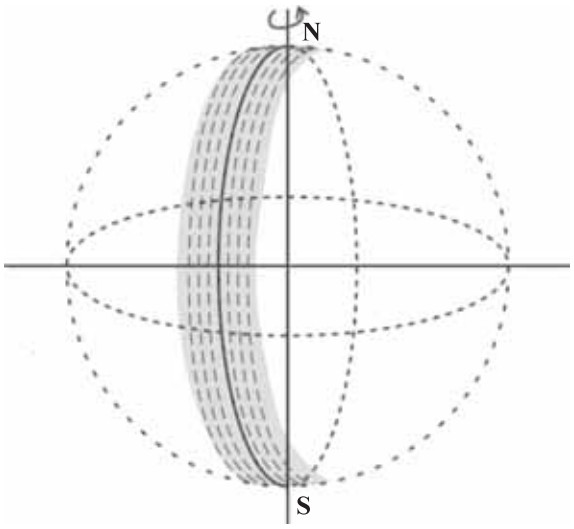
$$(R_E + h) = \left(\frac{T^2 G M_E}{4\pi^2}\right)^{1/3} \quad (8.43)$$

ભારતની અવકાશમાં હરણફાળ

ભારતે 1975માં લઘુ અંતરીય કક્ષકોના ઉપગ્રહ આર્યભટ્ટને તરતો મૂકીને અવકાશયુગમાં પ્રવેશ કર્યો. એ કાર્યક્રમના શરૂઆતના થોડાં વર્ષો લૉંચ વેહિકલ, અગાઉના સોવિયેટ યુનિયન દ્વારા પૂરા પાડવામાં આવ્યા હતા. સ્વદેશી લૉંચ વેહિકલનો ઉપયોગ 1980ના દશકના પ્રારંભમાં રોહિણી શ્રેણીના ઉપગ્રહોને અવકાશમાં મોકલવા માટે થયો હતો. ધ્રુવીય ઉપગ્રહોને અવકાશમાં મોકલવાનો કાર્યક્રમ 1980ના દશકના પાછળના ભાગમાં શરૂ થયો. IRS (Indian Remote Sensing Satellites) શ્રેણીના સંખ્યાબંધ ઉપગ્રહો તરતા મૂકવામાં આવ્યા છે અને આ કાર્યક્રમ ભવિષ્યમાં ચાલુ રહેવાની અપેક્ષા છે. ઉપગ્રહોનો ઉપયોગ મોજણી (Surveying) કરવા, હવામાનની આગાહી કરવા અને અવકાશમાં પ્રયોગો કરવા માટે થાય છે. છેક 1982થી માહિતીની આપ-લે તથા હવામાનની આગાહીના હેતુઓ માટે INSAT (Indian National Satellite) શ્રેણીના ગ્રહોની રચના અને કાર્યાન્વિત કરવામાં આવ્યા છે. INSAT શ્રેણીમાં યુરોપિયન લૉંચ વેહિકલનો ઉપયોગ થયેલ છે. ભારતે તેના ભૂસ્થિર ઉપગ્રહને તરતો મૂકવાની ક્ષમતાનું 2009માં પરીક્ષણ કરી લીધું, જ્યારે તેણે પ્રાયોગિક કમ્યુનિકેશન સેટેલાઇટ (GSAT-1) અવકાશમાં મૂક્યો. 1984માં રાકેશ શર્મા ભારતનો પ્રથમ અવકાશયાત્રી બન્યો. Indian Space Research Organisation (ISRO) એ એક સરકારી સંગઠન તરીકે ઘણાં કેન્દ્રો ચલાવે છે. તેનું મુખ્ય લૉંચ કેન્દ્ર શ્રીહરિકોટા (SHAR) ચેન્નઈથી 100 km ઉત્તરમાં છે. National Remote Sensing Agency (NRSA) હૈદરાબાદની નજીક છે. તેનું અવકાશ સંશોધન કેન્દ્ર, અમદાવાદમાં Physical Research Laboratory (PRL) ખાતે છે.

અને $T = 24$ કલાક માટે hનું મૂલ્ય 35,800 km મળે છે, જે R_E કરતાં ઘણું મોટું છે. પૃથ્વીની આસપાસ વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં વર્તુળાકાર કક્ષામાં $T = 24$ કલાક ધરાવતા ઉપગ્રહોને ભૂસ્થિર ઉપગ્રહો કહે છે. એ સ્પષ્ટ જ છે કે, પૃથ્વી આટલા જ આવર્તકાળથી ભ્રમણ કરતી હોવાથી, પૃથ્વી પરના કોઈ પણ આપેલા બિંદુએથી જોતાં આ ઉપગ્રહ સ્થિર દેખાય છે. પૃથ્વીથી આટલી બધી ઊંચાઈએ સેટેલાઇટને તરતો મૂકવા માટે ખૂબ શક્તિશાળી રૉકેટોની જરૂર પડે છે. ઘણા વ્યાવહારિક ઉપયોગોના લાભને ધ્યાનમાં રાખીને આમ કરવામાં આવ્યું છે.

એ જાણીતું છે કે અમુક નિશ્ચિત આવૃત્તિ કરતાં વધુ આવૃત્તિના વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો આયનોસ્ફિયરથી પરાવર્તિત થતા નથી. રેડિયો બ્રોડકાસ્ટમાં વપરાતા રેડિયોતરંગો જેમની આવૃત્તિ 2 MHz થી 10 MHzના વિસ્તારમાં હોય છે, તેઓ આ ક્રાંતિ આવૃત્તિની નીચેના વિસ્તારમાં છે. તેથી તેઓ આયનોસ્ફિયર વડે પરાવર્તિત થાય છે. આમ, એન્ટેનામાંથી બ્રોડકાસ્ટ થયેલા રેડિયો-તરંગો દૂર આવેલાં બિંદુઓએ પ્રાપ્ત (Receive) કરી શકાય છે, જ્યાં સીધું તરંગ પૃથ્વીની વક્રતાને લીધે નિષ્ફળ જાય છે. ટેલિવિઝન બ્રોડકાસ્ટ અથવા દૂરસંચારનાં બીજાં સ્વરૂપોમાં વપરાતા તરંગોની આવૃત્તિઓ ઘણી ઊંચી હોય છે અને દૃષ્ટિરેખા (Line of Sight) સિવાય બહુ દૂર પ્રાપ્ત કરી શકાતા નથી. જોકે, બ્રોડકાસ્ટિંગ સ્ટેશનની ઉપર સ્થિર દેખાતા ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ આવા સંકેતો (Signals) પ્રાપ્ત કરી શકે છે અને પાછા પૃથ્વી પર મોટા વિસ્તારમાં બ્રોડકાસ્ટ કરી શકે છે. ભારતે અવકાશમાં મોકલેલા ઉપગ્રહોનો INSAT સમૂહ, આવા ભૂસ્થિર ઉપગ્રહોનો સમૂહ છે. જે ભારતમાં દૂરસંચાર માટે વ્યાપક પ્રમાણમાં વપરાય છે.



આકૃતિ 8.11 ધ્રુવીય ઉપગ્રહ. ઉપગ્રહના એક ચક્ર દરમ્યાન પૃથ્વીની સપાટી પરની એક પટ્ટી દૃશ્યમાન છે. ઉપગ્રહના તે પછીના ભ્રમણ દરમિયાન, પૃથ્વીએ પોતાની અક્ષ પર થોડું ભ્રમણ કરેલ છે. આથી તેની બાજુની પટ્ટી હવે દૃશ્યમાન બને છે.

ઉપગ્રહોના અન્ય એક પ્રકારને ધ્રુવીય (Polar) ઉપગ્રહો કહે છે. (આકૃતિ 8.11). આ ઓછી ઊંચાઈ ($h \approx 500$ થી 800 km)ના ઉપગ્રહો છે, પરંતુ તેઓ પૃથ્વીની આસપાસ ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં ધ્રુવોની ફરતે ભ્રમણ કરે છે. પૃથ્વી તેની અક્ષની આસપાસ પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં ભ્રમણ કરે છે. આ ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ લગભગ 100 મિનિટ હોવાથી તે કોઈ પણ ઊંચાઈના બિંદુને (સ્થાનને) દિવસમાં ઘણી વખત પસાર કરે છે. જોકે પૃથ્વીની સપાટી પરથી તેની ઊંચાઈ લગભગ 500-800 km હોવાથી, તેની પર સ્થિર જડેલો કૅમેરા, એક કક્ષામાં (ભ્રમણમાં) પૃથ્વીની નાની પટ્ટીઓ જ જોઈ શકે છે. બાજુની પટ્ટીઓ તે પછીની કક્ષામાં (ભ્રમણમાં) દેખાય છે, જેથી આખા દિવસ દરમિયાન એક પછી બીજી પટ્ટી એમ કરીને સમગ્ર પૃથ્વીને જોઈ શકાય છે. આ ઉપગ્રહો ધ્રુવીય અને વિષુવવૃત્તીય વિસ્તારોને નજીકનાં અંતરોએથી સારા વિભેદન સાથે જોઈ શકે છે. આવા ઉપગ્રહોથી પ્રાપ્ત કરેલી માહિતી દૂર સંવેદન (Remote Sensing), હવામાનશાસ્ત્ર તેમજ પૃથ્વીના પર્યાવરણના અભ્યાસમાં ખૂબ ઉપયોગી છે.

8.12 વજનવિહીનતા (WEIGHTLESSNESS)

પૃથ્વી પદાર્થને જેટલા બળ વડે આકર્ષે છે તે, તે પદાર્થનું વજન છે. જ્યારે આપણે કોઈ સપાટી પર ઊભા રહીએ છીએ ત્યારે આપણે આપણા પોતાના વજનથી સભાન થઈએ છીએ, કારણ કે, સપાટી આપણને સ્થિર રાખવા માટે, આપણા વજન જેટલું જ બળ વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે છે. જ્યારે આપણે કોઈ પદાર્થનું વજન, નિશ્ચિત બિંદુ દા.ત., છતથી લટકાવેલા સ્પ્રિંગકાંટા વડે માપીએ છીએ ત્યારે પણ આ જ સિદ્ધાંત લાગુ પડે છે. જો ગુરુત્વબળની વિરુદ્ધમાં તેના પર બળ લાગતું ન હોય તો પદાર્થ નીચે પડી જાય. સ્પ્રિંગ આવું બળ પદાર્થ પર લગાડે છે. પદાર્થ પર ગુરુત્વીય ખેંચાણને લીધે સ્પ્રિંગ થોડી નીચે ખેંચાય છે અને બદલામાં સ્પ્રિંગ પદાર્થ પર ઊર્ધ્વદિશામાં બળ લગાડે છે.

હવે સ્પ્રિંગનો ઉપરનો છેડો છત સાથે જડિત રહેતો નથી એવું કલ્પો. સ્પ્રિંગના બંને છેડા તેમજ પદાર્થ પણ એક સમાન પ્રવેગ gથી ગતિ કરે છે. સ્પ્રિંગ ખેંચાયેલી નથી અને પદાર્થ કે જે g જેટલા ગુરુત્વપ્રવેગથી નિમ્ન ગતિ કરે છે તેના પર કોઈ ઊર્ધ્વદિશામાં બળ લગાડતી નથી. સ્પ્રિંગ બૅલેન્સમાં નોંધાતું અવલોકન શૂન્ય છે કારણ કે સ્પ્રિંગ જરાય ખેંચાયેલી જ નથી. જો પદાર્થ તરીકે માનવી હોત, તો તે માનવીને પોતાનું વજન લાગત જ નહિ કારણ કે તેના પર ઊર્ધ્વદિશામાં કોઈ બળ નથી. આમ જ્યારે કોઈ પદાર્થ મુક્ત પતન કરતો હોય છે ત્યારે તે વજનવિહીન હોય છે અને આ ઘટનાને સામાન્યતઃ વજનવિહીનતાની ઘટના કહે છે.

પૃથ્વીની આસપાસ ફરતા ઉપગ્રહના દરેકેદરેક ભાગને પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ પ્રવેગ હોય છે. જેનું મૂલ્ય તે સ્થાને પૃથ્વીના ગુરુત્વપ્રવેગ જેટલું જ હોય છે. આમ, ઉપગ્રહમાં, તેની અંદરની દરેક વસ્તુ

મુક્ત પતનની અવસ્થામાં છે. આ બાબત, કોઈ ઊંચાઈ પરથી આપણે પૃથ્વી પર પડતા હોઈએ તેના જેવી જ છે.

આમ, માનવસહિત ઉપગ્રહમાં તેની અંદરના લોકો કોઈ ગુરુત્વાકર્ષણનો અનુભવ કરતા નથી. આપણે માટે ગુરુત્વાકર્ષણ, ઊર્ધ્વદિશાને નક્કી કરે છે અને આમ તેમને માટે કોઈ ઊર્ધ્વ કે સમક્ષિતિજ દિશાઓ હોતી નથી, બધી દિશાઓ સમાન જ છે. ઉપગ્રહમાં તરતા અવકાશયાત્રીના ચિત્રો આ હકીકત દર્શાવે છે.

સારાંશ

1. ન્યૂટનનો સાર્વત્રિક ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ જણાવે છે કે, r અંતરે રહેલા m_1 અને m_2 દળના કોઈ બે કણો વચ્ચે લાગતું ગુરુત્વાકર્ષણ બળનું માન

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ છે.}$$

જ્યાં G એ ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક છે, જેનું મૂલ્ય 6.672×10^{-11} N m^2 kg^{-2} છે.

2. જો આપણે કણ m પર જુદાં જુદાં દળો $M_1, M_2, \ldots M_n$ વડે લાગતું પરિણામી બળ શોધવું હોય, તો આપણે સંપાતપણાના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીએ. ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ પરથી $M_1, M_2, \ldots M_n$ને લીધે લાગતાં બળો ધારો કે $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots \boldsymbol{F}_n$ છે. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ દરેક બળ સ્વતંત્ર રીતે અને બીજા પદાર્થોની અસર વિના લાગે છે. ત્યાર બાદ પરિણામી બળ $\boldsymbol{F}_R$ સદિશ સરવાળા પરથી મેળવાય છે.

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

જ્યાં સંજ્ઞા '$\sum$' એ સરવાળો દર્શાવે છે.

3. ગ્રહોની ગતિ અંગેના કેપ્લરના નિયમો જણાવે છે કે,
   (a) બધા ગ્રહો, જેના એક કેન્દ્રબિંદુએ સૂર્ય હોય તેવી દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે.
   (b) સૂર્યથી ગ્રહ તરફ દોરેલો ત્રિજ્યા સદિશ સમાન સમયગાળામાં સમાન ક્ષેત્રફળ આંતરે છે. આ બાબત, ગ્રહ પર લાગતું ગુરુત્વબળ એ કેન્દ્રિય બળ છે તે હકીકત પરથી મળે છે, અને તેથી કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે.
   (c) ગ્રહના કક્ષીય આવર્તકાળનો વર્ગ, ગ્રહની દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષાની અર્ધદીર્ઘ અક્ષના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

   સૂર્યની આસપાસ ગ્રહની વર્તુળકક્ષાનો આવર્તકાળ T અને ત્રિજ્યા R વચ્ચે

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G M_s}\right) R^3$$

   સંબંધ છે, જ્યાં M_s એ સૂર્યનું દળ છે. દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષાઓ માટે ઉપરના સમીકરણમાં, Rની જગ્યાએ અર્ધદીર્ઘ અક્ષ a મૂકીને વાપરી શકાય છે.

4. (a) પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$$g(h) = \frac{G M_E}{(R_E + h)^2}$$

$$= \frac{G M_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad \ldots \; h << R_E \text{ માટે}$$

$$g(h) = g(0)\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad \text{જ્યાં } g(0) = \frac{G M_E}{R_E^2}$$

(b) પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ

$$g(d) = \frac{GM_E}{R_E^2}\left(1-\frac{d}{R_E}\right) = g(0)\left(1-\frac{d}{R_E}\right)$$

5. ગુરુત્વબળ એ સંરક્ષી બળ છે અને તેથી સ્થિતિઊર્જા વિધેયને વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. એકબીજાથી r અંતરે રહેલા બે કણો સાથે સંકળાયેલ ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

પરથી મળે છે, જ્યાં $r \to \infty$ માટે Vને શૂન્ય લીધેલ છે. કણોના તંત્રની કુલ સ્થિતિઊર્જા એ કણોની દરેક જોડ (Pair) માટેની ઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે, જેમાં દરેક જોડને ઉપરના સમીકરણ જેવા પદ વડે રજૂ કરાય છે. આ બાબત સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને અનુસારે છે.

6. જો કોઈ અલગ કરેલું તંત્ર, M દળના ભારે પદાર્થના સાનિધ્યમાં v ઝડપથી પસાર થતા m દળના કણનું બનેલું હોય, તો કણની કુલ યાંત્રિકઊર્જા

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{r}$$

એટલે કે કુલ યાંત્રિકઊર્જા એ ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો છે. કુલ ઊર્જા એ ગતિનો અચળાંક છે.

7. જો m એ Mની આસપાસ a ત્રિજ્યાની વર્તુળ કક્ષામાં ભ્રમણ કરતો હોય, તો તંત્રની કુલ ઊર્જા

$$E = -\frac{GMm}{2a} \text{ છે.}$$

અહીં, ઉપરના મુદ્દા 5માં આપેલ સ્થિતિઊર્જામાં અચળાંકની યાદચ્છિક પસંદગી કરી શકાય છે. કોઈ પણ બંધિત (Bound) તંત્ર માટે, એટલે કે દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષા જેવી બંધ કક્ષા માટે કુલ ઊર્જા ઋણ છે. ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા

$$K = \frac{GMm}{2a}$$

$$V = -\frac{GMm}{a} \text{ છે.}$$

8. પૃથ્વીની સપાટી પરથી નિષ્ક્રમણ ઝડપ

$$\upsilon_e = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E} \text{ છે}$$

અને તેનું મૂલ્ય 11.2 km s^{-1} છે.

9. જો કોઈ કણ નિયમિત ગોળીય કવચ અથવા ગોળીય રીતે સંમિત એવું આંતરિક દળ વિતરણ ધરાવતા ઘન ગોળાની બહાર હોય, તો કવચનું કે ગોળાનું સમગ્ર દળ જાણે કે તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું હોય તે રીતે કણને આકર્ષે છે.

10. જો કોઈ કણ નિયમિત ગોળાકાર કવચની અંદર હોય તો કણ પરનું ગુરુત્વીય બળ શૂન્ય છે. જો કણ સમાંગ (Homogeneous) ઘન ગોળાની અંદર હોય, તો કણ પર ગોળાના કેન્દ્ર તરફ બળ લાગે છે. આ બળ કણના સ્થાનથી અંદરના તરફના ગોળીય દળ દ્વારા લાગે છે.

11. ભૂસ્થિર (Geostationary) અથવા (Geosynchronous Communication) ઉપગ્રહ, વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં પૃથ્વીના કેન્દ્રથી લગભગ 4.22×10^4 km અંતરે વર્તુળકક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે.

ભૌતિકરાશિ	પ્રતીક	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
ગુરુત્વીય અચળાંક	G	$[M^{-1}L^3T^{-2}]$	$N\ m^2\ kg^2$	6.67×10^{-11}
ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા	$V(r)$	$[ML^2T^{-2}]$	J	$-\frac{GMm}{r}$ (અદિશ)
ગુરુત્વ સ્થિતિમાન	$U(r)$	$[L^2T^{-2}]$	$J\ kg^{-1}$	$-\frac{GM}{r}$ (અદિશ)
ગુરુત્વ તીવ્રતા	**E** અથવા $\boldsymbol{g}$	$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	$\frac{GM}{r^2}\hat{r}$ (સદિશ)

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ :

1. એક પદાર્થની ગુરુત્વાકર્ષી અસરમાં થતી બીજા પદાર્થની ગતિની વિચારણામાં નીચેની રાશિઓનું સંરક્ષણ થાય છે : (a) કોણીય વેગમાન (b) કુલ યાંત્રિકઊર્જા
   રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થતું નથી.
2. કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ કેપ્લરના બીજા નિયમ તરફ દોરી જાય છે. આમ છતાં તે ગુરુત્વાકર્ષણના વ્યસ્ત વર્ગના નિયમ માટે વિશિષ્ટ નથી. તે કોઈ પણ કેન્દ્રિય બળ માટે સત્ય છે.
3. કેપ્લરના ત્રીજો નિયમ (જુઓ સમીકરણ (8.1))માં $T^2 = K_S R^3$. વર્તુળાકાર કક્ષામાંના બધા ગ્રહો માટે અચળાંક K_S સમાન જ છે. આ બાબત પૃથ્વીની ફરતે ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહોને પણ લાગુ પડે છે. (સમીકરણ (8.38)
4. અવકાશી ઉપગ્રહમાંનો અવકાશયાત્રી વજનવિહીનતાનો અનુભવ કરે છે. તેનું કારણ એવું નથી કે અવકાશમાં તે સ્થાને ગુરુત્વબળ નાનું છે. પણ કારણ એ છે કે, અવકાશયાત્રી અને ઉપગ્રહ બંને પૃથ્વી તરફ 'મુક્ત પતન'ની સ્થિતિમાં છે.
5. એકબીજાથી r અંતરે બે પદાર્થોના તંત્રની ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા
   $$V = -\frac{G m_1 m_2}{r} + \text{અચળાંક}$$
   અચળાંકને ગમે તે મૂલ્ય આપી શકાય છે. સૌથી સાદી પસંદગી એ છે કે તેને શૂન્ય લેવાય. આ પસંદગી સાથે
   $$V = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$
   આ પસંદગી મુજબ $r \to \infty$ હોય ત્યારે $V \to 0$. ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જામાં શૂન્ય માટે સ્થાન પસંદ કરવું એ સ્થિતિઊર્જામાં યાદચ્છિક અચળાંક નક્કી કરવા બરાબર છે. એ નોંધો કે આ અચળાંકની પસંદગીથી ગુરુત્વબળ બદલાઈ જતું નથી.
6. પદાર્થની કુલ યાંત્રિકઊર્જા તેની ગતિઊર્જા (જે હંમેશાં ધન હોય છે.) અને સ્થિતિઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે. અનંતની સાપેક્ષે (એટલે કે જો આપણે અનંત અંતરે સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય છે એમ ધારી લઈએ તો) પદાર્થની ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા ઋણ છે. ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા ઋણ છે.
7. સ્થિતિઊર્જા માટે સામાન્ય રીતે મળતું પદ mgh એ ઉપરના મુદ્દા 6માં ચર્ચેલ ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જાના તફાવતની સંનિકટતા (Approximation) છે.
8. બે કણો વચ્ચેનું ગુરુત્વબળ કેન્દ્રિય હોવા છતાં બે પરિમિત દૃઢ પદાર્થો વચ્ચેનું બળ તેમનાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રોને જોડતી રેખા પર જ હોવું જરૂરી નથી. જોકે ગોળીય સંમિતિ ધરાવતાં પદાર્થ માટે પદાર્થની બહારના કણ પર લાગતું બળ જાણે કે દળ કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયું હોય તે પરથી મળે.
9. ગોળાકાર કવચની અંદર રહેલા કણ પર લાગતું બળ શૂન્ય છે. આમ છતાં, (ધાતુની કવચ વિદ્યુતબળોથી સુરક્ષિત (Shelding કરે–તેના કરતાં અલગ) આ કવચ તેની અંદરના કણને બહારના પદાર્થો દ્વારા લાગતાં ગુરુત્વબળોથી બચાવી લેતું નથી. ગુરુત્વાકર્ષણનું Shielding શક્ય નથી.

સ્વાધ્યાય

8.1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(a) એક પોલા વાહકની અંદર વિદ્યુતભાર મૂકીને વિદ્યુતબળોથી તમે તેનું Shielding કરી શકો છો. કોઈ પદાર્થને પોલા ગોળાની અંદર મૂકીને કે અન્ય રીતે તમે નજીકના દ્રવ્યની ગુરુત્વ અસરથી Shield કરી શકશો ?

(b) પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરતા નાના અવકાશયાનની અંદર રહેલો અવકાશયાત્રી ગુરુત્વાકર્ષણની પરખ (Detect) કરી શકતો નથી. જો પૃથ્વીની આસપાસ કક્ષીય ભ્રમણ કરતા અવકાશ-મથકનું પરિમાણ (Size) મોટું હોય તો તે ગુરુત્વાકર્ષણની પરખ કરવાની આશા રાખી શકશે ?

(c) જો તમે પૃથ્વી પર સૂર્યને લીધે લાગતાં અને ચંદ્રને લીધે લાગતાં ગુરુત્વીય બળોની સરખામણી કરો તો તમને જણાશે કે સૂર્યનું ખેંચાણબળ, ચંદ્રના ખેંચાણબળ કરતા મોટું છે. (તમે આ બાબતને હવે પછીના સ્વાધ્યાયમાં આવતી વિગતોની મદદથી ચકાસી શકો છો.) આમ છતાં, ભરતી પર ચંદ્રના ખેંચાણ બળની અસર, ભરતી પરની સૂર્યની અસર કરતાં મોટી છે. આવું શા માટે ?

8.2 સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો :

(a) ઊંચાઈ વધતાં ગુરુત્વપ્રવેગ વધે છે / ઘટે છે.

(b) ઊંડાઈ વધતાં ગુરુત્વપ્રવેગ વધે છે / ઘટે છે. (પૃથ્વીને નિયમિત ઘનતાનો ગોળો ગણો.)

(c) ગુરુત્વપ્રવેગ પૃથ્વીના દળ / પદાર્થના દળથી સ્વતંત્ર છે.

(d) પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r_1 અને r_2 અંતરે આવેલાં બે બિંદુઓએ સ્થિતિઊર્જાના તફાવત માટે $-GMm(1/r_1 - 1/r_2)$ સૂત્ર $mg(r_1 - r_2)$ સૂત્ર કરતાં વધુ / ઓછું ચોકસાઈભર્યું છે.

8.3 ધારો કે કોઈ ગ્રહ સૂર્યની આસપાસ પૃથ્વીની ઝડપ કરતાં બમણી ઝડપે પરિભ્રમણ કરે છે, તો તેની કક્ષાનું પરિમાણ પૃથ્વીની કક્ષાના પરિમાણની સરખામણીએ કેટલું હોય ?

8.4 ગુરુના એક ઉપગ્રહ, આયો (Io)નો કક્ષીય આવર્તકાળ 1.769 days છે અને કક્ષીય ત્રિજ્યા 4.22×10^8 m છે. દર્શાવો કે ગુરુનું દળ સૂર્યના દળના હજારમાં ભાગનું છે.

8.5 આપણે એવું ધારીએ કે આપણી આકાશગંગા (Galaxy) સૂર્યના દળ જેટલું દરેકનું દળ હોય તેવા 2.5×10^{11} તારાઓની બનેલી છે. આકાશગંગાના કેન્દ્રથી 50,000 ly (Light Year–પ્રકાશવર્ષ) દૂર રહેલો કોઈ તારો એક ભ્રમણ પૂરું કરવા માટે કેટલો સમય લેશે ? આકાશગંગાનો વ્યાસ 10^5 ly લો.

8.6 સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો :

(a) જો અનંત અંતરે સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લેવામાં આવે તો કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા તેની ગતિઊર્જા / સ્થિતિઊર્જાના ઋણ મૂલ્ય જેટલી હોય છે.

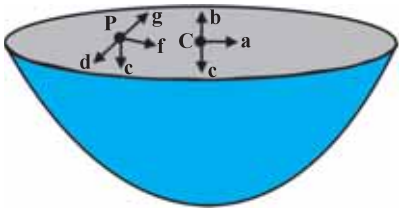
(b) કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણની બહાર મોકલી દેવા માટે આપવી પડતી ઊર્જા, તે ઉપગ્રહના સ્થાને જ સ્થિર રહેલા કોઈ પદાર્થને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણમાંથી બહાર મોકલવા માટે જરૂરી ઊર્જા કરતાં વધુ / ઓછી હોય છે.

8.7 પૃથ્વી પરથી ફેંકાતા પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ ઝડપ (a) શું તે પદાર્થના દળ પર આધારિત છે ? (b) જ્યાંથી ફેંકવામાં આવે તે સ્થાન પર આધારિત છે ? (c) પ્રક્ષિપ્ત કરવાની દિશા પર આધારિત છે ? (d) પદાર્થને ફેંકવાના સ્થાનની ઊંચાઈ પર આધારિત છે ?

8.8 એક ધૂમકેતુ સૂર્યની આસપાસ અતિ દીર્ઘવૃત્તિય કક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે. આ ધૂમકેતુ માટે (a) રેખીય ઝડપ (b) કોણીય ઝડપ (c) કોણીય વેગમાન (d) ગતિઊર્જા (e) સ્થિતિઊર્જા (f) સમગ્ર કક્ષા પર કુલ ઊર્જાઅચળ છે ? ધૂમકેતુ જ્યારે સૂર્યની ખૂબ નજીક આવે ત્યારે કોઈ દળ ક્ષતિ થાય તો તે અવગણો.

8.9 અવકાશમાંના અવકાશયાત્રીને થતી પીડા માટે કયાં લક્ષણો જણાય ? (a) પગમાં સોજો (b) ચહેરા પર સોજો (c) માથું દુઃખવું (d) સંરચનાની (Orientational) તકલીફ.

8.10 નીચેના બે પ્રશ્નોમાં આપેલા ઉત્તરોમાંથી સાચો ઉત્તર પસંદ કરો : (a) નિયમિત દળ ઘનતા ધરાવતા એક અર્ધગોળાકાર કવચના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વ તીવ્રતાની દિશા દર્શાવતું તીર (જુઓ આકૃતિ 8.12.)
(i) a (ii) b (iii) c (iv) d.



આકૃતિ 8.12

8.11 ઉપરના પ્રશ્નમાં કોઈ યાદચ્છિક બિંદુ P આગળ ગુરુત્વ તીવ્રતાની દિશા દર્શાવતું તીર (i) d (ii) e (iii) f (iv) g.

8.12 પૃથ્વી પરથી એક રૉકેટ સૂર્ય તરફ છોડવામાં આવે છે. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી કેટલા અંતરે રૉકેટ પરનું ગુરુત્વબળ શૂન્ય બને છે ? સૂર્યનું દળ = 2×10^{30} kg, પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg બીજા ગ્રહો વગેરેની અસર અવગણો. (કક્ષીય ત્રિજ્યા = 1.5×10^{11} m)

8.13 તમે 'સૂર્યનું વજન' કેવી રીતે કરશો, એટલે કે તેના દળનો અંદાજ કેવી રીતે મેળવશો ? સૂર્યની ફરતે પૃથ્વીની કક્ષાની સરેરાશ ત્રિજ્યા 1.5×10^8 km છે.

8.14 શનિ પરના વર્ષનો સમયગાળો, પૃથ્વી પરના વર્ષના સમયગાળા કરતાં 29.5 ગણો છે. જો પૃથ્વી સૂર્યથી 1.50×10^8 km અંતરે હોય, તો સૂર્યથી શનિ કેટલે દૂર હશે ?

8.15 એક પદાર્થનું પૃથ્વીની સપાટી પર વજન 63 N છે. પૃથ્વીની ત્રિજ્યા કરતાં અડધી ઊંચાઈએ તે પદાર્થ પરનું પૃથ્વીનું ગુરુત્વબળ કેટલું હશે ?

8.16 પૃથ્વીને નિયમિત દળ ઘનતા ધરાવતો ગોળો ધારીને, જે પદાર્થનું સપાટી પર વજન 250 N હોય, તો તેનું પૃથ્વીના કેન્દ્ર તરફ અડધા અંતરે વજન કેટલું થશે ?

8.17 પૃથ્વીની સપાટી પરથી 5 km s^{-1}ની ઝડપે ઊર્ધ્વદિશામાં એક રૉકેટ છોડવામાં આવે છે. પૃથ્વી પર પાછા આવતા અગાઉ રૉકેટ કેટલે દૂર સુધી જશે ? પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg, પૃથ્વીની સરેરાશ ત્રિજ્યા = 6.4×10^6 m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

8.18 પૃથ્વીની સપાટી પરથી પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની નિષ્ક્રમણ ઝડપ 11.2 km s^{-1} છે. એક પદાર્થને આના કરતાં ત્રણગણી ઝડપે બહાર ફેંકવામાં આવે છે. પૃથ્વીથી અત્યંત દૂરના અંતરે જતાં એ પદાર્થની ઝડપ કેટલી હશે ? સૂર્ય અને બીજા ગ્રહોના અસ્તિત્વ અવગણો.

8.19 પૃથ્વીની સપાટીથી 400 km ઊંચાઈએ એક ઉપગ્રહ કક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે. ઉપગ્રહને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણની અસરમાંથી બહાર મોકલવા માટે કેટલી ઊર્જા ખર્ચવી પડશે ? ઉપગ્રહનું દળ = 200 kg, પૃથ્વીનું દળ = 6.0×10^{24} kg, પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6.4×10^6 m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

8.20 દરેકનું એક સોલર (સૂર્ય જેટલું = 2×10^{30} kg) દળ ધરાવતા બે તારા એકબીજા તરફ સન્મુખ (Head on) સંઘાત માટે જઈ રહ્યા છે. જ્યારે તેઓ 10^9 km અંતરે હોય છે ત્યારે તેમની ઝડપ અવગણ્ય છે. તેઓ કેટલી ઝડપથી એકબીજાને અથડાશે ? દરેક તારાની ત્રિજ્યા 10^4 km છે. સંઘાત થયા વિના વિના તારાઓ વિકૃત થતા નથી એમ ધારો. (Gનું જ્ઞાત મૂલ્ય લો.)

8.21 એક સમક્ષિતિજ કોષ્ટક પર દરેકનું 100 kg દળ અને 0.10 m ત્રિજ્યા હોય તેવા બે ભારે ગોળાઓને એકબીજાથી 1.0 m અંતરે મૂકેલા છે. ગોળાઓનાં કેન્દ્રોને જોડતી રેખાના મધ્યબિંદુએ ગુરુત્વબળ અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન કેટલા હશે ? તે બિંદુએ મૂકેલો કોઈ પદાર્થ સંતુલનમાં છે ? જો તેમ હોય તો સંતુલન સ્થિર છે કે અસ્થિર ?

વધારાનું સ્વાધ્યાય

8.22 તમે પાઠ્યપુસ્તકમાં શીખ્યાં છો કે ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ પૃથ્વીની સપાટીથી લગભગ 36,000 km ઊંચાઈ ધરાવતી કક્ષામાં ભ્રમણ કરે છે. આ ઉપગ્રહના સ્થાને ગુરુત્વસ્થિતિમાન કેટલું હશે ? (અનંત અંતરે ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જા શૂન્ય લો.) પૃથ્વીનું દળ = 6.0×10^{24} kg, ત્રિજ્યા = 6400 km.

8.23 સૂર્યના દળ કરતાં 2.5 ગણું દળ ધરાવતો અને સંકોચાઈને 12 kmનું પરિમાણ ધરાવતો એક તારો 1.2 પરિભ્રમણ પ્રતિ સેકન્ડ જેટલી ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે. (આ પ્રકારના અત્યંત ઠાંસીને નક્કર બનેલા compact તારાને ન્યુટ્રૉન તારા કહે છે. પલ્સાર તરીકે ઓળખાતા કેટલાક અવકાશી પદાર્થો આ પ્રકારમાં આવે છે.) તેના વિષુવવૃત્ત પર મૂકેલો પદાર્થ ગુરુત્વાકર્ષણને લીધે તેની સપાટીને ચોટીને રહેશે ? (સૂર્યનું દળ = 2×10^{30} kg).

8.24 મંગળ પર એક અવકાશયાન સ્થિર થયેલ છે. આ અવકાશયાનને સૂર્યમંડળની બહાર ધકેલી દેવા માટે કેટલી ઊર્જા ખર્ચવી પડશે ? અવકાશયાનનું દળ = 1000 kg, સૂર્યનું દળ = 2×10^{30} kg, મંગળનું દળ = 6.4×10^{23} kg, મંગળની ત્રિજ્યા = 3395 km, મંગળની કક્ષાની ત્રિજ્યા = 2.28×10^8 km, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

8.25 મંગળની સપાટી પરથી એક રૉકેટ ઊર્ધ્વદિશામાં 2 km s^{-1}ની ઝડપથી છોડવામાં આવે છે. જો મંગળના વાતાવરણના અવરોધને લીધે તેની પ્રારંભિક ઊર્જાની 20 % ઊર્જા વ્યય પામતી હોય, તો મંગળની સપાટી પર પાછું આવતા પહેલાં રૉકેટ કેટલે દૂર જશે ? મંગળનું દળ = 6.4×10^{23} kg, મંગળની ત્રિજ્યા = 3395 km, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.