પ્રકરણ 14

દોલનો (OSCILLATIONS)

14.1 પ્રસ્તાવના
14.2 આવર્ત અને દોલિત ગતિઓ
14.3 સરળ આવર્તગતિ
14.4 સરળ આવર્તગતિ અને નિયમિત વર્તુળમય ગતિ
14.5 સરળ આવર્તગતિમાં વેગ અને પ્રવેગ
14.6 સરળ આવર્તગતિ માટે બળનો નિયમ
14.7 સરળ આવર્તગતિમાં ઊર્જા
14.8 સરળ આવર્તગતિ કરતાં કેટલાંક તંત્રો
14.9 અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ
14.10 પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનો અને અનુનાદ
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય
વધારાનું સ્વાધ્યાય
પરિશિષ્ટ

14.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણે જુદા જુદા પ્રકારની ગતિઓનો અનુભવ કરીએ છીએ. તમે તેમાંની કેટલીક ગતિઓ વિશે પહેલેથી જ શીખ્યાં છો. દા. ત., સુરેખ ગતિ અને પ્રક્ષિપ્ત ગતિ. આ બંને ગતિઓ અપુનરાવર્તિત છે. આપણે સૂર્ય મંડળના ગ્રહોની નિયમિત વર્તુળમય ગતિ અને કક્ષીય ગતિ વિશે પણ શીખ્યાં છીએ. આ કિસ્સાઓમાં, ગતિનું એક ચોક્કસ સમયગાળા પછી પુનરાવર્તન થાય છે, એટલે કે તે આવર્ત (periodic) છે. તમારા બાળપણમાં તમે પારણામાં અથવા હીંચકા પર ઝૂલતા આનંદ માણ્યો જ હશે. આ બંને ગતિઓ પુનરાવર્તિત પ્રકારની છે, પરંતુ તે કોઈ ગ્રહની આવર્તગતિથી અલગ છે. અહીં પદાર્થ એ નિશ્ચિત (મધ્યમાન) સ્થાનને અનુલક્ષીને આગળ-પાછળ ગતિ કરે છે. આગળ-પાછળની આવી આવર્તગતિનાં ઉદાહરણો છે : નદીમાં ઉપર-નીચે (હાલક-ડોલક) થતી બોટ, વરાળયંત્રમાં આગળ-પાછળ થતો પિસ્ટન વગેરે. (આ તમામ પદાર્થો આગળ-પાછળ આવર્તગતિ કરે છે.) આવી ગતિને દોલિત ગતિ (oscillatory motion) કહેવામાં આવે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ ગતિનો અભ્યાસ કરીશું.

ભૌતિકશાસ્ત્ર માટે દોલિત ગતિનો અભ્યાસ એ પાયાનો છે; ઘણી ભૌતિક ઘટનાઓની સમજ માટે તેની વિભાવના જરૂરી છે. સિતાર, ગિટાર અથવા વાયોલિન જેવાં સંગીતનાં સાધનોમાં, આપણને કંપન કરતાં તાર જણાય છે, જે આનંદદાયક ધ્વનિ ઉત્પન્ન કરે છે. ટેલિફોન અને સ્પીકર સિસ્ટમ્સમાં ડ્રમ્સ અને ડાયફ્રામમાંના પડદા (મેમ્બ્રેન) તેમના નિશ્ચિત સ્થાનને અનુલક્ષીને કંપન કરે છે. હવાના અણુઓનાં કંપનો ધ્વનિના પ્રસરણને શક્ય બનાવે છે. તેવી જ રીતે, ઘન પદાર્થમાં અણુઓ તેમના સંતુલન (નિશ્ચિત) સ્થાનને અનુલક્ષીને દોલનો કરે છે. તેમના દોલનની સરેરાશ ઊર્જા એ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે. AC પાવર સપ્લાયમાંથી મળતો વૉલ્ટેજ એ પણ દોલન કરે છે અને તે તેના સરેરાશ મૂલ્ય (શૂન્ય)ની આસપાસ એકાંતરે ધન અને ઋણ થાય છે.

સામાન્ય રીતે આવર્તગતિ અને ખાસ કરીને દોલિત ગતિના વર્ણનમાં, આવર્તકાળ (periodic time/period), આવૃત્તિ (frequency), સ્થાનાંતર (displacement), કંપવિસ્તાર (amplitude) અને કળા (phase) જેવી કેટલીક મૂળભૂત વિભાવનાઓની જરૂર પડે છે. આ ખ્યાલોને (વિભાવનાઓને) હવે પછીના પરિચ્છેદમાં રજૂ કરવામાં આવ્યા છે.

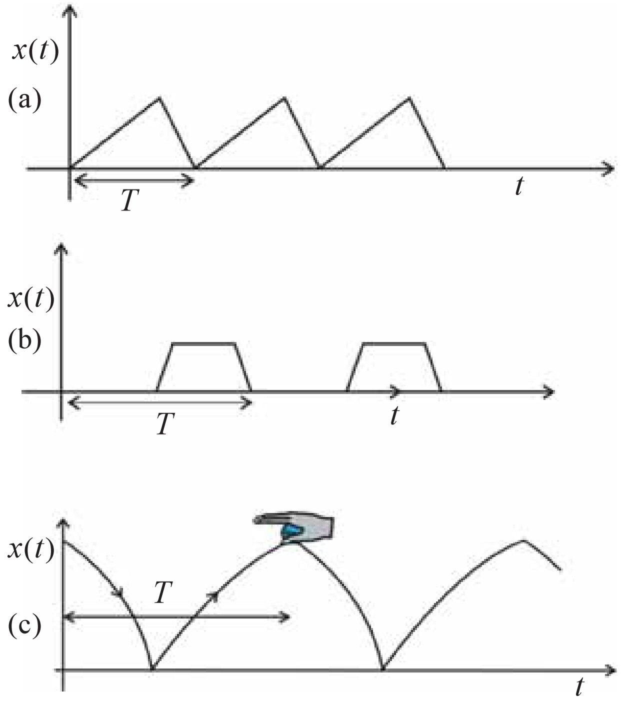
14.2 આવર્ત અને દોલિત ગતિઓ (PERIODIC AND OSCILLATORY MOTIONS)

આકૃતિ 14.1 કેટલીક આવર્ત ગતિઓ દર્શાવે છે. ધારો કે કોઈ એક જંતુ એક ઢોળાવવાળા માર્ગ પર ઉપર ચઢે છે અને નીચે પડે છે અને તે પ્રારંભિક બિંદુ પર પાછું આવે છે. આ ક્રિયાનું તે સમાનરૂપે પુનરાવર્તન કરે છે. જો તમે જમીનથી તેની ઊંચાઈ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ દોરશો તો તે આકૃતિ 14.1 (a) જેવો દેખાશે. જો કોઈ બાળક એક પગથિયું ઉપર ચઢે અને નીચે આવે, અને આ ક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરે, તો જમીન ઉપરની તેની ઊંચાઈ એ આકૃતિ 14.1(b)માં દર્શાવ્યા જેવી દેખાશે. જ્યારે તમે જમીન પરથી બૉલને તમારી હથેળી અને જમીન વચ્ચે ઉછાળવાની રમત રમો છો ત્યારે, તેની ઊંચાઈ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ એ આકૃતિ 14.1 (c) જેવો દેખાશે. નોંધો કે આકૃતિ 14.1 (c)માંના બંને વક્ર ભાગો એ એક પરવલયના ભાગો છે જે ન્યૂટનના ગતિના સમીકરણ દ્વારા આપવામાં આવે છે (જુઓ પરિચ્છેદ 3.6).

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ નીચે તરફની ગતિ માટે, અને

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ ઉપર તરફની ગતિ માટે

જે દરેક કિસ્સામાં પ્રારંભિક વેગ uનાં જુદાં મૂલ્યો માટે છે. આ આવર્તગતિનાં ઉદાહરણો છે. આમ, જે ગતિ પોતે સમયનાં નિયમિત અંતરાલો પર પુનરાવર્તન કરે છે તેને **આવર્તગતિ (Periodic Motion)** કહેવામાં આવે છે.



આકૃતિ 14.1 આવર્તગતિનાં ઉદાહરણો. દરેક કિસ્સામાં આવર્તકાળ T દર્શાવેલ છે.

ઘણી વખત આવર્તગતિ કરતાં પદાર્થને તેના પથમાં ક્યાંક એક સંતુલન સ્થિતિ હોય છે. જ્યારે પદાર્થ આ સ્થિતિમાં હોય ત્યારે તેના પર કુલ ચોખ્ખું (Net) બાહ્ય બળ લાગતું નથી. તેથી, જો તેને ત્યાં સ્થિર છોડી દેવામાં આવે તો તે કાયમ માટે ત્યાં જ રહે છે. જો પદાર્થને આ સ્થાનથી નાનું સ્થાનાંતર આપવામાં આવે, તો એક એવું બળ કાર્યરત થાય છે જે પદાર્થને સંતુલન બિંદુ તરફ લાવવાનો પ્રયાસ કરે છે, જે **દોલનો** (oscillations) કે **કંપનો** (vibrations) ઉત્પન્ન કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે, વાટકા (બાઉલ)માં મૂકવામાં આવેલ બૉલ તેના તળિયે સંતુલનમાં હશે. જો આ બિંદુથી તેને થોડું સ્થાનાંતરિત કરવામાં આવે, તો તે વાટકામાં દોલનો કરશે. દરેક દોલિત ગતિ આવર્ત હોય છે, પરંતુ દરેક આવર્તગતિએ દોલિત હોય તે જરૂરી નથી. વર્તુળમય (ચક્રીય-Circular Motion) ગતિ આવર્તગતિ છે, પરંતુ તે દોલિત નથી.

દોલનો અને કંપનો વચ્ચે કોઈ નોંધપાત્ર તફાવત નથી. જ્યારે આવૃત્તિ નાની હોય છે (એક વૃક્ષની શાખાનાં દોલનો જેવી), ત્યારે આપણે તેને દોલન કહીએ છીએ, જ્યારે આવૃત્તિ ઊંચી હોય છે (સંગીતનાં સાધનના તારનાં કંપનો જેવી), ત્યારે આપણે તેને કંપન કહીએ છીએ.

સરળ આવર્ત (પ્રસંવાદી / harmonic) ગતિ દોલિત ગતિનું સૌથી સાદું સ્વરૂપ છે. જ્યારે દોલિત પદાર્થ પરનું બળ તેના મધ્યમાન સ્થાન (જે સંતુલન સ્થાન પણ છે) થી સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં હોય, ત્યારે આ ગતિ ઉત્પન્ન થાય છે. વધુમાં, તેના દોલનના કોઈ પણ તબક્કે, આ બળ સંતુલન સ્થિતિ તરફ દિશાન્વિત હોય છે.

વ્યવહારમાં, ઘર્ષણ અને અન્ય દ્વારા ઉદ્ભવતાં અવમંદનના કારણોને લીધે દોલન કરતાં પદાર્થો આખરે તેમની સંતુલન સ્થિતિ પર સ્થિર સ્થિતિમાં આવે છે. જોકે, કેટલાક બાહ્ય આવર્ત પરિબળ દ્વારા તેઓને દોલનમાં રાખવા માટે ફરજ પાડી શકાય છે. આપણે અવમંદિત (Damped) અને પ્રણોદિત (Forced) દોલનોની ઘટનાઓની ચર્ચા આ પ્રકરણના અંતમાં કરીશું.

કોઈ પણ દ્રવ્ય માધ્યમને મોટી સંખ્યામાં યુગ્મ દોલકો (coupled oscillators)ના સમૂહ તરીકે જોઈ શકાય છે. કોઈ માધ્યમનાં ઘટકોનાં સામૂહિક આવર્તનો પોતાને તરંગો સ્વરૂપે પ્રગટ કરે છે. તરંગોનાં ઉદાહરણોમાં પાણીના તરંગો, ધરતીકંપના તરંગો, વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોનો સમાવેશ થાય છે. તરંગની ઘટનાઓનો આપણે આગામી પ્રકરણમાં અભ્યાસ કરીશું.

14.2.1 આવર્તકાળ અને આવૃત્તિ (Period and frequency)

આપણે જોયું છે કે કોઈ પણ ગતિ જે સમયનાં નિયમિત અંતરાલો પર પોતે પુનરાવર્તન કરે છે તેને **આવર્તગતિ** કહેવામાં આવે છે. **સમયનો લઘુતમ અંતરાલ કે જે પછી આ ગતિનું પુનરાવર્તન થાય છે તેને તેનો આવર્તકાળ (periodic time / period) કહેવાય છે.** ચાલો આ આવર્તકાળને (લઘુતમ સમયગાળાને) સંજ્ઞા T દ્વારા દર્શાવીએ. તેનો S.I. એકમ

સેકન્ડ (second) છે. આવર્તગતિ કે જે સેકન્ડના સ્કેલ પર ખૂબ ઝડપી અથવા ખૂબ ધીમી હોય, તો તેના માટે સમયના અન્ય અનુકૂળ એકમોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ક્વાટ્ર્ઝ સ્ફટિકનાં કંપનોનો સમયગાળો માઈક્રોસેકન્ડ્સ (10^{-6} s)ના એકમોમાં દર્શાવવામાં આવે છે જેને સંક્ષિપ્તમાં μs વડે દર્શાવાય છે. બીજી તરફ, બુધ (Mercury) ગ્રહનો કક્ષીય આવર્તકાળ 88 પૃથ્વી દિવસ છે. હેલીનો ધૂમકેતુ દર 76 વર્ષ પછી દેખાય છે.

Tનું વ્યસ્ત એ, એકમ સમયમાં થતાં પુનરાવર્તનોની સંખ્યા આપે છે. આ રાશિને **આવર્તગતિની આવૃત્તિ** કહેવામાં આવે છે. તેને પ્રતીક ν દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, ν અને T વચ્ચેનો સંબંધ

$$\nu = 1/T \qquad (14.1)$$

છે. આમ, νનો એકમ s^{-1} છે. હેઈનરિચ રુડોલ્ફ હટ્ર્ઝ (1857-1894)ના રેડિયો તરંગોના સંશોધન બાદ, આવૃત્તિના એકમને વિશેષ નામ આપવામાં આવ્યું છે. તેને હટ્ર્ઝ (hertz) (સંક્ષેપમાં Hz) કહેવામાં આવે છે. આમ,

$$1 \text{ હટ્ર્ઝ(hertz)} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ દોલન પ્રતિ સેકન્ડ} = 1 \text{ s}^{-1} \qquad (14.2)$$

નોંધ કરો કે આવૃત્તિ ν, એ પૂર્ણાંક જ હોય તે જરૂરી નથી.

▶ *ઉદાહરણ 14.1* સામાન્ય રીતે માનવહૃદય એક મિનિટમાં 75 વખત ધબકતું જણાય છે. તેની આવૃત્તિ અને આવર્તકાળની ગણતરી કરો.

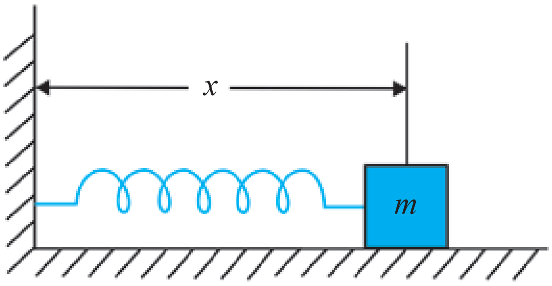
ઉકેલ

હૃદયના ધબકારની આવૃત્તિ $= 75/(1 \text{ min})$
$= 75/(60 \text{ s})$
$= 1.25 \text{ s}^{-1}$
$= 1.25 \text{ Hz}$

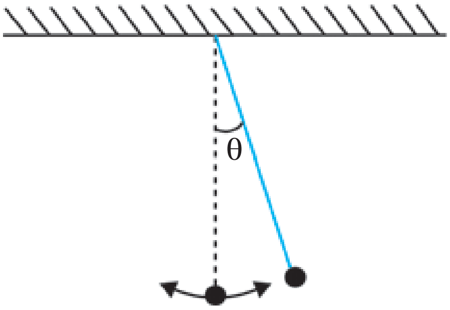
આવર્તકાળ $T = 1/(1.25 \text{ s}^{-1})$
$= 0.8 \text{ s}$ ◀

14.2.2 સ્થાનાંતર (Displacement)

પરિચ્છેદ 4.2માં, આપણે કણના સ્થાનાંતરને તેના સ્થાનસદિશના ફેરફાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે. આ પ્રકરણમાં આપણે સ્થાનાંતર શબ્દનો ઉપયોગ વધુ વ્યાપક અર્થમાં કરીશું. સ્થાનાંતર એ આપણે ધ્યાનમાં લીધેલ કોઈ પણ ભૌતિક ગુણધર્મના સમય સાથેના બદલાવ માટે ઉલ્લેખાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ સપાટી પર સ્ટીલના એક બૉલની સુરેખ ગતિના કિસ્સામાં, પ્રારંભ બિંદુથી સમયના વિધેય તરીકે તેનું અંતર એ સ્થાન-સ્થાનાંતર છે. ઉદ્‌ગમબિંદુની પસંદગી એ સગવડતાની બાબત છે. એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ બ્લૉકનો વિચાર કરો કે, જેનો બીજો છેડો દૃઢ દીવાલ પર જડેલ હોય [જુઓ આકૃતિ 14.2 (a)]. સામાન્ય રીતે, તેની સંતુલન સ્થિતિમાંથી પદાર્થનું સ્થાનાંતર માપવું અનુકૂળ છે. એક દોલન કરતા સાદા લોલક માટે, સમયના વિધેય તરીકે શિરોલંબ (ઊર્ધ્વ)થી તેના કોણને સ્થાનાંતર ચલ તરીકે લઈ શકાય છે. [જુઓ આકૃતિ 14.2(b)]. સ્થાનાંતર પદને હંમેશાં સ્થાનના સંદર્ભમાં જ લેવું જોઈએ એવું નથી. ઘણા અન્ય પ્રકારના સ્થાનાંતર ચલો પણ હોઈ શકે છે.



આકૃતિ **14.2 (a)** *એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ બ્લૉક, જેનો બીજો છેડો એક દૃઢ દીવાલ પર જડવામાં આવેલ છે. આ બ્લૉક એક ઘર્ષણરહિત સપાટી પર ગતિ કરે છે. આ બ્લૉકની ગતિને દીવાલથી તેનું અંતર અથવા સ્થાનાંતર xના પદમાં વર્ણવી શકાય છે.*



આકૃતિ **14.2 (b)** *એક દોલિત સાદું લોલક; તેની ગતિને ઊર્ધ્વથી કોણીય સ્થાનાંતર θના પદમાં વર્ણવી શકાય છે.*

એક કેપેસિટર પરનો વૉલ્ટેજ, એ.સી. સર્કિટમાં સમય સાથે બદલાય છે, આમ વૉલ્ટેજ સ્થાનાંતર ચલ પણ છે. એ જ રીતે, ધ્વનિતરંગના પ્રસરણમાં દબાણનું સમય સાથે બદલાવવું, પ્રકાશના તરંગમાં બદલાતા વિદ્યુત અને ચુંબકીયક્ષેત્રો અલગ અલગ સંદર્ભોમાં સ્થાનાંતરનાં ઉદાહરણો છે. સ્થાનાંતર ચલ ધન અને ઋણ એમ બંને મૂલ્યો લઈ શકે છે. દોલનો પરના પ્રયોગોમાં, સ્થાનાંતરને અલગ અલગ સમયે માપવામાં આવે છે.

સ્થાનાંતરને સમયના ગાણિતિક વિધેય દ્વારા રજૂ કરી શકાય છે. આવર્તગતિના કિસ્સામાં, આ વિધેય સમય પર આવર્ત છે. અતિસરળ આવર્ત વિધેયોમાંથી એકને

$$f(t) = A \cos \omega t \qquad (14.3a)$$

તરીકે રજૂ કરાય છે.

જો આ વિધેયનો કોણાંક (argument), ωt એ 2π રેડિયનના પૂર્ણાંક ગુણાંકમાં વધે, તો આ વિધેયનું મૂલ્ય એનું એ જ રહે છે. આમ, આ વિધેય $f(t)$ એ આવર્ત છે અને તેનો

આવર્તકાળ T નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (14.3b)$$

આમ, વિધેય $f(t)$એ આવર્તકાળ T સાથે આવર્ત છે,

$f(t) = f(t + T)$

જો આપણે sine વિધેય, $f(t) = A\sin \omega t$ લઈએ તોપણ આ પરિણામ દેખીતી રીતે સાચું છે. વધુમાં sine અને cosine વિધેયોનું રેખીય સંયોજન જેમકે,

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (14.3c)$$

એ પણ તે જ આવર્તકાળ T સાથે આવર્ત વિધેય છે.

$A = D \cos \phi$ અને $B = D \sin \phi$

લેતાં સમીકરણ (14.3c)ને

$$f(t) = D \sin (\omega t + \phi) \quad (14.3d)$$

તરીકે લખી શકાય છે,

અહીં D અને ϕ અચળાંકોને

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ અને } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

દ્વારા આપવામાં આવે છે.

sine અને cosine આવર્ત વિધેયોનું મહત્ત્વ ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી, જીન બાપ્ટિસ્ટ જોસેફ ફોરિયર (1768-1830) દ્વારા સાબિત થયેલ નોંધપાત્ર પરિણામને લીધે છે; **કોઈ પણ આવર્ત વિધેયને યોગ્ય સહગુણાંકો સાથેના વિવિધ આવર્તકાળના sine અને cosine વિધેયોના સંપાતપણા તરીકે વ્યક્ત કરી શકાય છે.**

ઉદાહરણ 14.2 નીચે આપેલ સમયનાં વિધેયોમાંથી કયું (a) આવર્તગતિ અને (b) બિનઆવર્તગતિ દર્શાવે છે ? આવર્તગતિના દરેક કિસ્સા માટે આવર્તકાળ આપો [ω એ કોઈ ધન અચળાંક છે].

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$

(ii) $\sin \omega t + \cos 2 \omega t + \sin 4 \omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log (\omega t)$

ઉકેલ

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$ એ આવર્ત વિધેય છે.

તેને $\sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/4)$ વડે પણ લખી શકાય.

હવે $\sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/4) = \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4 + 2\pi)$

$= \sqrt{2} \sin [\omega (t + 2\pi/\omega) + \pi/4]$

આ વિધેયનો આવર્તકાળ $2\pi/\omega$ છે.

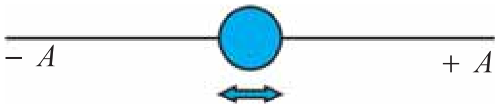
(ii) આ આવર્તગતિનું એક ઉદાહરણ છે. એ નોંધવામાં આવે કે દરેક પદ વિવિધ કોણીય આવૃત્તિ સાથે આવર્ત વિધેય રજૂ કરે છે. સમયના જે નાનામાં નાના અંતરાલ બાદ વિધેય તેના મૂલ્યનું પુનરાવર્તન કરે છે તે આવર્તકાળ છે. તેથી $\sin \omega t$ નો આવર્તકાળ $T_0 = 2\pi/\omega$ છે; $\cos 2\omega t$ નો આવર્તકાળ $\pi/\omega = T_0/2$ છે અને $\sin 4\omega t$ નો આવર્તકાળ $2\pi/4\omega = T_0/4$ છે. પ્રથમ પદનો આવર્તકાળ છેલ્લાં બે પદના આવર્તકાળના ગુણાંકમાં છે. તેથી T_0 એ સમયનો એ લઘુતમ અંતરાલ છે કે જે પછી ત્રણેય પદોનો સરવાળો પુનરાવર્તિત થાય છે અને આમ સરવાળો એક આવર્ત વિધેય છે જેનો આવર્તકાળ $2\pi/\omega$ છે.

(iii) વિધેય $e^{-\omega t}$ આવર્ત નથી તે સમયના વધારા સાથે એકપક્ષીય રીતે ઘટે છે અને $t \to \infty$ માટે શૂન્ય તરફ દોરાઈ જાય છે અને આમ, તેના મૂલ્યનું ક્યારેય પુનરાવર્તન થતું નથી.

(iv) વિધેય $\log (\omega t)$ સમય t સાથે એકપક્ષીય રીતે વધે છે. તેથી, તેના મૂલ્યનું ક્યારેય પુનરાવર્તન થતું નથી અને તે બિનઆવર્ત વિધેય છે. તે નોંધવામાં આવે કે જેમ $t \to \infty$, તેમ $\log (\omega t)$ અપસારિત થઈ ∞ સુધી પહોંચે છે. તેથી, તે કોઈ પણ પ્રકારનું ભૌતિક સ્થાનાંતર રજૂ કરી શકતું નથી. ◀

14.3 સરળ આવર્તગતિ (SIMPLE HARMONIC MOTION)

ચાલો, આપણે આકૃતિ 14.3માં બતાવ્યા પ્રમાણે X-અક્ષના ઊગમબિંદુથી ચરમસીમાઓ $+A$ અને $-A$ ની વચ્ચે આગળ-પાછળની બાજુએ દોલન કરતાં એક કણનો વિચાર કરીએ.



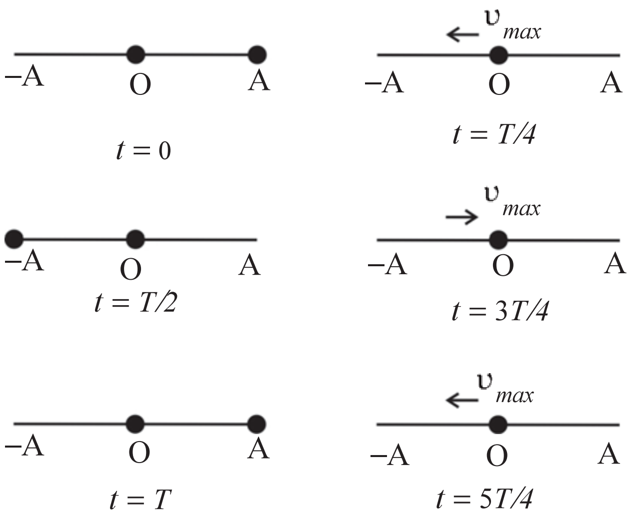
આકૃતિ 14.3 X-અક્ષના ઊગમબિંદુને અનુલક્ષીને $+A$ અને $-A$ સીમાઓ વચ્ચે આગળ-પાછળ કંપન કરતો કણ

આવી દોલિત ગતિ ત્યારે જ આવર્ત (પ્રસંવાદી) કહી શકાય કે જ્યારે આ કણનું ઊગમબિંદુથી સ્થાનાંતર સમય સાથે નીચે આપેલ સંબંધ પ્રમાણે બદલાતું હોય :

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi) \quad (14.4)$$

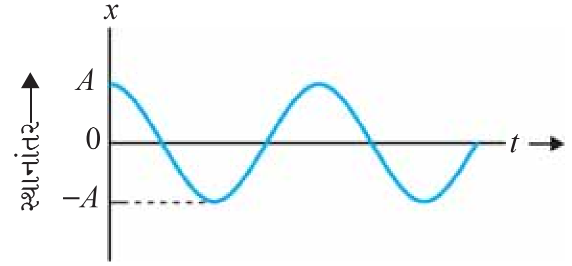
જ્યાં A, ω અને ϕ એ અચળાંકો છે.

આમ, કોઈ પણ આવર્તગતિ એ સરળ આવર્તગતિ નથી પરંતુ તે ગતિ કે જેમાં સ્થાનાંતર એ સમયનું સાઇન્યુસોઇડલ (એટલે કે sine પ્રકારનું જયાવર્તી) વિધેય છે. તે સ.આ.ગ. છે. આકૃતિ 14.4 એ, સમયનો દરેક અંતરાલ $T/4$ હોય તેવા જુદા જુદા સમયે સ.આ.ગ. કરતા કણનું સ્થાન દર્શાવે છે, જ્યાં T એ ગતિનો આવર્તકાળ છે.



આકૃતિ 14.4 *સમયનાં અલગ અલગ મૂલ્યો $t = 0, T/4, 3T/4, T, 5T/4$ માટે સ.આ.ગ. કરતાં કણના સ્થાન. જે સમય બાદ આ ગતિ તેનું પુનઃઆવર્તન કરે છે તે T છે. T એ અચળ રહે છે અને તે તમે પ્રારંભિક સ્થિતિ ($t = 0$) કઈ સ્થિતિ લો છો તેના પર આધારિત નથી. શૂન્ય સ્થાનાંતર ($x = 0$ પર) માટે ઝડપ મહત્તમ અને ગતિના અંત્ય બિંદુઓ પર ઝડપ શૂન્ય છે.*

આકૃતિ 14.5માં x વિરુદ્ધ tનો આલેખ રેખાંકિત કરેલ છે કે જે સ્થાનાંતરના સમય સાથેના સતત વિધેયનાં મૂલ્યો આપે છે. એ રાશિઓ A, ω અને ϕ કે જે આ સ.આ.ગ.ની લાક્ષણિકતાઓ નક્કી કરે છે તેને આકૃતિ *14.6*માં તેનાં પ્રમાણભૂત નામો સાથે દર્શાવેલ છે.

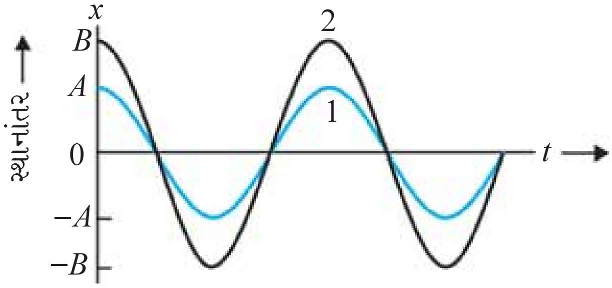


આકૃતિ 14.5 *સમયના સતત વિધેય તરીકે સરળ આવર્તગતિ માટે સ્થાનાંતર*

$x(t)$	:	સ્થાનાંતર x એ સમય t નાં વિધેય તરીકે
A	:	કંપવિસ્તાર (Amplitude)
ω	:	કોણીય આવૃત્તિ (Angular Frequency)
$\omega t + \phi$	:	કળા (સમય આધારિત) [Phase (Time-Dependent)]
ϕ	:	કળા-અચળાંક (Phase Constant)

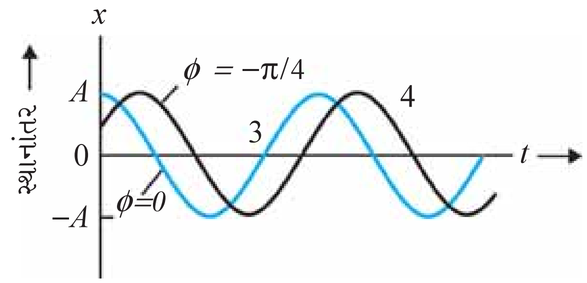
આકૃતિ 14.6 *સમીકરણ (14.4)માંની પ્રમાણભૂત સંજ્ઞાઓનો અર્થ*

સ.આ.ગ.નો કંપવિસ્તાર A એ આ કણના મહત્તમ સ્થાનાંતરનું માન છે. [નોંધો, વ્યાપકતાના કોઈ પણ નુકસાન વગર, A ને ધન લઈ શકાય.] જેમ સમયનું cosine વિધેય એ $+1$ અને -1 ની વચ્ચે બદલાય છે, તેમ સ્થાનાંતર એ બે ચરમસીમાઓ (સીમાંત બિંદુઓ) $+A$ અને $-A$ ની વચ્ચે બદલાય છે. ω અને ϕ સમાન હોય તેવી પરંતુ જુદા કંપવિસ્તાર A અને B ધરાવતી બે સરળ આવર્તગતિઓને આકૃતિ 14.7(a) માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 14.7 (a) *સમયના એક વિધેય તરીકે સ્થાનાંતરનો $\phi = 0$ માટે સમીકરણ (14.4) પરથી મેળવેલ આલેખ. વક્રો 1 અને 2 એ બે જુદા જુદા કંપવિસ્તારો A અને B માટેના છે.*

જ્યારે આપેલ સ.આ.ગ. માટે કંપવિસ્તાર A અચળ હોય ત્યારે, કોઈ પણ t સમયે આ કણની ગતિ-અવસ્થા (સ્થાન અને વેગ)ને cosine વિધેયના કોણાંક ($\omega t + \phi$) વડે શોધવામાં આવે છે. આ સમય આધારિત રાશિ, ($\omega t + \phi$) ને ગતિની **કળા (Phase)** કહેવામાં આવે છે. $t = 0$ સમયે કળાનું મૂલ્ય ϕ છે અને તેને **કળા-અચળાંક (Phase Constant)** કે **કળા-કોણ (Phase Angle)** કહેવાય છે. જો કંપવિસ્તાર જાણતા હોઈએ, તો કણનાં $t = 0$ પરના સ્થાનાંતર પરથી ϕ શોધી શકાય છે. સમાન A અને ω હોય તેવી પરંતુ જુદી કળાઓ ϕ ધરાવતી બે સરળ આવર્તગતિઓને આકૃતિ 14.7(b)માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 14.7 (b) સમીકરણ 14.4 પરથી મેળવેલ આલેખ વક્રો 3 અને 4 અનુક્રમે $\phi = 0$ અને $-\pi/4$ માટેના છે. આ બંને વક્રો માટે કંપવિસ્તાર સમાન છે.

અંતમાં, રાશિ ω એ ગતિના આવર્તકાળ T સાથે સંબંધિત છે તેમ જોઈ શકાય છે. સરળતા માટે, સમીકરણ (14.4)માં $\phi = 0$ લેતાં, આપણને

$$x(t) = A \cos \omega t \qquad (14.5)$$

મળે છે. આ ગતિ, આવર્તકાળ T સાથે આવર્ત હોવાનાં કારણે $x(t)$ એ $x(t + T)$ છે. એટલે કે,

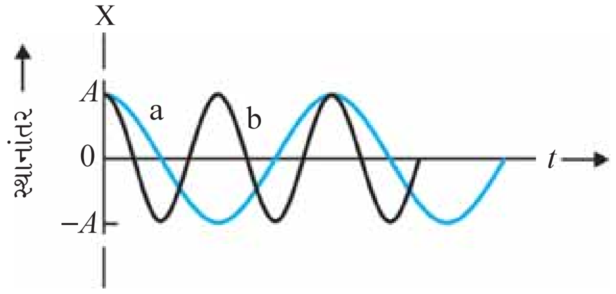
$$A \cos \omega t = A \cos \omega (t + T) \qquad (14.6)$$

હવે cosine વિધેય એ આવર્તકાળ 2π સાથે આવર્ત છે, એટલે કે જ્યારે તેની કળામાં 2π વધારો થાય ત્યારે તે પોતાનું પોતે પુનરાવર્તન કરે છે. આમ,

$$\omega (t + T) = \omega t + 2\pi$$

આમ, $\omega = 2\pi/T$ (14.7)

ω ને સ.આ.ગ.ની કોણીય આવૃત્તિ કહે છે. કોણીય આવૃત્તિનો SI એકમ રેડિયન / સેકન્ડ (redian per second) છે. દોલનોની આવૃત્તિ એ $1/T$ છે. તેથી ω એ દોલનની આ આવૃત્તિથી 2π ગણી છે. સમાન A અને ϕ હોય શકે તેવી પરંતુ જુદી ω ધરાવતી બે સરળ આવર્તગતિઓને આકૃતિ 14.8માં દર્શાવેલ છે. આ આલેખમાં વક્ર a કરતાં વક્ર b નો આવર્તકાળ અડધો છે અને આવૃત્તિ બમણી છે.



આકૃતિ **14.8** *સમીકરણ (14.4)ના ϕ = 0 માટે બે જુદા આવર્તકાળ માટેના આલેખો*

> **ઉદાહરણ 14.3** નીચેનામાંથી સમયનાં કયા વિધેયો (a) સરળ આવર્તગતિ અને (b) આવર્ત પરંતુ સરળ આવર્ત નથી તેમ રજૂ કરે છે. દરેક કિસ્સા માટે આવર્તકાળ આપો.
>
> (1) $\sin \omega t - \cos \omega t$
>
> (2) $\sin^2 \omega t$

ઉકેલ

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$= \sin \omega t - \sin (\pi/2 - \omega t)$

$= 2 \cos (\pi/4) \sin (\omega t - \pi/4)$

$= \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/4)$

આ વિધેય આવર્તકાળ $T = 2\pi/\omega$ અને કળા-કોણ $(-\pi/4)$ અથવા $(7\pi/4)$ ધરાવતી સરળ આવર્તગતિ દર્શાવે છે.

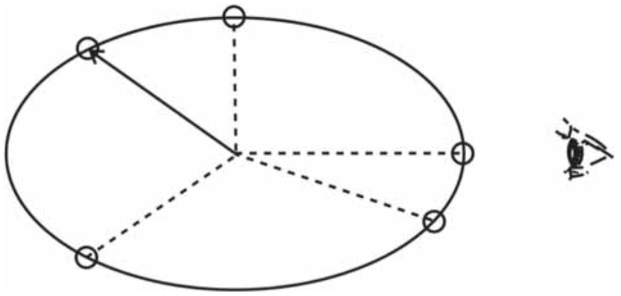
(b) $\sin^2 \omega t$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$

આ વિધેય આવર્ત છે જેનો આવર્તકાળ $T = \pi/\omega$ છે. તે એવી આવર્તગતિ પણ રજૂ કરે છે કે જેનું સંતુલન બિંદુ શૂન્યને બદલે $\frac{1}{2}$ પર આવેલ હોય. ◀

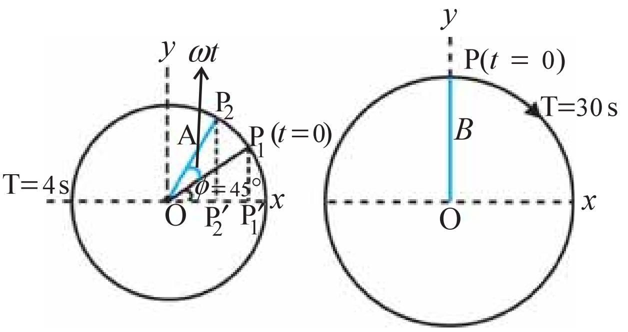
14.4 સરળ આવર્તગતિ અને નિયમિત વર્તુળમય ગતિ (SIMPLE HARMONIC MOTION AND UNIFORM CIRCULAR MOTION)

આ પરિચ્છેદમાં આપણે બતાવીશું કે વર્તુળના વ્યાસ પર નિયમિત વર્તુળમય ગતિનો પ્રક્ષેપ સરળ આવર્તગતિ કરે છે. આ કથનને દ્રશ્યમાન કરવા એક સરળ પ્રયોગ આપણને મદદરૂપ થશે (આકૃતિ 14.9). કોઈ દોરીના એક છેડે એક દડાને બાંધો અને તેને નિયત બિંદુને અનુલક્ષીને સમક્ષિતિજ સમતલમાં અચળ કોણીય ઝડપ સાથે ગતિ કરાવો. આ દડો પછી સમક્ષિતિજ સમતલમાં નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરશે. ગતિના સમતલમાં તમારું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીને દડાનું બાજુ પરથી અથવા સામેથી અવલોકન કરો. આ દડો સમક્ષિતિજ રેખા પર પરિભ્રમણ બિંદુને મધ્યબિંદુ તરીકે લેતા આગળ-પાછળ ગતિ કરતો દેખાશે. તમે વૈકલ્પિક રીતે એક દીવાલ પર પણ આ દડાના પડછાયાનું અવલોકન કરી શકો છો, જે વર્તુળના સમતલને લંબ છે. આ ક્રિયામાં આપણે જે અવલોકન કરી રહ્યાં છીએ તે આપણી જોવાની દિશાને લંબ, વર્તુળના વ્યાસ પર બૉલની ગતિ છે.



આકૃતિ **14.9** *એક સમતલમાં દડાની વર્તુળમય ગતિને ધાર પરથી જોતાં તે સ.આ.ગ. દેખાશે.*

આકૃતિ 14.10 એ આ જ પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક સ્વરૂપ દર્શાવે છે. કોઈ A ત્રિજ્યાના વર્તુળ પર નિયમિત કોણીય ઝડપ ω સાથે ગતિ કરતો કોઈ એક કણ P ધારો. આ પરિભ્રમણની દિશા ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં છે. આ કણનો પ્રારંભિક સ્થાનસદિશ $\mathbf{OP_1}$ X -અક્ષની ધન દિશા



આકૃતિ 14.10

સાથે ϕ ખૂણો આંતરે છે. $\mathbf{OP_1}$નો x-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ OP'_1 છે. t સમયમાં કણનો સ્થાનસદિશ, ωt જેટલો વધુ કોણ આંતરશે અને હવે તેનો સ્થાનસદિશ $\mathbf{OP_2}$, ધન x-અક્ષ સાથે $\omega t + \phi$નો કોણ બનાવશે. ત્યાર બાદ, સ્થાનસદિશ OP_2 નો x-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ OP'_2 હશે. કણ P જેમ જેમ વર્તુળ પર ગતિ કરે છે, તેમ તેમ P'નું x-અક્ષ પરનું સ્થાન

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

વડે આપવામાં આવે છે,

જે સ.આ.ગ.ને વ્યાખ્યાયિત કરતું સમીકરણ છે. આ દર્શાવે છે કે જો કણ P એ નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરે, તો તેનો પ્રક્ષેપ P' એ વર્તુળના વ્યાસ પર સ.આ.ગ. કરે છે. આ કણ P અને આ વર્તુળ કે જેના પર તે ગતિ કરે છે તેને ઘણી વાર અનુક્રમે **સંદર્ભકણ (reference particle)** અને **સંદર્ભવર્તુળ (reference circle)** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

આપણે Pની ગતિનો પ્રક્ષેપ કોઈ પણ વ્યાસ પર લઈ શકીએ છીએ, જેમકે y-અક્ષ પર. આ કિસ્સામાં P'નું y-અક્ષ પરનું સ્થાનાંતર

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

વડે આપવામાં આવે છે, તે પણ x-અક્ષ પરના પ્રક્ષેપના સમાન કંપવિસ્તારની પરંતુ $\pi/2$ કળાથી ભિન્ન એવી એક સ.આ.ગ. છે.

વર્તુળમય અને સ.આ.ગ. વચ્ચે આવો સંબંધ હોવા છતાં, રેખીય સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણ પર લાગતું બળ એ કણને નિયમિત વર્તુળમય ગતિમાં રાખવા જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ કરતાં સદંતર ભિન્ન પ્રકારનું હોય છે.

ઉદાહરણ 14.4 આકૃતિ 14.10 એ બે વર્તુળમય ગતિ દર્શાવે છે. આ આકૃતિમાં વર્તુળની ત્રિજ્યા, ભ્રમણનો આવર્તકાળ, પ્રારંભિક સ્થિતિ અને ભ્રમણની દિશા દર્શાવવામાં આવેલ છે. પ્રત્યેક કિસ્સામાં ભ્રમણ કરતાં કણ P ના ત્રિજ્યા-સદિશના X-પ્રક્ષેપની સરળ આવર્તગતિ મેળવો.

ઉકેલ

(a) $t = 0$ પર, OP એ X-અક્ષની (ધન દિશા) સાથે $45° = \pi/4$ radનો એક ખૂણો બનાવે છે. t સમય પછી, તે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં ખૂણો $\frac{2\pi}{T}t$ને આવરી લે છે અને X-અક્ષ સાથે $\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$ ખૂણો બનાવે છે.

t સમયે X-અક્ષ પર OP ના પ્રક્ષેપને

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

$T = 4$ s માટે,

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

જે કંપવિસ્તાર A, આવર્તકાળ 4 s અને પ્રારંભિક કળા* $= \frac{\pi}{4}$ની સ.આ.ગ. (SHM) છે.

(b) $t = 0$ના આ કિસ્સામાં, OP એ X-અક્ષ સાથે $90° = \frac{\pi}{2}$નો કોણ બનાવે છે. t સમય બાદ, તે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની દિશામાં $\frac{2\pi}{T}t$નો કોણ આવરે છે અને તે X-અક્ષ સાથે $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$ ખૂણો

* *કોણનો પ્રાકૃતિક એકમ રેડિયન (Radian) છે, જે ચાપ (arc) અને ત્રિજ્યા (Radius)ના ગુણોત્તર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે. કોણ એ પરિમાણરહિત રાશિ છે. આથી જ્યારે આપણે π, કે તેના ગુણાંક કે ઉપગુણાંકમાં તેનો ઉપયોગ કરીએ ત્યારે હમેશાં એ જરૂરી નથી કે આપણે Radian એકમ દર્શાવવો પડે. Radian અને Degree વચ્ચેનું રૂપાંતરણ Meter અને Centimetre કે Mileના સમરૂપ નથી. જો કોઈ ત્રિકોણમિતીય વિધેયમાં કોણને એકમ વગર દર્શાવેલ હોય, તો તેનો એકમ Radian છે તેમ સમજવાનું. બીજી તરફ, જો ખૂણાનો એકમ Degree તરીકે ઉપયોગ કરવો હોય, તો તે સ્પષ્ટપણે દર્શાવવો જોઈએ. ઉદાહરણ તરીકે, sin (15°) એટલે કે 15 Degreeનો sine થાય છે, પરંતુ sine (15) એટલે કે 15 Radiansનો sin. હવે પછી આપણે ઘણી વાર 'rad' ને એકમ તરીકે નહિ લખીએ અને તે સમજી લઈશું કે જ્યારે કોઈ એકમ વગર કોણને કોઈક સંખ્યાત્મક મૂલ્ય તરીકે ઉલ્લેખ કરવામાં આવેલ હોય, તો તેને radian તરીકે ગણવામાં આવેલ છે.*

બનાવે છે. t સમયે OPનો X-અક્ષ પરના પ્રક્ષેપને

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$T = 30$ s માટે,

$$x(t) = B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

આને $x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right)$ લખતાં, અને સમીકરણ (14.4) સાથે સરખાવતા, આપણને જાણવા મળે છે કે, આ કંપવિસ્તાર B, આવર્તકાળ 30 s અને પ્રારંભિક કળા $-\frac{\pi}{2}$ની સ.આ.ગ (SHM) છે. ◀

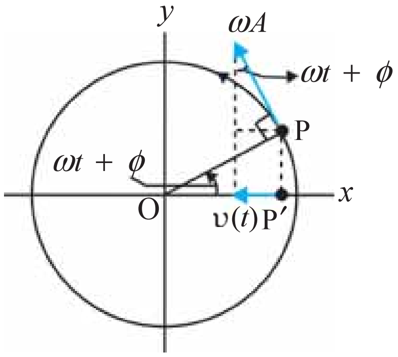
14.5 સરળ આવર્તગતિમાં વેગ અને પ્રવેગ (VELOCITY AND ACCELERATION IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરતા કોઈ એક કણની ઝડપ υ એ આ વર્તુળની ત્રિજ્યા A ના તેની ω કોણીય ઝડપ ગણી હોય છે.

$$\upsilon = \omega A \qquad (14.8)$$

કોઈ પણ t સમયે વેગ **υ**ની દિશા એ આ સમયે કણ જે સ્થાને છે તે વર્તુળ પરના બિંદુના સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે. આકૃતિ 14.11ની ભૂમિતિ પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે, પ્રક્ષેપ કણ P'નો t સમયે વેગ

$$\upsilon(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \text{ છે.} \qquad (14.9)$$



*આકૃતિ 14.11 કણ P' નો વેગ $\upsilon(t)$, એ સંદર્ભ કણ Pના વેગ **υ**નો પ્રક્ષેપ છે.*

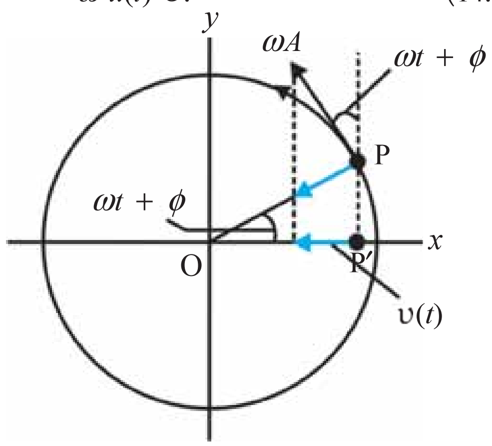
જ્યાં ઋણ ચિહ્ન દર્શાવે છે કે $\upsilon(t)$ની દિશા એ ધન X-અક્ષની વિરુદ્ધ દિશા છે. સમીકરણ (14.9) સ.આ.ગ. કરતાં કોઈ એક કણનો તાત્ક્ષણિક વેગ આપે છે, જ્યાં સ્થાનાંતરને સમીકરણ (14.4) વડે આપવામાં આવે છે. સમીકરણ (14.4)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં, આપણે કોઈ પણ ભૌમિતિક દલીલ વગર પણ આ સમીકરણ મેળવી શકીએ છીએ.

$$\upsilon(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad (14.10)$$

સ.આ.ગ. કરતાં કોઈ કણનો તત્કાલિન પ્રવેગ મેળવવા માટે પણ આપણે આ જ રીતે સંદર્ભ વર્તુળની રીતનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરતાં P કણના કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું માન υ^2/A કે $\omega^2 A$ છે તથા તે કેન્દ્ર તરફ દિશામાન છે, એટલે કે દિશા PO તરફ છે. આમ પ્રક્ષેપ કણ P'નો તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ (આકૃતિ 14.12 જુઓ).

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \text{ છે.} \qquad (14.11)$$



*આકૃતિ 14.12 કણ P'નો પ્રવેગ $a(t)$એ સંદર્ભ કણ Pના પ્રવેગ **a**નો પ્રક્ષેપ છે.*

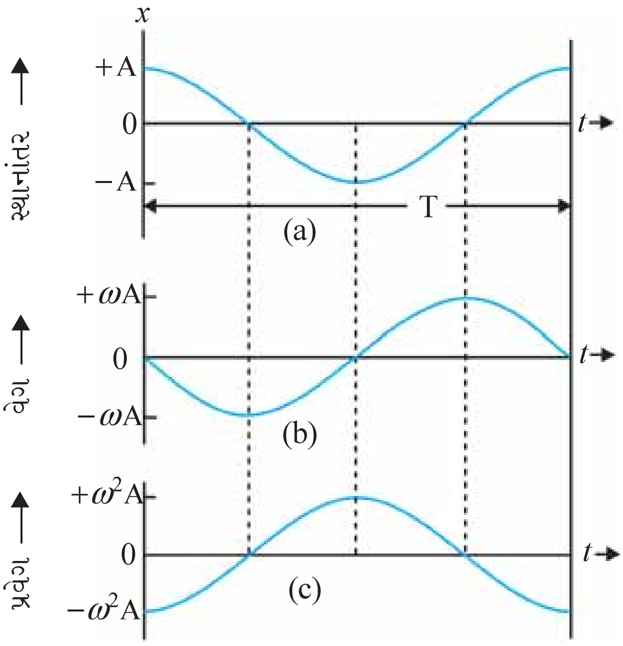
સમીકરણ (14.11) એ સ.આ.ગ. કરતાં કણનો પ્રવેગ દર્શાવે છે. સમીકરણ (14.9) દ્વારા આપવામાં આવતા વેગ $\upsilon(t)$ નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં સીધું જ ફરીથી આ સમીકરણ મેળવી શકાય છે :

$$a(t) = \frac{d}{dt}\upsilon(t) \qquad (14.12)$$

આપણે સમીકરણ (14.11) પરથી એક મહત્ત્વપૂર્ણ પરિણામ નોંધીએ કે સ.આ.ગ.માં પ્રવેગ એ સ્થાનાંતરને સમપ્રમાણ હોય છે. $x(t) > 0$ માટે $a(t) < 0$ અને $x(t) < 0$ માટે $a(t) > 0$. આમ, $-A$ અને Aની વચ્ચેના x નાં કોઈ પણ મૂલ્ય માટે પ્રવેગ $a(t)$ એ હંમેશાં કેન્દ્ર તરફ જ દિશામાન હોય છે.

સરળતા માટે, $\phi = 0$ મૂકો અને $x(t)$, $\upsilon(t)$ અને $a(t)$નાં સમીકરણો લખો.

$x(t) = A \cos \omega t$, $\upsilon(t) = -\omega A \sin \omega t$ અને $a(t) = -\omega^2 A \cos \omega t$. આને અનુરૂપ આલેખો આકૃતિ 14.13માં દર્શાવેલ છે. આ બધી જ રાશિઓ સમય સાથે sine પ્રકારે (જ્યાવર્તિય - sinusoidally) બદલાય છે; ફક્ત તેઓના મહત્તમોમાં ફેરફાર છે અને આ અલગઅલગ આલેખોની કળા જુદી-જુદી છે. x એ $-A$ થી Aની વચ્ચે; $\upsilon(t)$ એ $-\omega A$ થી ωAની વચ્ચે અને $a(t)$ એ $-\omega^2 A$થી $\omega^2 A$ની વચ્ચે બદલાય છે. સ્થાનાંતરના આલેખની સાપેક્ષે, વેગના આલેખમાં કળા-તફાવત $\pi/2$ છે અને પ્રવેગના આલેખમાં કળા-તફાવત π છે.



આકૃતિ **14.13** *સરળ આવર્તગતિ કરતા કોઈ એક કણના સ્થાનાંતર વેગ અને પ્રવેગ સમાન આવર્તકાળનાં છે પણ કળામાં ભિન્ન છે.*

> *ઉદાહરણ 14.5* એક પદાર્થ
>
> $$x = 5 \cos [2\pi t + \pi/4]$$
>
> સમીકરણ (SI એકમોમાં) અનુસાર સ.આ.ગ. કરે છે. $t = 1.5$ s માટે આ પદાર્થના (a) સ્થાનાંતર (b) ઝડપ અને (c) પ્રવેગની ગણતરી કરો.

ઉકેલ આ પદાર્થની કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 2\pi \ s^{-1}$ અને તેનો આવર્તકાળ T = 1 s છે.

$t = 1.5$ s માટે

(a) સ્થાનાંતર $= (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \ s^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$

$= (5.0 \text{ m}) \cos [(3\pi + \pi/4)]$

$= -5.0 \times 0.707 \text{ m}$

$= -3.535 \text{ m}$

(b) સમીકરણ (14.9)નો ઉપયોગ કરતાં આ પદાર્થની ઝડપ

$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \ s^{-1}) \sin [(2\pi \ s^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$

$= -(5.0 \text{ m}) (2\pi \ s^{-1}) \sin [(3\pi + \pi/4)]$

$= 10\pi \times 0.707 \text{ m s}^{-1}$

$= 22 \text{ m s}^{-1}$

(c) સમીકરણ (14.11)નો ઉપયોગ કરતાં આ પદાર્થનો પ્રવેગ

$= -(2\pi \ s^{-1})^2 \times$ સ્થાનાંતર

$= -(2\pi \ s^{-1})^2 \times (-3.535 \text{ m})$

$= 140 \text{ m s}^{-2}$ ◀

14.6 સરળ આવર્તગતિ માટે બળનો નિયમ (FORCE LAW FOR SIMPLE HARMONIC MOTION)

ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ અને સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણના પ્રવેગના સમીકરણ (14.11)નો ઉપયોગ કરતાં સ.આ.ગ. કરતાં m દ્રવ્યમાનના કણ પર લાગતું બળ

$$F(t) = ma$$

$$= -m\omega^2 x(t)$$

છે. એટલે કે $F(t) = -k\,x(t)$ (14.13)

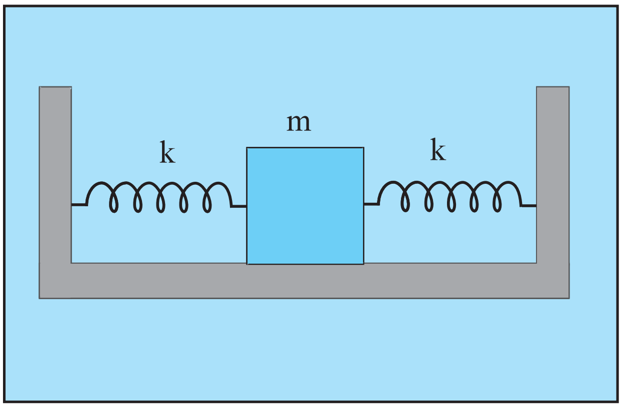
જ્યાં $k = m\omega^2$ (14.14a)

અથવા $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (14.14b)

પ્રવેગની જેમ, આ બળ પણ હંમેશાં મધ્યમાન સ્થાનની દિશા તરફનું હોય છે. તેથી તેને સ.આ.ગ.માં ક્યારેક પુનઃસ્થાપક બળ (Restoring Force) પણ કહેવામાં આવે છે. અત્યાર સુધીની ચર્ચાની સમીક્ષા કરીએ તો સરળ આવર્તગતિને બે સમતુલ્ય રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. સ્થાનાંતર માટેના સમીકરણ (14.4) વડે કે તેના બળના નિયમ કે જે સમીકરણ (14.13) વડે આપવામાં આવે છે. સમીકરણ (14.4)થી સમીકરણ (14.13) તરફ જવા તેનું બે વખત વિકલન કરવું પડે. તેવી જ રીતે, સમીકરણ (14.13)નું બે વખત સંકલન કરતાં આપણને પાછું સમીકરણ (14.4) મળે.

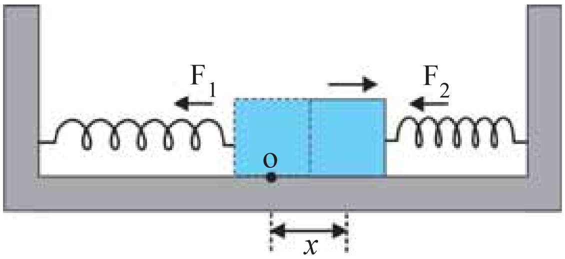
નોંધો કે સમીકરણ (14.13)માનું બળ $x(t)$ને (રેખીય) સમપ્રમાણમાં ચલે છે. કોઈ કણ કે જે આવા બળની અસરમાં દોલન કરતો હોય, તો તેને રેખીય આવર્ત દોલક કહેવામાં આવે છે. વાસ્તવિક જગતમાં, આ બળ x^2, x^3 વગેરે સાથે ચલિત નાની વધારાની પદાવલિઓ પણ ધરાવે છે. ત્યારે આવાં દોલકોને અરેખીય દોલકો (NonLinear Oscilliators) કહેવાય છે.

> *ઉદાહરણ 14.6* આકૃતિ 14.14માં બતાવ્યા પ્રમાણે k સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી બે સમાન સ્પ્રિંગો m દ્રવ્યમાન ના બ્લૉક સાથે અને સ્થિર આધાર સાથે જોડાયેલ છે. બતાવો કે જ્યારે આ દ્રવ્યમાન તેની સંતુલન સ્થિતિથી કોઈ પણ બાજુ સ્થાનાંતરિત (વિસ્થાપિત) થાય, ત્યારે તે એક સરળ આવર્તગતિ કરે છે. આ દોલનોનો આવર્તકાળ શોધો.



આકૃતિ 14.14

ઉકેલ આકૃતિ 14.15માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંતુલન સ્થિતિની જમણી બાજુએ ધારો કે, આ દ્રવ્યમાનનું નાના અંતર x જેટલું સ્થાનાંતર થાય છે.



આકૃતિ 14.15

આ પરિસ્થિતિમાં ડાબી બાજુની સ્પ્રિંગ x લંબાઈથી વિસ્તરશે (ખેંચાશે) અને જમણી બાજુની સ્પ્રિંગ એ આ જ લંબાઈથી સંકુચિત થાય છે. આ દ્રવ્યમાન પર લાગતા બળો છે.

$F_1 = -kx$ (ડાબી બાજુ પર સ્પ્રિંગ દ્વારા લગાડવામાં આવતું બળ, જે દ્રવ્યમાનને મધ્યમાન સ્થાન તરફ ખેંચવાનો પ્રયાસ કરે છે.)

$F_2 = -kx$ (જમણી બાજુ પર સ્પ્રિંગ દ્વારા લગાડવામાં આવતું બળ, જે દ્રવ્યમાનને મધ્યમાન સ્થાન તરફ ધકેલવાનો પ્રયાસ કરે છે.)

આમ, દ્રવ્યમાન પર લાગતું ચોખ્ખું બળ F છે,

$F = -2\ kx$

આમ, દ્રવ્યમાન પર લાગતું આ બળ તેના સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં અને મધ્યમાન સ્થાન તરફ દિશામાન છે, માટે આ કણની ગતિએ સરળ આવર્તગતિ છે. આ દોલનનો આવર્તકાળ છે,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$ ◀

14.7 સરળ આવર્તગતિમાં ઊર્જા (ENERGY IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

સરળ આવર્તગતિ કરતા કોઈ પણ કણની ગતિઊર્જા (kinetic energy) અને સ્થિતિઊર્જા (potential energy) શૂન્ય અને તેમનાં મહત્તમ મૂલ્યો વચ્ચે બદલાતી રહે છે.

પરિચ્છેદ 14.5માં આપણે જોયું છે કે સ.આ.ગ. કરતા કણનો વેગ એ સમયનું આવર્ત વિધેય છે. તે સ્થાનાંતરના અંતિમ સ્થાનોએ શૂન્ય છે. તેથી આવા કણની ગતિઊર્જા (K)ને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$K = \frac{1}{2}\ m\upsilon^2$$

$$= \frac{1}{2}\ m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}\ k A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (14.15)$$

જે સમયનું આવર્ત વિધેય પણ છે, જ્યારે સ્થાનાંતર મહત્તમ હોય છે ત્યારે તે શૂન્ય હોય છે અને જ્યારે કણ મધ્યમાન સ્થાન પર હોય છે ત્યારે તે મહત્તમ હોય છે. નોંધો કે Kમાં υની નિશાનીનો કોઈ અર્થ નથી, તેથી Kનો આવર્તકાળ T/2 છે.

સરળ આવર્તગતિ કરતા કણની સ્થિતિઊર્જા (PE) શું છે ? પ્રકરણ 6માં, આપણે જોયું છે કે સ્થિતિઊર્જાની સંકલ્પના ફક્ત સંરક્ષી બળો (Conservative Forces) માટે જ શક્ય છે. સ્પ્રિંગ બળ $F = -\ kx$ એ સંરક્ષી બળ છે, જેની સાથે સંકળાયેલ સ્થિતિઊર્જા

$$U = \frac{1}{2}\ k\ x^2 \qquad (14.16)$$

છે. તેથી સરળ આવર્તગતિ કરતા કણની સ્થિતિઊર્જા

$$U(x) = \frac{1}{2}\ k\ x^2$$

$$= \frac{1}{2}\ k\ A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (14.17)$$

આમ સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણની સ્થિતિઊર્જા પણ આવર્ત છે, જેનો આવર્તકાળ T/2 છે, જે મધ્યમાન સ્થાને શૂન્ય છે અને મહત્તમ સ્થાનાંતરો માટે મહત્તમ છે.

સમીકરણ (14.15) અને (14.17) પરથી તંત્રની કુલ ઊર્જા E છે :

$$E = U + K$$

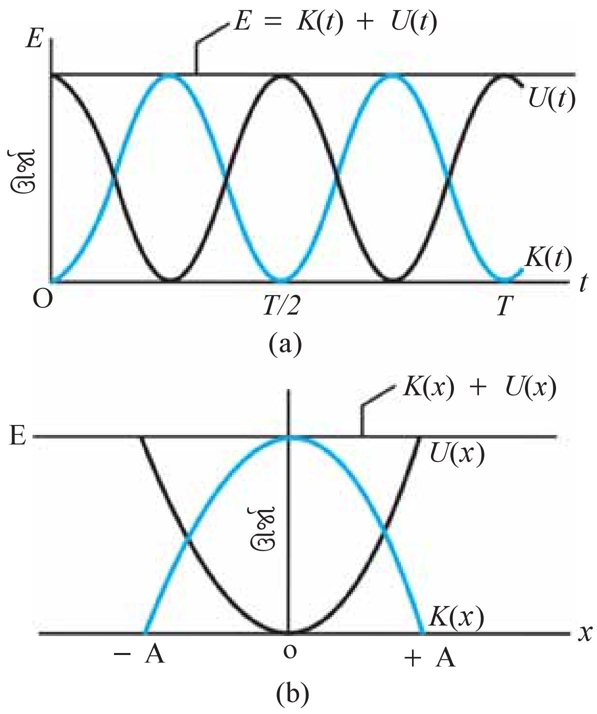
$$= \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} kA^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)]$$

ત્રિકોણમિતિના જાણીતા સંબંધનો ઉપયોગ કરતાં કૌંસમાં રહેલ રાશિનું માન એક છે. આમ,

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \qquad (14.18)$$

આમ, કોઈ પણ દોલકની કુલ યાંત્રિકઊર્જા એ સમયથી સ્વતંત્ર છે જે કોઈ પણ સંરક્ષી બળોને આધીન ગતિ માટે અપેક્ષિત છે. રેખીય સરળ આવર્ત દોલકની સ્થિતિ અને ગતિઊર્જા, સમય અને સ્થાનાંતર પર આધારિત છે એ આકૃતિ 14.16માં બતાવવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ 14.16 (a) *સ.આ.ગ. કરતા કોઈ એક કણ માટે ગતિઊર્જા, સ્થિતિઊર્જા અને કુલ ઊર્જાને સમયના વિધેય તરીકે [(a)માં દર્શાવેલ છે] અને સ્થાનાંતરના વિધેય તરીકે [(b)માં દર્શાવેલ છે]. ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા બંનેનું $T/2$ સમય બાદ પુનરાવર્તન થાય છે. કુલ ઊર્જા દરેક t કે x માટે અચળ રહે છે.*

આકૃતિ 14.16માં એ નિરીક્ષણ કરો કે સ.આ.ગ.માં ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા એ બંને હમેશાં ધન છે. ગતિઊર્જા ખરેખર ક્યારે પણ ઋણ હોતી નથી કારણ કે તે ઝડપના વર્ગના પ્રમાણમાં ચલે છે. સ્થિતિઊર્જાના અજ્ઞાત અચળાંકની પસંદગીના કારણે સ્થિતિઊર્જા ધન હોય છે. ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા એ બંને પ્રત્યેક આવર્તકાળ દરમિયાન બે વખત અંતિમ મહત્તમ બને છે. $x = 0$ માટે, બધી જ ઊર્જા ગતિઊર્જા છે અને સીમાઓ $x = \pm A$ માટે તે બધી જ સ્થિતિઊર્જા છે. ગતિ દરમિયાન, આ ચરમ સ્થાનો વચ્ચે, સ્થિતિઊર્જાના ઘટવાથી ગતિઊર્જામાં વધારો થાય છે અથવા આનાથી ઊલટું થતું હોય છે.

▶ *ઉદાહરણ 14.7 એક બ્લૉક જેનું દ્રવ્યમાન 1 kg છે તેને સ્પ્રિંગ સાથે બાંધેલ છે. આ સ્પ્રિંગનો સ્પ્રિંગ અચળાંક 50 $N\ m^{-1}$ છે. આ બ્લૉકને ઘર્ષણરહિત સપાટી પર $t = 0$ સમયે તેના સંતુલન સ્થાન $x = 0$ આગળ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ખેંચીને $x = 10$ cm અંતરે લાવવામાં આવે છે. જ્યારે તે મધ્યમાન સ્થિતિથી 5 સેમી દૂર છે ત્યારે આ બ્લૉકની ગતિઊર્જા, સ્થિતિઊર્જા અને કુલ ઊર્જાની ગણતરી કરો.*

ઉકેલ આ બ્લૉક સ.આ.ગ. કરે છે, સમીકરણ (14.14b) પ્રમાણે, તેની કોણીય આવૃત્તિ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

વડે આપવામાં આવે છે.

$$\omega = \sqrt{\frac{50\ \text{N m}^{-1}}{1\ \text{kg}}}$$

$$= 7.07 \text{ rad s}^{-1}$$

તેથી કોઈ પણ t સમયે, તેના સ્થાનાંતરને

$$x(t) = 0.1 \cos (7.07t)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

જ્યારે બ્લૉક તેના મધ્યમાન સ્થળેથી 5 cm દૂર હશે ત્યારે આપણી પાસે

$$0.05 = 0.1 \cos (7.07t)$$

અથવા $\cos (7.07t) = 0.5$ અને તેથી

$$\sin (7.07t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

આ બ્લૉકનો x = 5 cm પરનો વેગ

$= 0.1 \times 7.07 \times 0.866 \text{ m s}^{-1}$

$= 0.61 \text{ m s}^{-1}$

તેથી આ બ્લૉકની ગ.ઊ.

$= \frac{1}{2} m \upsilon^2$

$= \frac{1}{2} [1 \text{ kg} \times (0.6123 \text{ m s}^{-1})^2]$

$= 0.19$ J

આ બ્લૉકની સ્થિતિઊર્જા

$= \frac{1}{2} k x^2$

$= \frac{1}{2} (50 \text{ N m}^{-1} \times 0.05 \text{ m} \times 0.05 \text{ m})$

$= 0.0625$ J

x = 5 cm પર બ્લૉકની કુલ ઊર્જા

= K. E. + P. E.

= 0.25 J

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, મહત્તમ સ્થાનાંતર પર ગતિઊર્જા શૂન્ય છે અને તેથી પ્રણાલીની કુલ ઊર્જા એ સ્થિતિઊર્જા બરાબર હોય છે. તેથી, પ્રણાલીની કુલ ઊર્જા

$= \frac{1}{2} (50 \text{ N m}^{-1} \times 0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m})$

$= 0.25$ J

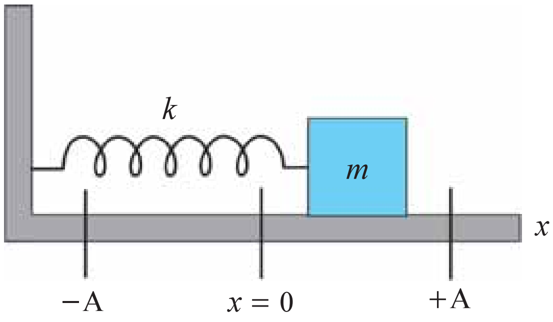
આ ઊર્જા 5 cmના સ્થાનાંતર પર બંને ઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે. આ ઊર્જા-સંરક્ષણ સિદ્ધાંતનું સમર્થન કરનારું છે. ◀

14.8 સરળ આવર્તગતિ કરતાં કેટલાંક તંત્રો (SOME SYSTEMS EXECUTING SIMPLE HARMONIC MOTION)

સંપૂર્ણ શુદ્ધ **સરળ આવર્તગતિ**નાં કોઈ ભૌતિક ઉદાહરણો નથી. વ્યવહારમાં આપણે ચોક્કસ શરતોને આધિન લગભગ સરળ આવર્તગતિ કરતાં તંત્રોને જોયાં છે. આ વિભાગના અનુગામી ભાગમાં, આપણે આવાં કેટલાંક તંત્રો દ્વારા કરવામાં આવતી ગતિની ચર્ચા કરીશું.

14.8.1 એક સ્પ્રિંગને લીધે દોલનો (Oscillations due to a Spring)

સરળ આવર્તગતિનું સરળ દેખીતું ઉદાહરણ એ આકૃતિ 14.17માં બતાવ્યા પ્રમાણે કોઈ દૃઢ દીવાલ સાથે જોડેલ સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ m દળના કોઈ એક બ્લૉકનાં નાનાં દોલનો છે. આ બ્લૉકને ઘર્ષણરહિત સમક્ષિતિજ સપાટી પર મૂકવામાં આવેલ છે. જો બ્લૉકને એક બાજુએ ખેંચીને છોડવામાં આવે તો તે પછી મધ્યમાન સ્થાનને અનુલક્ષીને આગળ-પાછળ ગતિ કરે છે. અહીં $x = 0$ એ જ્યારે સ્પ્રિંગ સંતુલનમાં હોય ત્યારે બ્લૉકના કેન્દ્રની સ્થિતિ દર્શાવે છે. $-A$ અને $+A$ વડે દર્શાવેલ



આકૃતિ **14.17** *એક રેખીય સરળ આવર્ત દોલક જે સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ m દ્રવ્યમાનનો એક બ્લૉક ધરાવે છે. આ બ્લૉક ઘર્ષણરહિત સપાટી પર ગતિ કરે છે. આ બ્લૉકને જ્યારે ખેંચીને કે ધકેલીને છોડી દેતાં, તે સરળ આવર્તગતિ કરે છે.*

સ્થાનો, મધ્યસ્થાન સ્થાનેથી ડાબી અને જમણી તરફના મહત્તમ સ્થાનાંતરો દર્શાવે છે. આપણે પહેલાં શીખ્યાં જ છીએ કે સ્પ્રિંગને વિશિષ્ટ ગુણધર્મો છે, જેને સૌ પ્રથમ અંગ્રેજી ભૌતિકશાસ્ત્રી રોબર્ટ હૂક દ્વારા શોધવામાં આવ્યા હતા. તેમણે બતાવ્યું હતું કે આવી પ્રણાલીને જ્યારે વિરૂપિત કરવામાં આવે છે ત્યારે તેના પર પુનઃસ્થાપક બળ લાગે છે, જેનું માન, વિરૂપણ અથવા સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં છે અને તે વિરુદ્ધ દિશામાં કાર્ય કરે છે. તેને હૂકના નિયમ (પ્રકરણ 9) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સ્પ્રિંગની લંબાઈની તુલનામાં નાના સ્થાનાંતર માટે તે સાચો જળવાય છે. કોઈ પણ t સમયે, જો મધ્યમાન સ્થાનેથી બ્લૉકનું સ્થાનાંતર x હોય, તો બ્લૉક પર કાર્યરત પુનઃસ્થાપક બળ F

$$F(x) = -kx \qquad (14.19)$$

છે. સપ્રમાણતાના અચળાંક, kને સ્પ્રિંગ અચળાંક કહેવાય છે, જેનું મૂલ્ય સ્પ્રિંગની સ્થિતિસ્થાપકતાના ગુણધર્મો વડે અંકુશિત થાય છે. કડક સ્પ્રિંગ માટે kનું મૂલ્ય મોટું અને કોઈ મૃદુ (નરમ) સ્પ્રિંગ માટે kનું મૂલ્ય નાનું હોય છે. સમીકરણ (14.19) એ સ.આ.ગ.ના બળના નિયમ જેવું જ છે અને તેથી આ પ્રણાલી સરળ આવર્તગતિ કરે છે. સમીકરણ (14.14) પરથી આપણને

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (14.20)$$

મળે છે અને દોલકના આવર્તકાળ, Tને

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (14.21)$$

દ્વારા આપવામાં આવે છે.

સખત સ્પ્રિંગ મોટા મૂલ્યનો k (સ્પ્રિંગ અચળાંક) ધરાવે છે. સમીકરણ (14.20) અનુસાર, નાના દ્રવ્યમાન mનો કોઈ એક બ્લૉક કોઈ કડક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ હોય, તો તે મોટી દોલન આવૃત્તિ ધરાવશે, જે ભૌતિકીય ધારણા પ્રમાણે છે.

▶ *ઉદાહરણ 14.8* એક 500 N m^{-1} સ્પ્રિંગ અચળાંક ધરાવતી સ્પ્રિંગની સાથે 5 kg નો કૉલર (પટ્ટો) જોડાયેલ છે. તે ઘર્ષણ વગર સમક્ષિતિજ સળિયા પર સરકે છે. આ કૉલર તેના સંતુલન સ્થાનેથી 10.0 cm સ્થાનાંતરિત થઈ અને મુક્ત થાય છે. આ કૉલર માટે
(a) દોલનોનો આવર્તકાળ
(b) મહત્તમ ઝડપ અને
(c) મહત્તમ પ્રવેગની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

(a) સમીકરણ (14.21) વડે આ દોલનનો આવર્તકાળ આપવામાં આવે છે,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5.0\,\text{kg}}{500\,\text{N m}^{-1}}}$$

$$= (2\pi/10)\ \text{s}$$

$$= 0.63\ \text{s}$$

(b) સ.આ.ગ. કરતા આ કૉલરનો વેગ

$$\upsilon(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

વડે આપવામાં આવે છે

તથા મહત્તમ ઝડપ

$$\upsilon_m = A\omega$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{500\,\text{N m}^{-1}}{5\,\text{kg}}}$$

$$= 1\ \text{m s}^{-1}$$

અને તે $x = 0$ પર પ્રાપ્ત થાય છે.

(c) સંતુલન સ્થિતિમાંથી થયેલ સ્થાનાંતર $x(t)$ પર આ કૉલરનો પ્રવેગ $a(t) = -\omega^2 x(t)$ વડે અપાય છે.

$$a(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

તેથી મહત્તમ પ્રવેગ

$$a_{max} = \omega^2 A \text{ છે,}$$

$$a_{max} = \frac{500\,\text{N m}^{-1}}{5\,\text{kg}} \times 0.1\ \text{m}$$

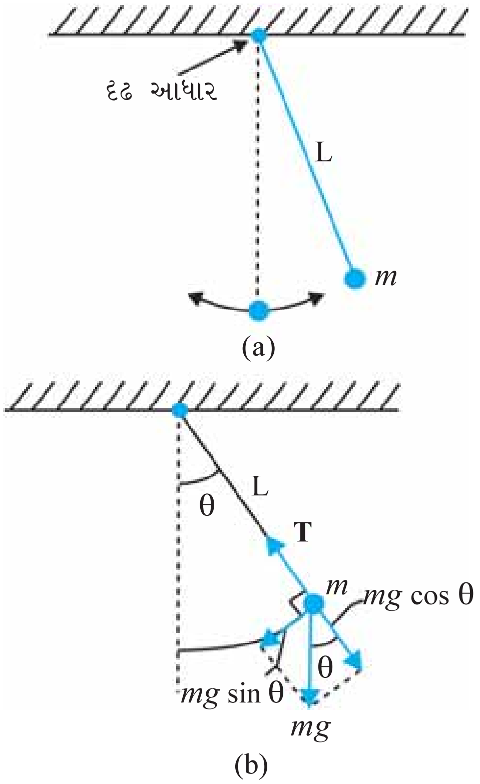
$$= 10\ \text{m s}^{-2}$$

અને તે સીમાંત બિંદુઓએ જોવા મળે છે. ◀

14.8.2 સાદું લોલક (Simple Pendulum)

એવું કહેવાય છે કે ગેલેલિયોએ તેના નાડીના ધબકાર દ્વારા ચર્ચમાં ઝૂલતાં ઝૂમરના આવર્તકાળનું માપન કર્યું હતું. તેમણે જોયું કે ઝૂમરની ગતિ આવર્ત હતી. આ પ્રણાલી એ એક પ્રકારના લોલક જેવી છે. આશરે 100 cm લાંબી ખેંચી ન શકાય તેવી એક દોરી પર પથ્થરના એક ટુકડાને બાંધીને તમે પણ તમારું પોતાનું લોલક બનાવી શકો છો. તમારા લોલકને યોગ્ય આધારથી લટકાવો જેથી તે મુક્ત રીતે દોલન કરી શકે. પથ્થરને એક બાજુ એક નાના અંતરનું સ્થાનાંતર આપી અને તેને છોડી દો. આ પથ્થર આગળ-પાછળ ગતિ કરે છે, જે આવર્તિ છે જેનો આવર્તકાળ લગભગ 2 s છે.

આપણે હવે એમ દર્શાવીશું કે આ આવર્તગતિ એ મધ્યમાન સ્થાનેથી નાનાં સ્થાનાંતરો માટે સરળ આવર્તગતિ છે. એક સાદું લોલક લો, જેમાં m દ્રવ્યમાનના એક નાના ગોળાને ખેંચી ન શકાય તેવી, વજનરહિત, L લંબાઈની દોરી સાથે બાંધવામાં આવેલ છે. એ દોરીનો બીજો છેડો છતના આધાર સાથે બાંધેલ છે. આ ગોળા એક સમતલમાં, આધાર બિંદુમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વ રેખાને અનુલક્ષીને દોલનો કરે છે. આકૃતિ 14.18(a) આ પ્રણાલી દર્શાવે છે. આકૃતિ 14.18(b) એ સાદા લોલકનો આ ગોળા પર કાર્ય કરતાં બળોને દર્શાવતો free body diagram (મુક્ત પદાર્થ રેખાચિત્ર) છે.



આકૃતિ **14.18** (a) *પોતાનાં મધ્યસ્થાન સ્થાનને અનુલક્ષીને દોલન કરતો એક ગોળો.* (b) *ત્રિજ્યાવર્તી બળ T- mg* cos θ *એ કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડે છે પણ આધારને અનુલક્ષીને કોઈ ટૉર્ક નથી. સ્પર્શીય બળ mg* sin θ *એ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક પૂરું પાડે છે.*

દોરીનો ઊર્ધ્વ સાથે બનતો કોણ θ છે. જ્યારે આ ગોળો સંતુલન સ્થાનમાં હોય ત્યારે $\theta = 0$.

આ ગોળો પર ફક્ત બે બળો લાગે છે : દોરીમાંનું તણાવ બળ (Tension) **T** અને ગુરુત્વાકર્ષણ બળ ($= m\,g$). આ બળ $m\,g$ને દોરીની દિશામાં m g cos θ [ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક (રેડિયલ કમ્પોનન્ટ)] અને તેને લંબ $m\,g$ sin θ [સ્પર્શીય ઘટક (ટેંજેન્શિયલ કમ્પોનન્ટ)]માં વિભાજિત કરી શકાય છે. આ ગોળાની ગતિ જેનું કેન્દ્ર આધારબિંદુ હોય તેવા L ત્રિજ્યાના વર્તુળ પરની ગતિ છે, તેથી આ ગોળો ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ ($\omega^2 L$) ધરાવે છે અને તેને એક સ્પર્શીય પ્રવેગ પણ છે. આ સ્પર્શીય પ્રવેગ એ વર્તુળના ચાપ પરની અનિયમિત ગતિને કારણે છે. આ ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ એ પરિણામી ત્રિજ્યાવર્તી બળ T-mg cos θ દ્વારા આપવામાં આવે છે, જ્યારે સ્પર્શીય પ્રવેગને mg sin θ વડે આપવામાં આવે છે. આધારને અનુલક્ષીને ટૉર્ક સાથે કામ કરવું વધુ સગવડતાંભર્યું છે, કારણ કે ત્રિજ્યાવર્તી બળ શૂન્ય ટૉર્ક આપે છે. આધારને અનુલક્ષીને ટૉર્ક τ એ સંપૂર્ણપણે બળના સ્પર્શીય ઘટક દ્વારા આપવામાં આવે છે.

$$\tau = -L\,(mg \sin\theta) \tag{14.22}$$

આ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક છે જે કોણીય સ્થાનાંતર ઘટાડવા માટે કાર્ય કરે છે અને તેથી ઋણ સંજ્ઞા છે. ન્યૂટનના ચાકગતિના નિયમ અનુસાર

$$T = I\,\alpha \tag{14.23}$$

જ્યાં I એ આધારબિંદુને અનુલક્ષીને પ્રણાલીની જડત્વની ચાકમાત્રા છે અને α એ તેનો કોણીય પ્રવેગ છે. આમ,

$$I\,\alpha = -mg \sin\theta\, L \tag{14.24}$$

અથવા

$$\alpha = -\frac{m\,g\,L}{I}\sin\theta \tag{14.25}$$

જો આપણે ધારીએ કે સ્થાનાંતર θ એ નાનું છે, તો આપણે આ સમીકરણ (14.25)ને સરળ કરી શકીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે sin θ ને નીચે પ્રમાણે વ્યક્ત કરી શકાય છે :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \mp \ldots \tag{14.26}$$

અહીં, θ radianમાં છે.

હવે જો θ નાનો હોય તો, તો sin θ નું સન્નિકટ θ દ્વારા અંદાજી શકાય છે અને પછી સમીકરણ (14.25)ને

$$\alpha = -\frac{m\,g\,L}{I}\theta \tag{14.27}$$

તરીકે લખી શકાય.

કોષ્ટક 14.1માં, આપણે કોણ θને ડિગ્રીમાં, તેને સમતુલ્ય readiansમાં અને sin θ વિધેયના મૂલ્યની યાદી આપેલ છે.

સ.આ.ગ. SHM કંપવિસ્તાર કેટલો નાનો હોવો જોઈએ ?

જ્યારે તમે સાદા લોલકનો આવર્તકાળ નિર્ધારિત કરવા પ્રયોગ કરો છો, ત્યારે તમારા શિક્ષક તમને કંપવિસ્તાર નાનો રાખવા કહે છે. પરંતુ શું તમે ક્યારેય પૂછ્યું છે કે નાનો એટલે કેટલો નાનો ? 5°, 2°, 1° અથવા 0.5^o જેટલો કંપવિસ્તાર જોઈએ ? અથવા તે 10°, 20° અથવા 30° હોઈ શકે ?

આની અગત્યતા સમજવા માટે, એ વધુ યોગ્ય રહેશે કે જુદા જુદા કંપવિસ્તાર માટે તેનો આવર્તકાળ માપવામાં આવે. અલબત્ત, મોટા કંપવિસ્તાર માટે, તમારે એ કાળજી લેવી પડશે કે લોલક એક ઊર્ધ્વ સમતલમાં દોલન કરે. ચાલો આપણે નાના-કંપવિસ્તારના દોલનના આવર્તકાળને $T(0)$ વડે દર્શાવીએ અને θ_0 કંપવિસ્તાર માટેના આવર્તકાળને $T(\theta_0) = cT(0)$ લખીએ, જ્યાં c એ ગુણાંક પરિબળ છે. જો તમે c વિરુદ્ધ θ_0નો આલેખ દોરો, તો તમને કંઈક અંશે નીચે દર્શાવેલ મૂલ્યો મળશે :

θ_0	:	20°	45°	50°	70°	90°
c	:	1.02	1.04	1.05	1.10	1.18

આનો અર્થ એ થયો કે 20° કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 2 % જેટલી, 50° કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 5 %, 70° કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 10 % અને 90° કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 18 % ત્રુટિ છે.

આ પ્રયોગમાં, તમે ક્યારેય પણ $T(0)$નું માપન કરી શકશો નહિ કારણ કે આનો અર્થ એ છે કે ત્યાં કોઈ આવર્તનો નથી. સૈદ્ધાંતિક રીતે, ફક્ત $\theta = 0$ માટે જ sin θ એ θ ની બરાબર હોય છે. θ નાં અન્ય તમામ મૂલ્યો માટે કેટલીક અચોક્કસતા હશે જ. θ ના વધવા સાથે આ તફાવત વધે છે. તેથી આપણે નક્કી કરવું જોઈએ કે આપણે કેટલી ત્રુટિ ચલાવી શકીએ છીએ. કોઈ માપ ક્યારેય સંપૂર્ણ સચોટ નથી. તમારે આના જેવા અન્ય પ્રશ્નો પર પણ વિચારવું જોઈએ : જેમકે સ્ટૉપવૉચની ચોકસાઈ શું છે ? સ્ટૉપવૉચ શરૂ કરવામાં અને રોકવામાં તમારી પોતાની ચોકસાઈ શું છે ? તમને ખ્યાલ આવશે કે આ સ્તરે તમારા માપનની સચોટતા ક્યારેય 5 % અથવા 10 % કરતાં વધુ સારી નથી હોતી. ઉપર્યુક્ત કોષ્ટક બતાવે છે કે લોલકના આવર્તકાળ 50° કંપવિસ્તારના મૂલ્યની તેના નાના કંપવિસ્તારના મૂલ્યની સરખામણીએ ભાગ્યે જ 5 % વધે છે. તમે તમારા પ્રયોગોમાં 50° જેટલો કંપવિસ્તાર રાખી શકો છો.

આ કોષ્ટકમાંથી એ જોઈ શકાય છે કે 20 ડિગ્રી જેટલા મોટા મૂલ્ય માટે પણ sin θ એ લગભગ એ જ રહે છે જે θ ને **રેડિયનમાં રજૂ કરતાં** થાય.

કોષ્ટક 14.1 sin θ એ કોણ θ ના વિધેય તરીકે

θ (degrees)	θ (radians)	sin θ
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.256
20	0.349	0.342

સમીકરણ (14.27) એ ગાણિતિક રીતે સમીકરણ (14.11)ને સમતુલ્ય છે. ફરક એટલો જ છે કે ચલ તરીકે કોણીય સ્થાનાંતર છે. આમ, આપણે સાબિત કર્યું કે નાના θ માટે આ બૉબની ગતિ એ સરળ આવર્ત છે.

સમીકરણો (14.27) અને (14.11) પરથી,

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

અને

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{14.28}$$

હવે, સાદા લોલકની દોરી દ્રવ્યમાનરહિત છે, તેથી જડત્વની ચાકમાત્રા I એ mL^2 છે. સમીકરણ (14.28) એ ત્યાર બાદ સાદા લોલકના આવર્તકાળ માટેનું પ્રચલિત સૂત્ર આપે છે.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{14.29}$$

ઉદાહરણ 14.9 જે દર સેકન્ડ ટીક કરે છે તેવા સાદા લોલકની લંબાઈ કેટલી થશે ?

ઉકેલ સમીકરણ (14.29) પરથી સાદા લોલકનો આવર્તકાળ નીચે પ્રમાણે આપવામાં આવે છે :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

આ સંબંધ પરથી આપણને મળશે.

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

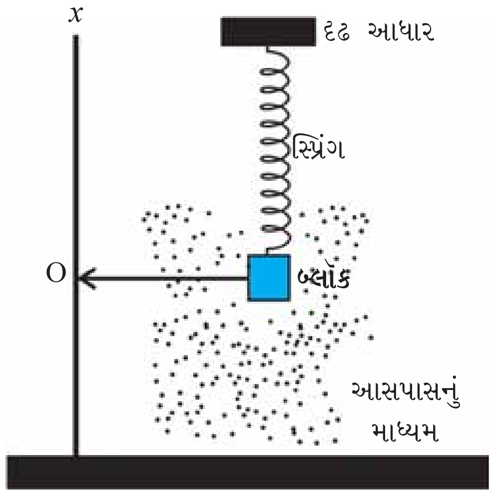
જે દર સેકન્ડ ટીક કરે તેવા સાદા લોલકનો આવર્તકાળ 2 s છે. આમ, g = 9.8 m s^{-2} અને T = 2 s માટે,

$$L = \frac{9.8(\text{m s}^{-2}) \times 4(\text{s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 1 \text{ m}$$

14.9 અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ (DAMPED SIMPLE HARMONIC MOTION)

આપણે જાણીએ છીએ કે હવામાં ઝૂલતાં એક સાદા લોલકની ગતિ, ધીરે ધીરે અંતમાં નષ્ટ થઈ જાય છે. આમ કેમ થાય છે ? આનું કારણ એ છે કે, હવાનું ખેંચાણ (Drag) અને આધાર પરનું ઘર્ષણ (Friction) એ લોલકની ગતિને અવરોધે છે અને તેથી તેની ઊર્જાનો ધીમે ધીમે વ્યય થાય છે. આ લોલકને **અવમંદિત દોલનો (damped oscillations)** કરતું કહેવામાં આવે છે. અવમંદિત દોલનોમાં, જોકે પ્રણાલીની ઊર્જા સતત વ્યય થતી રહે છે. આમ છતાં નાના અવમંદન માટે તે દોલનો દેખીતી રીતે આવર્ત જ રહે છે. આ અવમંદિત બળો સામાન્યપણે ઘર્ષણ બળો છે. દોલકની ગતિ પર આવાં બાહ્ય બળોની અસરને સમજવા માટે, ચાલો આપણે આકૃતિ 14.19માં બતાવ્યા પ્રમાણેનું એક ઉદાહરણ જોઈએ. અહીં k સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડેલ m દ્રવ્યમાનનો એક બ્લૉક એ ઊર્ધ્વતલમાં (શિરોલંબ) દોલન કરે છે. આ બ્લૉકને નીચેની તરફ થોડુંક ખેંચીને મુક્ત કરતાં, તેનાં દોલનની કોણીય આવૃત્તિ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ થશે જે સમીકરણ (14.20)માં જોઈ શકાય છે. જોકે વ્યવહારમાં, આસપાસનું માધ્યમ (હવા) એ આ બ્લૉકની ગતિ પર અવમંદિત બળ લગાડે છે અને આ બ્લૉક-સ્પ્રિંગ પ્રણાલીની યાંત્રિકઊર્જામાં ઘટાડો થશે. ઊર્જાનો આ ઘટાડો એ આસપાસના માધ્યમની (અને બ્લૉકની પણ) ઉષ્મા તરીકે દેખાય છે. [આકૃતિ 14.19]



આકૃતિ 14.19 આસપાસનું શ્યાન માધ્યમ એ દોલિત સ્પ્રિંગ પર એક અવમંદિત બળ લગાડે છે જે અંતમાં તેને સ્થિર કરે છે.

આ અવમંદિત બળો એ આસપાસના માધ્યમની પ્રકૃતિ પર આધારિત હોય છે. જો આ બ્લૉકને પ્રવાહીમાં ડુબાડવામાં આવે, તો અવમંદન ખૂબ વધારે હશે અને ઊર્જાનો વ્યય ઘણો ઝડપી થશે. સામાન્યતઃ, અવમંદન એ બ્લૉકના (કે બૉબ)ના વેગનાં સમપ્રમાણમાં હોય છે [સ્ટૉકનો નિયમ યાદ કરો, સમીકરણ (10.19)] અને વેગની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે. જો અવમંદન બળને $\mathbf{F}_d$ વડે દર્શાવવામાં આવે, તો આપણને

$$\mathbf{F}_d = -b\ \boldsymbol{\upsilon} \qquad (14.30)$$

મળે છે. જ્યાં ધન અચળાંક b એ માધ્યમની લાક્ષણિકતાઓ (ઉદાહરણ તરીકે સ્નિગ્ધતા) અને બ્લૉકના આકાર અને પરિમાણ વગેરે પર આધારિત છે. સમીકરણ (14.30) એ મહદંશે નાના વેગ માટે યથાર્થ છે.

જ્યારે m દ્રવ્યમાનને સ્પ્રિંગ સાથે જોડીને છોડવામાં આવે છે, ત્યારે સ્પ્રિંગ થોડી ખેંચાશે અને આ દ્રવ્યમાન અમુક ઊંચાઈ પર સ્થિર થશે. આકૃતિ 14.20માં આ સ્થિતિને O દ્વારા દર્શાવવામાં આવેલ છે, તે આ દ્રવ્યમાનની સંતુલન સ્થિતિ છે. જો દ્રવ્યમાનને થોડુંક નીચે ખેંચવામાં આવે કે ઉપર ધકેલવામાં આવે, તો સ્પ્રિંગને કારણે બ્લૉક પર પુનઃસ્થાપક બળ $\mathbf{F}_s = -k\mathbf{x}$ લાગે છે, જ્યાં $\mathbf{x}$ એ તેના સંતુલન સ્થાનથી દ્રવ્યમાનનું સ્થાનાંતર છે. આમ, કોઈ પણ t સમયે દ્રવ્યમાન પર લાગતું કુલ બળ $\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\boldsymbol{\upsilon}$ છે. જો t સમયે દ્રવ્યમાનનો પ્રવેગ $\mathbf{a}(t)$ હોય, તો ન્યૂટનના ગતિના દ્વિતીય નિયમ દ્વારા ગતિની દિશાને અનુલક્ષીને, આપણને

$$m\ a(t) = -k\ x(t) - b\ \upsilon(t) \qquad (14.31)$$

મળે. અહીં આપણે સદિશ સંકેત નથી લીધાં કારણ કે આપણે એકપરિમાણીય ગતિ પર ચર્ચા કરી રહ્યા છીએ. વેગ $v(t)$ અને પ્રવેગ $\mathbf{a}(t)$ માટે અનુક્રમે $x(t)$ના પ્રથમ અને દ્વિતીય વિકલનનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k\,x = 0 \qquad (14.32)$$

મળે છે. સમીકરણ (14.32)નો ઉકેલ એ અવમંદિત બળ (જે વેગના સમપ્રમાણમાં છે)ની હાજરીમાં ગતિ કરતાં બ્લૉકની ગતિનું વર્ણન કરે છે. ઉકેલ એ નીચેના સ્વરૂપમાં જોવા મળે છે.

$$x(t) = A\ e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (14.33)$$

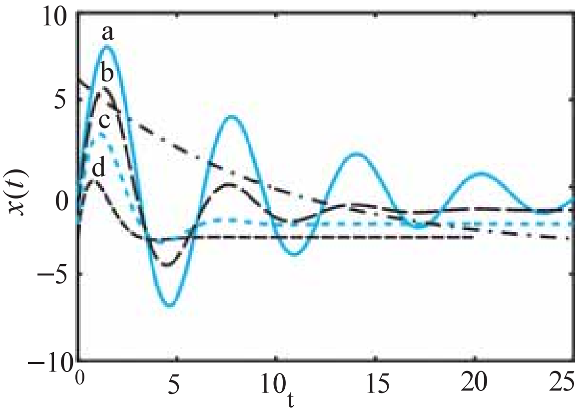
જ્યાં $A\,e^{-bt/2m}$ કંપવિસ્તાર છે અને ω' અવમંદિત દોલકની કોણીય આવૃત્તિ છે. જેને,

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (14.34)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

આ વિધેયમાં, cosine વિધેયનો આવર્તકાળ $2\pi/\omega'$ છે આમ છતાં વિધેય $x(t)$ એ શુદ્ધ આવર્ત નથી કારણ કે $e^{-bt/2m}$ અવયવી લીધે તે સમય સાથે સતત ઘટતો જાય છે. જોકે, એક આવર્તકાળ T દરમિયાન થતો આ ઘટાડો જો નાનો હોય, તો સમીકરણ (14.33) દ્વારા પ્રસ્તુત આ ગતિ લગભગ આવર્ત છે.

આ ઉકેલ, સમીકરણ (14.33), આકૃતિ 14.20માં બતાવ્યા પ્રમાણે આલેખના રૂપમાં રજૂ કરી શકાય છે. આપણે તેને cosine વિધેય તરીકે ગણી શકીએ કે જેનો કંપવિસ્તાર $A\ e^{-bt/2m}$ છે, તે ધીમે ધીમે સમય સાથે ઘટે છે.



આકૃતિ **14.20** *એક અવમંદિત દોલક એ દોલનના ઘટતાં કંપવિસ્તારવાળું લગભગ આવર્ત છે. વધુ અવમંદન સાથે તેનાં દોલનો ઝડપથી નાશ પામે છે.*

હવે, અવમંદિત (આદર્શ) દોલકની યાંત્રિકઊર્જા $E = 1/2\ kA^2$ છે. અવમંદિત દોલક માટે, તેની યાંત્રિકઊર્જા અચળ નથી પરંતુ તે સમય સાથે ઘટે છે. જો અવમંદન નાનું હોય, તો આપણે કંપવિસ્તાર $A\ e^{-bt/2m}$ મૂકીને તે જ સમીકરણનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2\ e^{-bt/m} \qquad (14.35)$$

સમીકરણ (14.35) દર્શાવે છે કે આ પ્રણાલીની કુલ ઊર્જા સમય સાથે ચર-ઘાતાંકીય રૂપે ઘટે છે. નોંધ કરો કે નાના અવમંદનનો અર્થ છે કે $\left(\frac{b}{\sqrt{k\,m}}\right)$ પરિમાણરહિત ગુણોત્તર 1 થી બહુ નાનો છે.

* ગુરુત્વાકર્ષણ હેઠળ આ બ્લૉક એ સ્પ્રિંગ પર સ્થિર સમતુલન સ્થિતિ O પર હશે; અહીં x તે બિંદુથી સ્થાનાંતર રજૂ કરે છે.

અલબત્ત, જો આપણે $b = 0$ મૂકીએ, તો અવંદિત દોલકનાં આ પરિચ્છેદનાં બધાં જ સમીકરણો એ, અપેક્ષા મુજબ, અવમંદન વિનાના (આદર્શ) દોલકનાં અનુરૂપ સમીકરણોમાં રૂપાંતરિત થશે.

▶ **ઉદાહરણ 14.10** આકૃતિ 14.20માં બતાવ્યા પ્રમાણે અવમંદિત દોલક માટે, બ્લૉકનું દ્રવ્યમાન 200 g, $k = 90\ \text{N m}^{-1}$ અને અવમંદન અચળાંક b, $40\ \text{g s}^{-1}$ છે તો (a) દોલનનો આવર્તકાળ (b) તેના દોલનના કંપવિસ્તારનું મૂલ્ય પ્રારંભિક મૂલ્ય કરતાં અડધું થવા માટે લાગતો સમય અને (c) તેની યાંત્રિકઊર્જાનું મૂલ્ય પ્રારંભિક મૂલ્ય કરતાં અડધું થવા માટે લાગતા સમયની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

(a) આપણે જોઈએ છીએ કે $km = 90 \times 0.2 = 18$ kg N m^{-1} = 18 kg^2 s^{-2}; આથી $\sqrt{km} = 4.243$ kg s^{-1} અને $b = 0.04$ kg s^{-1}. આથી b એ $\sqrt{km}$ થી ખૂબ જ નાનો છે. આથી સમીકરણ (14.34) દ્વારા આવર્તકાળ T આપી શકાય,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.2\ kg}{90\ \text{N}\ m^{-1}}}$$

$$= 0.3\ \text{s}$$

(b) હવે, સમીકરણ (14.33) પરથી, કંપવિસ્તારને તેના પ્રારંભિક મૂલ્યથી અડધો થવા માટે લાગતો સમય, $T_{1/2}$ વડે આપવામાં આવે છે,

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{b/2m}$$

$$= \frac{0.693}{40} \times 2 \times 200\ \text{s}$$

$$= 6.93\ \text{s}$$

(c) તેની યાંત્રિક ઊર્જાના પ્રારંભિક મૂલ્યને અડધી થવા માટે લેવામાં આવતો સમય $t_{1/2}$ની ગણતરી કરવા માટે આપણે સમીકરણ (14.35)નો ઉપયોગ કરીશું. આ સમીકરણ પરથી આપણને મળશે.

$$E(t_{1/2})/E(0) = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

અથવા $\quad \frac{1}{2} = \exp(-bt_{1/2}/m)$

$$\ln(1/2) = -(bt_{1/2}/m)$$

અથવા $\quad t_{1/2} = \frac{0.693}{40\text{g s}^{-1}} \times 200\text{g}$

$$= 3.46\ \text{s}$$

આ કંપવિસ્તારના ક્ષયકાળથી માત્ર અડધો છે. આ આશ્ચર્યજનક નથી, કારણ કે સમીકરણ (14.33) અને (14.35) અનુસાર, ઊર્જાએ કંપવિસ્તારના વર્ગ પર આધાર રાખે છે. નોંધ લો કે ઘાતમાં 2નો અંક એ બંને ચર-ઘાતાંકીય પદોમાં છે. ◀

14.10 પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનો અને અનુનાદ (FORCED OSCILLATIONS AND RESONANCE)

જ્યારે કોઈ એક પ્રણાલી (જેવી કે સાદું લોલક અથવા સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ એક બ્લૉક)ને તેની સંતુલિત અવસ્થામાંથી સ્થાનાંતરિત કરીને મુક્ત કરવામાં આવે, તો તે તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω સાથે દોલનો કરશે અને આ દોલનોને **મુક્ત દોલનો (free oscillations)** કહેવાય છે. કાયમ હાજર એવાં અવમંદન બળોનાં કારણે બધાં જ મુક્ત દોલનો સમય જતાં ક્ષય પામે છે. આમ છતાં, કોઈ બાહ્ય પરિબળ આ દોલનો ટકાવી રાખી શકે છે. આવાં દોલનોને **બળપ્રેરિત (Forced)** અથવા **પ્રણોદિત (driven) દોલનો (Oscillations)** કહેવાય છે. આપણે એક આવર્ત બાહ્ય બળનો કિસ્સો લઈશું કે જેની આવૃત્તિ ω_d છે કે જેને પ્રણોદિત આવૃત્તિ કહેવાય છે. કોઈ બળ પ્રેરિત આવર્ત દોલનો માટે એ અતિ મહત્ત્વનું સત્ય છે કે આ પ્રણાલી તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω સાથે નહિ પણ બાહ્ય પરિબળની આવૃત્તિ ω_dથી દોલનો કરશે અને તેનાં મુક્ત દોલનો અવમંદનના કારણે અટકી જશે. બળપ્રેરિત દોલનનું સૌથી વધુ પ્રચલિત ઉદાહરણ એ, બગીચામાં હીંચકામાં ઝૂલતો કોઈ એક બાળક આ દોલનો જાળવી રાખવા તેના પગથી સમયાંતરે જમીનને ધક્કો લગાવે છે (અથવા બીજું કોઈ આ બાળકને સમયાંતરે ધક્કો લગાવતું હોય.) તે છે.

ધારો કે કોઈ એક અવમંદિત દોલક પર F_0 જેટલા કંપવિસ્તારનું સમયાંતરે બદલાતું કોઈ આવર્ત બાહ્ય બળ $F(t)$ લાગુ પડે છે. આવા બળને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય છે :

$$F(t) = F_0 \cos \omega_d t \qquad (14.36)$$

રેખીય પુનઃસ્થાપક બળ (restoring force), અવમંદન બળ (damping force) અને સમીકરણ (14.36) દ્વારા રજૂ કરાયેલ સમય આધારિત પ્રણોદિત (ચાલક) બળ (driving force)ની સંયુક્ત અસર નીચે કણની ગતિને

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - b\upsilon(t) + F_0 \cos \omega_d t \qquad (14.37a)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

આ સમીકરણ (14.37a)માં પ્રવેગ માટે d^2x/dt^2 મૂકતાં અને તેની પુનઃગોઠવણી કરતાં,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega_d t \qquad (14.37b)$$

મળે છે. આ m દ્રવ્યમાનના દોલકનું સમીકરણ છે જેના પર (કોણીય) આવૃત્તિ ω_dનું આવર્ત બળ લગાડવામાં આવેલ છે. આ દોલક શરૂઆતમાં તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω સાથે દોલનો કરે છે. જ્યારે આપણે બાહ્ય આવર્ત બળ લાગુ કરીએ છીએ, ત્યારે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિનાં દોલનો ક્ષીણ થાય છે અને પછી આ પદાર્થ બાહ્ય આવર્ત બળની (કોણીય) આવૃત્તિ સાથે દોલનો કરે છે. તેનાં પ્રાકૃતિક આવર્તનો સંપૂર્ણ ક્ષય પામે ત્યાર બાદ તેના સ્થાનાંતરને

$$x(t) = A \cos (\omega_d t + \phi) \qquad (14.38)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

જ્યાં, સમય tને જ્યારથી આપણે આવર્ત બળ લાગુ પાડીએ તે ક્ષણથી માપવામાં આવે છે.

કંપવિસ્તાર A એ બળપ્રેરિત આવૃત્તિ ω_d અને પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ωનું વિધેય છે. વિશ્લેષણ દર્શાવે છે કે તેને નિમ્ન સ્વરૂપે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$A = \frac{F_0}{\{m^2(\omega^2 - \omega_d^2)^2 + \omega_d^2 b^2\}^{1/2}} \qquad (14.39a)$$

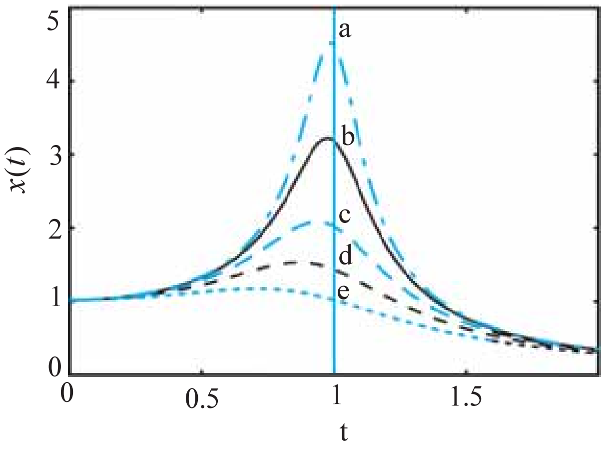
$$\text{અને} \quad \tan\phi = \frac{-\upsilon_0}{\omega_d x_0} \qquad (14.39b)$$

જ્યાં m એ કણનું દ્રવ્યમાન છે અને υ_0 એ વેગ અને x_0 એ $t = 0$ સમયે કણનો વેગ અને કણનું સ્થાનાંતર છે. આ એ સમય છે કે જ્યારે આપણે આવર્ત બળ લાગુ પાડીએ છીએ. સમીકરણ (14.39) બતાવે છે કે બળપ્રેરિત દોલકનો આવર્તકાળ ચાલક બળની (કોણીય) આવૃત્તિ પર આધારિત છે. જ્યારે ω_d એ ωથી સદંતર ભિન્ન હોય તથા જ્યારે તે ωની નજીક હોય, ત્યારે આપણને દોલકનાં જુદાં જુદાં વર્તન જોવા મળે છે. આપણે આ બે કિસ્સાઓની વિચારણા કરીશું.

(a) નાનું અવમંદન અને ચાલક આવૃત્તિ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિથી ખૂબ જુદી હોય (Small Damping, Driving Frequency Far from Natural Frequency) : આ કિસ્સામાં $\omega_d b$ એ $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ કરતાં ઘણી ઓછી હશે અને આપણે તે પદને અવગણી શકીએ છીએ. આથી સમીકરણ (14.39) થશે,

$$A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_d^2)} \qquad (14.40)$$

તંત્રમાં વિભિન્ન માત્રાના અવમંદનની હાજરીમાં દોલકનો સ્થાનાંતર કંપવિસ્તાર, ચાલક બળ (driving force)ની કોણીય આવૃત્તિ પર કેવી રીતે આધાર રાખે છે તે આકૃતિ (14.21)માં દર્શાવ્યું છે. તે નોંધવું રહ્યું કે જ્યારે $\omega_d / \omega = 1$ ત્યારે તમામ કિસ્સાઓમાં કંપવિસ્તાર સૌથી મોટો હોય છે. આ આકૃતિના વક્રો દર્શાવે છે કે જેમ અવમંદન નાનું તેમ અનુનાદ (resonance) શિખરો ઊંચાં અને સાંકડા હોય છે.



આકૃતિ **14.21** આ આલેખ સમીકરણ (14.41)ને રેખાંકિત કરે છે. અવમંદન વધતાં અનુનાદ કંપવિસ્તાર ($\omega = \omega_d$) ઘટે છે.

જો આપણે ચાલક બળની આવૃત્તિને બદલતાં જઈએ તો જ્યારે તે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ બરાબર થાય ત્યારે કંપવિસ્તાર અનંત તરફ જાય છે. પરંતુ આ શૂન્ય અવમંદનનો આદર્શ કિસ્સો છે, જે એક વાસ્તવિક પ્રણાલીમાં ક્યારેય શક્ય નથી કારણ કે અવમંદન સંપૂર્ણપણે શૂન્ય ક્યારેય ના હોઈ શકે. તમે હીંચકામાં અનુભવ કર્યો હોવો જોઈએ કે જ્યારે તમારા ધક્કાનો સમય હીંચકાના આવર્તકાળ સાથે સુમેળ સાધે છે ત્યારે તમારો હિંચકો મહત્તમ કંપવિસ્તારને પ્રાપ્ત કરે છે. આ કંપવિસ્તાર મોટો હોય છે, પરંતુ અનંત નથી, કારણ કે હંમેશાં તમારા હીંચકામાં કંઈક અંશે અવમંદન હોય જ છે જે હવે પછી (b)માં સ્પષ્ટ થશે.

(b) ચાલક આવૃત્તિ એ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિની નજીક હોય : (Driving Frequency Close to Natural Frequency) : જો ω_d એ ωની ખૂબ જ નજીકની હોય તો, $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ એ $\omega_d b$ કરતાં ઘણું ઓછું હશે, bના કોઈ પણ વાજબી મૂલ્ય માટે પછી સમીકરણ (14.39)

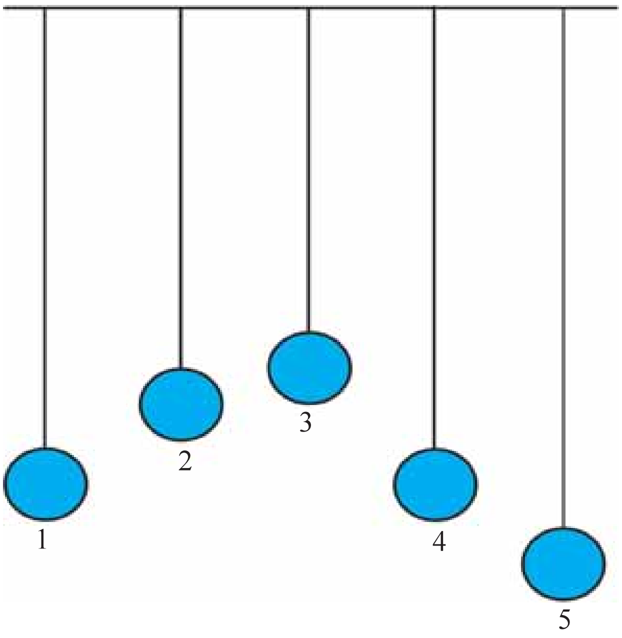
$$A = \frac{F_0}{\omega_d b} \qquad (14.41)$$

થશે. આ સ્પષ્ટ કરે છે કે આપેલ ચાલક બળની આવૃત્તિ માટે મહત્તમ શક્ય કંપવિસ્તાર એ ચાલક આવૃત્તિ અને અવમંદન દ્વારા અંકુશિત છે અને તે ક્યારેય અનંત થતો નથી. જ્યારે ચાલક બળની આવૃત્તિ એ દોલકની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિની નજીક હોય ત્યારે કંપવિસ્તારમાં થતાં વધારાની ઘટનાને **અનુનાદ (Resonance)** કહેવામાં આવે છે.

આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણે કેટલીયે ઘટના અનુભવીએ છીએ જેમાં અનુનાદ સામેલ છે. હીંચકાનો અનુભવ એ અનુનાદનું

સારું ઉદાહરણ છે. તમને કદાચ સમજાયું હશે કે હીંચકાને વધુ ઊંચાઈ પર ઝૂલવવાનું કૌશલ્ય એ હીંચકાની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ સાથે જમીન જોર લગાડવાના લયના સુમેળમાં રહેલું છે.

આ મુદ્દાને વધુ સમજાવવા માટે ચાલો આકૃતિ 14.22માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક જ દોરડાથી લટકાવેલ જુદી-જુદી પાંચ લંબાઈના સાદા લોલકોના સમૂહને ધ્યાનમાં લઈએ. લોલક 1 અને 4 સમાન લંબાઈના છે અને અન્યની લંબાઈ અલગ અલગ છે. હવે ચાલો લોલક 1ને ગતિમાં લાવીએ. આ લોલકની ઊર્જાએ સંબંધિત-(કનેક્ટીંગ)-દોરી મારફતે અન્ય લોલકોમાં તબદીલ થશે અને તેઓ દોલન શરૂ કરે છે. આ સંબંધિત-દોરી દ્વારા ચાલક બળ પ્રદાન કરવામાં આવે છે. આ બળની આવૃત્તિ એવી આવૃત્તિ છે કે જેની સાથે લોલક-1 દોલન કરે છે. જો આપણે લોલકો 2, 3 અને 5ની પ્રતિક્રિયાનું અવલોકન કરીએ, તો સૌપ્રથમ તેઓ તેમના દોલનની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ અને વિવિધ કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો શરૂ કરે છે. પરંતુ આ ગતિ ધીમે ધીમે ક્ષય પામે છે અને કાયમ રહેતી નથી. દોલનની તેમની આવૃત્તિઓ



આકૃતિ **14.22** *એક જ આધાર પરથી લટકાવેલા જુદી જુદી લંબાઈનાં પાંચ સાદાં લોલકો*

ધીમે ધીમે બદલાય છે અને છેવટે તેઓ લોલક 1ની આવૃત્તિ એટલે કે ચાલક બળની આવૃત્તિ સાથે પણ વિવિધ કંપવિસ્તારો સાથે દોલન કરે છે, તેઓ નાના કંપવિસ્તાર સાથે દોલન કરે છે. લોલક 4ની પ્રતિક્રિયા લોલકોના આ જૂથથી વિરુદ્ધ છે. તે લોલક 1ની સમાન આવૃત્તિ સાથે દોલન કરે છે અને તેનો કંપવિસ્તાર ધીમે ધીમે વધે છે અને તે ખૂબ જ મોટો બને છે. આ એક અનુનાદ જેવો પ્રતિભાવ જોવા મળે છે. કારણ કે આમાં અનુનાદ માટેની શરત સંતોષાય છે, એટલે કે પ્રણાલીની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ એ ચાલક બળની આવૃત્તિ સાથે એકરૂપ થાય છે. તેથી આમ બને છે.

આપણે અત્યાર સુધી એવી જ દોલિત પ્રણાલીઓ લીધી હતી કે જેમને એક જ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ હોય. સામાન્ય રીતે, પ્રણાલી એક કરતાં વધુ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ ધરાવતી હોય છે. આવી પ્રણાલીઓનાં ઉદાહરણો (કંપન કરતા તાર, હવાનો સ્તંભ વગેરે) તમે હવે પછીના પ્રકરણમાં જોશો. કોઈ પણ યાંત્રિક માળખું, જેમકે એક બિલ્ડિંગ, એક બ્રિજ, કે એક હવાઈ જહાજને એક કરતાં વધારે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ હોવાની શક્યતા છે. કોઈ એક બાહ્ય આવર્ત બળ અથવા વિક્ષેપ એ આ પ્રણાલીને પ્રણોદિત દોલનમાં મૂકશે. જો આકસ્મિક રીતે, પ્રણોદિત આવૃત્તિ ω_d એ આ પ્રણાલીની કોઈ એક પ્રાકૃતિક આવૃત્તિની નજીકની હશે, તો દોલનોનો કંપવિસ્તાર વધારે વધશે (અનુનાદ - resonance) અને શક્ય નુકસાનમાં પરિણમે. આ જ કારણથી પુલ પસાર કરતી વખતે સૈનિકો કૂચભંગ કરે છે. આ જ કારણોસર, ભૂકંપમાં એ અસરગ્રસ્ત વિસ્તારના દરેક મકાનો કે જે સમાન મજબૂતાઈ અને માલસામાનનાં બનેલા હોય તોપણ તેને સમાન ક્ષતિ પહોંચતી નથી. મકાનની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ એ તેની ઊંચાઈ અને અન્ય પરિબળો અને બિલ્ડિંગ મટિરિયલ્સની પ્રકૃતિ પર આધારિત છે. જેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ સેસમીક (ભૂકંપનાં) તરંગોની આવૃત્તિની નજીકની હોય તેને વધુ નુકસાન થવાની શક્યતા છે.

સારાંશ

1. પોતાને પુનરાવર્તન કરવાની ગતિને આવર્તગતિ કહેવાય છે.
2. આવર્તકાળ T એ એક સંપૂર્ણ કંપન અથવા એક ચક્ર માટે જરૂરી સમય છે. તે આવૃત્તિ સાથે

$$T = \frac{1}{\upsilon}$$

વડે સંબંધિત છે.

આવર્ત અથવા દોલન ગતિની આવૃત્તિ એ એકમ સમય દીઠ દોલનોની સંખ્યા છે. SI માં તે heartzમાં માપવામાં આવે છે.

$$1 \text{ heartz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ દોલન પ્રતિ સેકન્ડ} = 1 \text{ s}^{-1}$$

3. સરળ આવર્તગતિ (સ.આ.ગ./SHM)માં તેના સંતુલન સ્થાનથી કણનું સ્થાનાંતર $x(t)$ને નીચેનાં સ્વરૂપે આપવામાં આવે છે.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \text{ (સ્થાનાંતર)}$$

જેમાં A એ સ્થાનાંતરનો કંપવિસ્તાર છે. રાશિ $(\omega t + \phi)$ એ ગતિની કળા છે અને ϕ એ કળા-અચળાંક છે. કોણીય આવૃત્તિ ω, એ આવર્તકાળ અને આવૃત્તિ સાથે

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \text{ (કોણીય આવૃત્તિ)}$$

વડે સંબંધિત છે.

4. સરળ આવર્તગતિ એ નિયમિત વર્તુળમય ગતિનો વર્તુળના વ્યાસ પરનો પ્રક્ષેપ છે.

5. સમયના વિધેય તરીકે સ.આ.ગ. દરમ્યાન કણનો વેગ અને પ્રવેગ નીચે મુજબ છે :

$$\upsilon(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \text{ (વેગ)}$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x(t) \text{ (પ્રવેગ)}$$

આ રીતે આપણે કહી શકીએ છીએ કે, સરળ આવર્તગતિ કરતાં પદાર્થનો વેગ અને પ્રવેગ બંને આવર્ત વિધેયો છે, કે જેમનો અનુક્રમે વેગ કંપવિસ્તાર $\upsilon_m = \omega A$ અને પ્રવેગ કંપવિસ્તાર $a_m = \omega^2 A$ છે.

6. સરળ આવર્તગતિ દરમ્યાન લાગતું બળ એ સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં હોય છે અને હંમેશાં ગતિના મધ્યમાન સ્થાન તરફ હોય છે.

7. સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણને કોઈ પણ સમયે ગતિઊર્જા $K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ અને સ્થિતિઊર્જા $U = \frac{1}{2} kx^2$ હોય છે. જો કોઈ પણ ઘર્ષણ હાજર ન હોય, તો K અને U સમય સાથે બદલાતાં હોવા છતાં પ્રણાલીની યાંત્રિકઊર્જા $E = K + U$ હંમેશાં અચળ રહે છે.

8. $F = -k\,x$ દ્વારા આપવામાં આવેલા હૂકના નિયમ મુજબ પુનઃસ્થાપક બળની અસર હેઠળ m દ્રવ્યમાનનું કણ એ સરળ આવર્તગતિ કરે છે જેના માટે,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (કોણીય આવૃત્તિ)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ (આવર્તકાળ)}$$

આવી પ્રણાલીને રેખીય દોલક પણ કહેવાય છે.

9. નાના ખૂણાઓ સુધી ઝૂલતાં સાદા લોલકની ગતિ લગભગ સરળ આવર્ત છે. આ દોલનનો આવર્તકાળ છે :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

10. વાસ્તવિક દોલિત તંત્રમાં યાંત્રિકઊર્જા દોલનો દરમિયાન ઘટે છે કારણ કે બાહ્ય બળો, જેમકે ઘર્ષણ, દોલનોને અવરોધે છે અને યાંત્રિકઊર્જાનું ઉષ્માઊર્જામાં રૂપાંતર કરે છે. ત્યારે વાસ્તવિક દોલક અને તેની ગતિને અવમંદિત હોવાનું કહેવાય છે. જો અવમંદન બળ $F_d = -b\upsilon$ દ્વારા આપવામાં આવે, જ્યાં υ એ દોલકનો વેગ છે અને b એ અવમંદન અચળાંક હોય, તો દોલકનું સ્થાનાંતર

$x(t) = A\ e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$ હશે.

જ્યાં ω' અવમંદિત દોલકની કોણીય આવૃત્તિ જેને

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

વડે આપવામાં આવે છે.

જો અવમંદન અચળાંક નાનો હોય તો $\omega' \approx \omega$ જ્યાં ω એ અવમંદિત દોલકની કોણીય આવૃત્તિ છે. અવમંદિત દોલકની યાંત્રિકઊર્જા Eને

$$E(t) = \frac{1}{2} kA^2 e^{-bt/m}$$

વડે આપવામાં આવે છે.

11. ω પ્રાકૃતિક કોણીય આવૃત્તિવાળી દોલન પ્રણાલી પર ω_d કોણીય આવૃત્તિવાળું કોઈ બાહ્ય બળ લગાડવામાં આવે, તો આ પ્રણાલી કોણીય આવૃત્તિ ω_dથી દોલન કરશે. આ દોલનોનો કંપવિસ્તાર સૌથી મહત્તમ હશે જ્યારે $\omega_d = \omega$ હોય તે અનુનાદની શરત છે.

ભૌતિકરાશિ (Physical Quantity)	પ્રતિક (Symbol)	પરિમાણ (Dimensions)	એકમ (Unit)	નોંધ (Remarks)
આવર્તકાળ (Period)	T	$[T]$	s	પોતાને પુનરાવર્તન કરવાનો ગતિનો લઘુતમ સમય
આવૃત્તિ (Frequency)	ν (અથવા f)	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
કોણીય આવૃત્તિ (Angular Frequency)	ω	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\omega = 2\pi\nu$
કળા-અચળાંક (Phase Constant)	ϕ	પરિમાણરહિત (Dimensionless)	rad	સ.આ.ગ.માં સ્થાનાંતરની કળાનું પ્રારંભિક મૂલ્ય
બળ-અચળાંક (Force Constant)	k	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	સરળ આવર્તગતિ $F = -k\,x$

વિચારવા લાયક મુદ્દાઓ (POINTS TO PONDER)

1. આવર્તકાળ T તે એવો લઘુતમ સમય છે કે ત્યાર બાદ ગતિ પોતે પુનરાવર્તન કરે છે. આમ, ગતિ nT પછી જ પુનરાવર્તન કરે છે જ્યાં, n એક પૂર્ણાંક છે.

2. દરેક આવર્તગતિ સરળ આવર્તગતિ નથી. જે આવર્તગતિ બળના નિયમ $F = -k\,x$ દ્વારા સંચાલિત હોય તે જ માત્ર સરળ આવર્ત ગતિ છે.

3. વ્યસ્ત-વર્ગ નિયમ બળ (ગ્રહોની ગતિમાં) ઉપરાંત દ્વિ-પરિમાણોમાં સરળ આવર્તબળ $-m\omega^2 r$ ને કારણે વર્તુળમય ગતિ ઉત્પન્ન થાય છે. બીજા કિસ્સામાં, બે લંબવત દિશામાં (x અને y) ગતિની કળાઓ $\omega/2$ જેટલી અલગ હોવી જોઈએ. આમ, કોઈ એક કણ કે જેની પ્રારંભિક સ્થિતિ (o, A) અને વેગ $(\omega A, 0)$ હોય તેના પર $-m\omega^2 r$ બળ લગાડતા તે A ત્રિજ્યાના એક વર્તુળમાં નિયમિત રીતે ગતિ કરે છે.

4. આપેલ ω ની રેખીય સરળ આવર્તગતિ માટે બે યાદચ્છિક પ્રારંભિક શરતો જરૂરી છે અને ગતિ સંપૂર્ણપણે નક્કી કરવા માટે તે પર્યાપ્ત છે. આ પ્રારંભિક શરત : (i) પ્રારંભિક સ્થિતિ અને પ્રારંભિક વેગ અથવા (ii) કંપવિસ્તાર અને કળા અથવા (iii) ઊર્જા અને કળા હોઈ શકે છે.

5. ઉપર્યુક્ત મુદ્દા 4 પરથી, જો કંપવિસ્તાર અથવા ઊર્જા આપેલ હોય, તો પ્રારંભિક સ્થિતિ અથવા પ્રારંભિક વેગ દ્વારા ગતિની કળાઓ શોધવામાં આવે છે.

6. એ જરૂરી નથી કે યદૃચ્છ કંપવિસ્તારો અને કળાઓ સાથેની બે સરળ આવર્તગતિનું સંયોજન આવર્ત જ હોય. જો એક ગતિની આવૃત્તિ એ અન્યની આવૃત્તિનો એક પૂર્ણાંક ગુણાંક હોય, ત્યારે જે-તે આવર્ત થાય છે. જોકે, આવર્તગતિ હંમેશાં યોગ્ય કંપવિસ્તાર સાથેની અનંત આવર્તગતિઓના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય છે.

7. સ.આ.ગ.નો આવર્તકાળ એ કંપવિસ્તાર અથવા ઊર્જા અથવા કળા-અચળાંક પર આધાર રાખતો નથી. જે ગુરુત્વાકર્ષણ (કેપ્લરનો ત્રીજા નિયમ) હેઠળ ગ્રહોની ભ્રમણ કક્ષાના આવર્તકાળ સાથે વિરોધાભાસ દર્શાવે છે.

8. એક સાદા લોલકની ગતિ નાના કોણીય સ્થાનાંતર માટે સરળ આવર્ત છે.

9. કણની ગતિને સરળ આવર્ત થવા માટે તેના સ્થાનાંતર xને નીચેનાં સ્વરૂપોમાંથી કોઈ પણ એક રૂપમાં જ દર્શાવવા જોઈએ :

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

$x = A \cos (\omega t + \alpha)$, $x = B \sin (\omega t + \beta)$

આ ત્રણ સ્વરૂપો સંપૂર્ણપણે સમતુલ્ય છે. (કોઈ પણ એકને અન્ય બે સ્વરૂપોના પદમાં વ્યક્ત કરી શકાય છે.)

આ રીતે અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ [સમીકરણ (14.31)] એ ખરા અર્થમાં સરળ આવર્ત નથી. તે આશરે માત્ર $2m/b$ કરતાં ઘણા ઓછા સમય અંતરાલો માટે જ સરળ છે, જ્યાં b એ અવમંદન અચળાંક છે.

10. બળપ્રેરિત (પ્રણોદિત) દોલનોમાં સ્થાયી અવસ્થાની ગતિ (મુક્ત દોલનો નાશ પામે પછી) એક સરળ આવર્તગતિ છે, જેની આવૃત્તિ એ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω નથી હોતી પણ તે પ્રણોદિત દોલન ઉત્પન્ન કરતાં બાહ્ય બળની આવૃત્તિ ω_d છે.

11. શૂન્ય અવમંદનની આદર્શ સ્થિતિમાં અનુનાદ પર સરળ આવર્તગતિના કંપવિસ્તાર અનંત હોય છે. આ કોઈ સમસ્યા નથી કારણ કે તમામ વાસ્તવિક પ્રણાલીઓમાં જોકે નાનું પણ થોડુંક તો અવમંદન હોય જ છે.

12. પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનમાં, કણની આવર્તગતિની કળા પ્રણોદિત બળની કળાથી અલગ હોય છે.

સ્વાધ્યાય

14.1 નીચેનામાંથી કયાં ઉદાહરણો આવર્તગતિ દર્શાવે છે ?

(a) એક તરવૈયો એક નદીના એક કિનારેથી બીજા કિનારે અને ત્યાંથી પરતની સફર પૂર્ણ કરે છે.

(b) એક મુક્ત રીતે લટકાવેલ ગજિયા ચુંબકને તેની N–S દિશામાંથી સ્થાનાંતર આપી અને મુક્ત કરવામાં આવે છે.

(c) તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતો હાઇડ્રોજન પરમાણુ

(d) એક ધનુષમાંથી છોડેલું તીર

14.2 નીચેનામાંથી કયાં ઉદાહરણો એ (લગભગ) સરળ આવર્તગતિ દર્શાવે છે અને કયા જે આવર્ત દર્શાવે છે પરંતુ સરળ આવર્તગતિ દર્શાવતા નથી ?

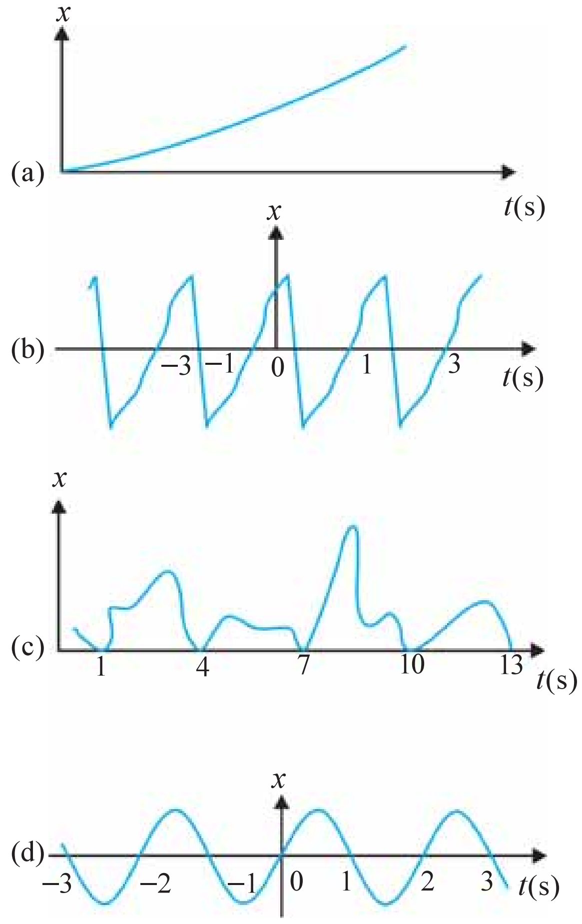
(a) પૃથ્વીની ધરીને અનુલક્ષીને તેનું ભ્રમણ

(b) U-ટ્યૂબમાં દોલિત પારાના સ્તંભની ગતિ

(c) એક બૉલબેરિંગને એક લીસી વક્ર વાટકીની અંદર સૌથી નિમ્નતમ બિંદુથી થોડાક ઉપરના બિંદુ પરથી છોડી દેવામાં આવે ત્યારની ગતિ

(d) તેની સંતુલન સ્થિતિને અનુલક્ષીને બહુપરમાણ્વિક અણુના સામાન્ય કંપનો

14.3 આકૃતિ 14.23 એ કોઈ કણની રેખીય ગતિ માટે x-t ના ચાર આલેખોને દર્શાવે છે. કયા આલેખો આવર્તગતિ દર્શાવે છે ? ગતિનો આવર્તકાળ (આવર્તગતિના કિસ્સામાં) શું છે ?



આકૃતિ 14.23

14.4 નીચેના સમયનાં વિધેયોમાંથી કયા (a) સરળ આવર્તગતિ (b) આવર્ત પરંતુ સરળ આવર્તગતિ ન હોય અને (c) બિનઆવર્તગતિ દર્શાવે છે ? આવર્તગતિના દરેક કિસ્સામાં આવર્તકાળ આપો. (કોઈ ધન અચળાંક ω માટે) :

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos (\pi/4 - 2\omega t)$

(d) $\cos \omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

(e) $\exp (-\omega^2 t^2)$

(f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

14.5 એક કણ 10 cm દૂર એવાં બે બિંદુઓ, A અને Bની વચ્ચે રેખીય સરળ આવર્તગતિ કરે છે. A થી Bની દિશાને ધન લો અને વેગ, પ્રવેગ અને બળની સંજ્ઞા આપો. જ્યારે તે કણ

(a) A છેડા પર હોય

(b) B છેડા પર હોય

(c) ABના મધ્યબિંદુ પર A તરફ જતી દિશામાં

(d) B થી 2 cm દૂર Aની તરફ જતાં

(e) A થી 3 cm દૂર B તરફ જતાં અને

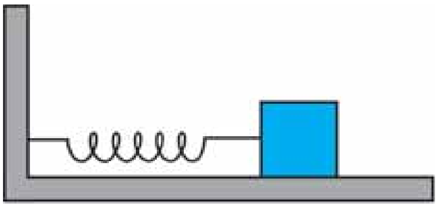
(f) B થી 4 cm દૂર A તરફ જતાં

14.6 કણના પ્રવેગ a અને સ્થાનાંતર x વચ્ચેના નીચેના સંબંધોમાંથી કયા સરળ આવર્તગતિ ધરાવે છે ?
(a) $a = 0.7x$
(b) $a = -200x^2$
(c) $a = -10x$
(d) $a = 100x^3$

14.7 સરળ આવર્તગતિ કરતા કણની ગતિને સ્થાનાંતર વિધેય
$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$ દ્વારા વર્ણવવામાં આવે છે.
જો કણનું પ્રારંભિક ($t = 0$) સ્થાન 1 cm હોય અને તેનો પ્રારંભિક વેગ ω cm/s હોય, તો તેનો કંપવિસ્તાર અને પ્રારંભિક કળા શોધો. કણની કોણીય આવૃત્તિ એ $\pi\ s^{-1}$ છે. જો cosine વિધેયના સ્થાને સ.આ.ગ.ને વર્ણવવા માટે આપણે sine વિધેય $x = B \sin (\omega t + \alpha)$ પસંદ કરીએ, તો ઉપર્યુક્ત પ્રારંભિક શરતો સાથે કણનો કંપવિસ્તાર અને પ્રારંભિક કળા શું થશે ?

14.8 સ્પ્રિંગ બૅલેન્સમાં જે સ્કેલ છે તે 0 થી 50 kg સુધીનો છે. સ્કેલની લંબાઈ 20 cm છે. આ કાંટા પર લટકાવવામાં આવેલ એક પદાર્થને સ્થાનાંતરિત કરીને મુક્ત કરવામાં આવે છે, તો તે 0.6 sના આવર્તકાળ સાથે દોલિત થાય છે. આ પદાર્થનું વજન કેટલું હશે ?

14.9 આકૃતિ 14.24માં બતાવ્યા પ્રમાણે 1200 N m^{-1}નો સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી એક સ્પ્રિંગને એક સમક્ષિતિજ ટેબલ પર ગોઠવેલ કરેલ છે. આ સ્પ્રિંગના મુક્ત છેડા પર 3 kg જેટલું દ્રવ્યમાન જોડેલ છે. આ દ્રવ્યમાનને એક બાજુ 2.0 cmના અંતર સુધી ખેંચીને મુક્ત કરવામાં આવે છે.

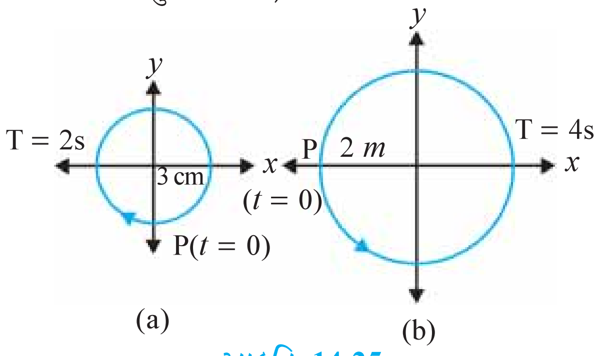


આકૃતિ **14.24**

(i) દોલનની આવૃત્તિ (ii) દ્રવ્યમાનનો મહત્તમ પ્રવેગ અને (iii) દ્રવ્યમાનની મહત્તમ ઝડપ શોધો.

14.10 સ્વાધ્યાય 14.9માં, ચાલો આપણે જ્યારે સ્પ્રિંગ ખેંચાયેલી ના હોય ત્યારની દ્રવ્યમાનની સ્થિતિને $x = 0$ લઈએ અને ડાબાથી જમણી તરફની દિશાને X-અક્ષની ધન દિશા તરીકે લઈએ. દોલન કરતાં આ દ્રવ્યમાન આપણે જ્યારે સ્ટૉપવૉચ શરૂ કરીએ ($t = 0$) તે ક્ષણે આ દ્રવ્યમાન
(a) મધ્યમાન સ્થાને
(b) મહત્તમ ખેંચાયેલા સ્થિતિ પર, અને
(c) મહત્તમ સંકોચિત સ્થિતિ પર હોય તે દરેક કિસ્સા માટે xને tના વિધેય તરીકે દર્શાવો.
સ.આ.ગ. માટેનાં આ વિધેયો આવૃત્તિમાં, કંપવિસ્તારમાં અથવા પ્રારંભિક કાળમાં બીજા કરતાં કેવી રીતે અલગ પડે છે ?

14.11 આકૃતિઓ 14.25 બે વર્તુળમય ગતિઓ દર્શાવે છે. પ્રત્યેક આકૃતિમાં વર્તુળની ત્રિજ્યા, પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ, પ્રારંભિક સ્થિતિ અને પરિભ્રમણ દિશા (એટલે કે ઘડિયાળના કાટાંની ગતિની દિશામાં કે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં) દર્શાવવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ **14.25**

દરેક કિસ્સામાં, પરિભ્રમણ કરતાં કણ Pના ત્રિજ્યા સદિશના x-પ્રક્ષેપને અનુરૂપ સરળ આવર્તગતિ મેળવો.

14.12 નીચેની પ્રત્યેક સરળ આવર્તગતિ માટે અનુરૂપ સંદર્ભ વર્તુળ દોરો. કણનું પ્રારંભિક (t = 0) સ્થાન, વર્તુળની ત્રિજ્યા અને ભ્રમણગતિ કરતાં કણની કોણીય ઝડપ દર્શાવો. સરળતા માટે ભ્રમણની દિશાને દરેક કિસ્સામાં ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરૂદ્ધની લઈ શકાય છે. (x cmમાં છે અને t એ sમાં છે.)

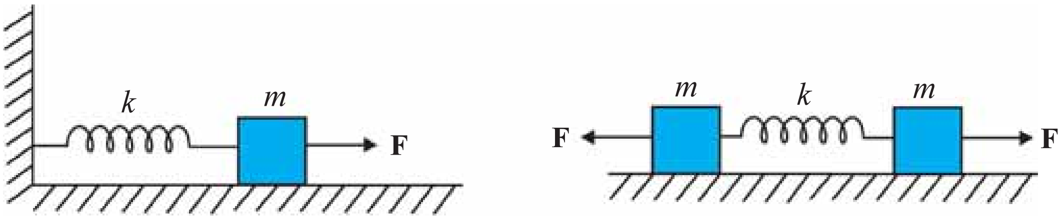
(a) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

(b) $x = \cos (\pi/6 - t)$

(c) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

(d) $x = 2 \cos \pi t$

14.13 આકૃતિ 14.26(a) બતાવે છે કે k બળ-અચળાંકવાળી એક સ્પ્રિંગના એક છેડાને દૃઢ રીતે જકડેલ છે અને તેના મુક્ત છેડા સાથે m દ્રવ્યમાન જોડેલ છે. મુક્ત છેડા પર લગાડવામાં આવતું બળ **F** એ સ્પ્રિંગને ખેંચે છે. આકૃતિ 14.30 (b)માં આ જ સ્પ્રિંગ બંને છેડાથી મુક્ત છે અને એક દ્રવ્યમાન m બંને છેડા પર જોડેલ છે. આકૃતિ 14.26 (b)માંની સ્પ્રિંગના દરેક છેડાને એક સમાન બળ **F** દ્વારા ખેંચવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ **14.26**

(a) આ બે કિસ્સાઓમાં સ્પ્રિંગનું મહત્તમ વિસ્તરણ કેટલું છે ?

(b) જો આકૃતિ (a)માંનું દ્રવ્યમાન અને આકૃતિ (b)નાં બે દ્રવ્યમાનોને જો મુક્ત કરવામાં આવે તો દરેક કિસ્સામાં દોલનોનો આવર્તકાળ કેટલો થશે ?

14.14 એક ઍન્જિનના સિલિન્ડર હેડમાં પિસ્ટન 1.0 mનો સ્ટ્રોક (કંપવિસ્તાર કરતાં બમણી) ધરાવે છે. જો પિસ્ટન 200 rad/mની કોણીય આવૃત્તિ સાથે સરળ આવર્તગતિ કરે છે તો તેની મહત્તમ ઝડપ કેટલી છે ?

14.15 ચંદ્રની સપાટી પર ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે પ્રવેગ 1.7 m s^{-2} છે. એક સાદા લોલકનો પૃથ્વીની સપાટી પરનો આવર્તકાળ 3.5 s હોય તો ચંદ્રની સપાટી પર આવર્તકાળ કેટલો હશે ? (પૃથ્વીની સપાટી પર g = 9.8 m s^{-2} છે.)

14.16 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(a) SHMમાં કણનો આવર્તકાળ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

એ બળ અચળાંક k અને કણનાં દ્રવ્યમાન m પર આધાર રાખે છે.

એક સાદું લોલક લગભગ સ.આ.ગ.માં હોય છે. તેમ છતાં શા માટે લોલકનો આવર્તકાળ એ લોલકનાં દ્રવ્યમાનથી સ્વતંત્ર છે ?

(b) નાના કોણનાં દોલનો માટે સાદા લોલકની ગતિ લગભગ સરળ આવર્ત છે. કંપનના મોટા ખૂણા માટે વધુ સંલગ્ન વિશ્લેષણ બતાવે છે કે T એ $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ થી મોટો છે. આ પરિણામને સમજવા માટે કોઈ ગુણાત્મક દલીલ વિચારો.

(c) હાથ પર કાંડા ઘડિયાળ પહેરેલ માણસ એક ટાવરની ટોચ પરથી નીચે પડે છે. શું આ ઘડિયાળ મુક્ત પતન દરમિયાન સાચો સમય બતાવશે ?

(d) ગુરુત્વાકર્ષણ હેઠળ મુક્ત પતન કરતાં કૅબિનમાં જડિત કરેલ સાદા લોલકના દોલનની આવૃત્તિ કેટલી હશે ?

14.17 l લંબાઈનાં અને M દ્રવ્યમાનનો બૉબ ધરાવતાં એક સાદા લોલકને કારમાં લટકાવવામાં આવે છે. આ કાર નિયમિત ગતિ સાથે R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર ગતિ કરી રહી છે. જો લોલક તેની સંતુલન સ્થાનને અનુલક્ષીને ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં નાનાં દોલનો કરે, તો તેનો આવર્તકાળ શું હશે ?

14.18 A પાયાનું ક્ષેત્રફળ અને h ઊંચાઈનો કૉર્કનો એક નળાકાર ટુકડો ρ_l ઘનતા ધરાવતાં પ્રવાહીમાં તરે છે. આ કૉર્કને સહેજ ડુબાડીને પછી મુક્ત કરવામાં આવે છે. બતાવો કે આ કૉર્ક ઉપર-નીચે સરળ આવર્તદોલનો કરશે જેનો આવર્તકાળ હશે,

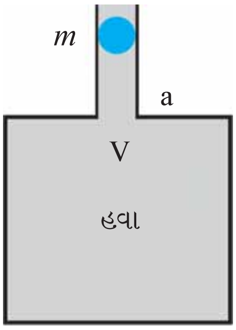
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_1 g}}\ .$$

જ્યાં ρ એ કૉર્કની ઘનતા છે. (પ્રવાહીની સ્નિગ્ધતાને કારણે થતાં અવમંદનો અવગણો.)

14.19 પારો ધરાવતી એક U-ટ્યૂબનો એક છેડો એક શોષક (સક્શન) પંપ અને બીજો છેડો વાતાવરણમાં છે. બે કૉલમ વચ્ચે નાનો દબાણ તફાવત જાળવવામાં આવે છે. બતાવો કે, જ્યારે સક્શન પંપ દૂર કરવામાં આવે છે, તો U-ટ્યૂબમાં પારાનો સ્તંભ સરળ આવર્તગતિ કરે છે.

વધારાનું સ્વાધ્યાય

14.20 V કદની એક ચેમ્બરની ગ્રીવાના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ a છે જેમાં m દ્રવ્યમાનનો એક બૉલ ફિટ (ચુસ્ત) થઈ જાય છે અને કોઈ પણ ઘર્ષણ વિના ઉપર-નીચે ગતિ કરી શકે છે. (આકૃતિ 14.33) એમ બતાવો કે બૉલને થોડોક નીચે દબાવીને મુક્ત કરતાં તે સ.આ.ગ. કરે છે. હવાના દબાણ-કદ બદલાવને સમતાપી (Isothermal) ગણીને દોલનોના આવર્તકાળ માટેનું સૂત્ર મેળવો. (જુઓ આકૃતિ 14.27).



આકૃતિ **14.27**

14.21 3000 kgના વાહનમાં તમે સવારી કરી રહ્યાં છો. એમ ધારીને કે તમે તેની સસ્પેન્શન સિસ્ટમનાં દોલનોની લાક્ષણિકતાની તપાસ કરી રહ્યાં છો. આ સસ્પેન્શન 15 cm દબાય છે જ્યારે સમગ્ર વાહન તેના પર મૂકવામાં આવે છે. ઉપરાંત એક સંપૂર્ણ દોલન દરમિયાન કંપવિસ્તારમાં 50 % જેટલો ઘટાડો થાય છે. (a) સ્પ્રિંગ-અચળાંક k અને (b) દરેક પૈડું 750 kgને આધાર આપે છે. એમ ધારીને સ્પ્રિંગ અને એક પૈડાંના આંચકા-શોષક તંત્ર માટે અવમંદન અચળાંક b શોધો.

14.22 બતાવો કે રેખીય સ.આ.ગ.માં કણના દોલનની કોઈ પણ અવધિ માટે સરેરાશ ગતિઊર્જા એ તે જ અવધિ માટેની સરેરાશ સ્થિતિઊર્જાને સમાન હોય છે.

14.23 10 kg દ્રવ્યમાનની એક વર્તુળાકાર તક્તી તેના કેન્દ્રથી જોડેલ તાર દ્વારા લટકાવવામાં આવેલ છે. આ તક્તીને ઘુમાવીને તારમાં વળ ચડાવી તેને મુક્ત કરવામાં આવે છે. આ વળ (ટૉર્શનલ) દોલનોનો આવર્તકાળ 1.5 s છે. આ તક્તીની ત્રિજ્યા 15 cm છે. આ તારનો ટૉર્શનલ સ્પ્રિંગ-અચળાંક નક્કી કરો. (α એ ટૉર્શનલ સ્પ્રિંગ-અચળાંક છે જે સંબંધ $J = -\alpha\theta$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. જ્યાં J પુનઃસ્થાપક બળ-યુગ્મ અને θ એ વળ-કોણ છે.)

14.24 એક પદાર્થ 5 cmના કંપવિસ્તાર અને 0.2 sના આવર્તકાળ સાથે સરળ આવર્તગતિ કરે છે. જ્યારે સ્થાનાંતર (a) 5 cm (b) 3 cm (c) 0 cm હોય, ત્યારે પદાર્થના પ્રવેગ અને વેગ શોધો.

14.25 કોઈ એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ દ્રવ્યમાન સમક્ષિતિજ સમતલમાં કોણીય વેગ ω સાથે ઘર્ષણ કે અવમંદનરહિત દોલનો માટે મુક્ત છે. તેને $t = 0$ એ, x_0 અંતર સુધી ખેંચવામાં આવે છે અને કેન્દ્ર તરફ υ_0 વેગથી ધક્કો મારવામાં આવે છે. પ્રાચલો ω, x_0 અને υ_0નાં પદમાં પરિણામી દોલનોના કંપવિસ્તાર નક્કી કરો. (**સૂચન :** સમીકરણ $x = a \cos(\omega t + \theta)$ સાથે શરૂઆત કરો અને નોંધ કરો કે, પ્રારંભિક વેગ ઋણ છે.)