પ્રકરણ 15

તરંગો (WAVES)

15.1 પ્રસ્તાવના
15.2 લંબગત અને સંગત તરંગો
15.3 પ્રગામી તરંગમાં સ્થાનાંતર સંબંધ
15.4 પ્રગામી તરંગની ઝડપ
15.5 તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત
15.6 તરંગોનું પરાવર્તન
15.7 સ્પંદ
15.8 ડૉપ્લર અસર
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય
વધારાનું સ્વાધ્યાય

15.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

અગાઉના પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર દોલનો કરતા પદાર્થોની ગતિનો વિચાર કર્યો. તંત્ર કે જે આવા પદાર્થોનો સમૂહ છે તેમાં શું થાય છે ? કોઈ દ્રવ્ય માધ્યમ આનું ઉદાહરણ પૂરું પાડે છે. અત્રે, સ્થિતિસ્થાપક બળો આવાં ઘટકોને એકબીજા સાથે જોડી (બાંધી) રાખે છે તેથી એકની ગતિ બીજાને અસર કરે છે. જો તમે એક લખોટીને શાંત પાણીવાળા તળાવમાં ધીમેથી નાખો તો પાણીની સપાટી વિક્ષુબ્ધ થાય છે. વિક્ષોભ એક જ સ્થાને મર્યાદિત રહેતો નથી, પરંતુ બહાર તરફ વર્તુળાકાર સાથે પ્રસરણ પામે છે. જો તમે પાણીમાં સતત લખોટીઓ નાખતા રહો તો, જે સ્થાને પાણીમાં વિક્ષોભ ઉત્પન્ન થયો છે તે સ્થાનેથી વર્તુળો ઝડપથી બહાર તરફ ગતિ કરતાં દેખાશે. આનાથી એવું લાગે છે કે વિક્ષોભના બિંદુથી બહાર તરફ પાણી ગતિ કરી રહ્યું છે. જો તમે આ વિક્ષુબ્ધ સપાટી પર થોડા બૂચના ટુકડાઓ મૂકો તો એવું દેખાય છે કે બૂચના ટુકડાઓ ઊંચે-નીચે ગતિ કરે છે પરંતુ વિક્ષોભના કેન્દ્રથી દૂર જતા નથી. આ દર્શાવે છે કે વર્તુળો સાથે પાણીનો જથ્થો બહાર તરફ વહન પામતો નથી પરંતુ ગતિમાન વિક્ષોભ ઉત્પન્ન થયેલ છે તેમ લાગે છે. તેવી જ રીતે, જ્યારે આપણે બોલીએ છીએ ત્યારે ધ્વનિ આપણાથી બહાર અને દૂર તરફ ગતિ કરે છે; પરંતુ માધ્યમના એક ભાગથી બીજા ભાગ તરફ હવા જતી નથી. હવામાં ઉત્પન્ન કરેલા વિક્ષોભો બહુ સ્પષ્ટ જણાતા નથી અને આપણા ફક્ત કાન કે માઇક્રોફોન તેમની પરખ કરી શકે છે. આવી ભાત (Pattern) કે જે સમગ્રપણે દ્રવ્યના વાસ્તવિક સ્થાન-ફેર કે વહન વિના ગતિ કરે છે તેમને **તરંગો** કહે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આવા તરંગોનો અભ્યાસ કરીશું.

તરંગો ઊર્જાનું વહન કરે છે અને વિક્ષોભની ભાત (વિક્ષોભનો પ્રકાર) જે માહિતી ધરાવે છે તે એકથી બીજા બિંદુએ પ્રસરણ પામે છે. આપણી માહિતી આપ-લેની સમગ્ર પદ્ધતિ મુખ્યત્વે તરંગો દ્વારા સંકેતોના પ્રસરણ પર આધારિત છે. બોલવું એટલે હવામાં ધ્વનિતરંગો ઉત્પન્ન કરવા અને સાંભળવું એટલે તે તરંગોની પરખ કરવી (Detection). ઘણી વાર, માહિતીની આપ-લેની પદ્ધતિમાં જુદા જુદા પ્રકારના તરંગો સંકળાયેલા હોય છે. દાખલા તરીકે, ધ્વનિતરંગોને પ્રથમ વિદ્યુતપ્રવાહ સંકેત (Signal)માં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે, જે બદલામાં એક વિદ્યુત-ચુંબકીય તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે અને તેને એક ઑપ્ટિકલ કેબલ અથવા

સેટેલાઇટ મારફતે પ્રસારિત કરાય છે. મૂળ સંકેતની પરખમાં આ જ બધાં પદ વિરુદ્ધ ક્રમમાં થતાં હોય છે.

બધા જ તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર હોતી નથી. આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રકાશના તરંગો શૂન્યાવકાશમાંથી પસાર થઈ શકે છે. આપણાથી સેંકડો પ્રકાશવર્ષ (Light Years) દૂર રહેલા તારાઓ દ્વારા ઉત્સર્જિત પ્રકાશ, તારાઓ વચ્ચેના અવકાશ કે જે વ્યાવહારિક રીતે શૂન્યાવકાશ જ છે, તેમાંથી પસાર થઈને આપણને પહોંચે છે.

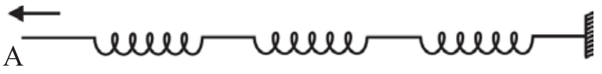
દોરી પરના તરંગો, પાણી પરના તરંગો, ધ્વનિતરંગો, સેસ્મિક (ભૂકંપના) તરંગો વગેરે જેવા તરંગોનો ખૂબ જાણીતો પ્રકાર યાંત્રિકતરંગો તરીકે ઓળખાય છે. આ તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર છે. તેઓ શૂન્યાવકાશમાં થઈને પ્રસરી શકતા નથી. તેઓમાં ઘટક કણોના દોલનો થતાં હોય છે અને તેઓ માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો પર આધારિત છે. વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો કે જેમના વિશે તમે ધોરણ XIIમાં ભણશો તે એક જુદા પ્રકારના તરંગો છે. વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમ હોવું જરૂરી નથી. તેઓ તો શૂન્યાવકાશમાં થઈને પણ ગતિ કરી શકે છે. પ્રકાશ, રેડિયોતરંગો, X કિરણો એ બધા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો છે. શૂન્યાવકાશમાં બધા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોની ઝડપ એકસરખી c છે. જેનું મૂલ્ય

$$c = 299,\ 792,\ 458\ \text{m s}^{-1}\ \text{છે.} \qquad (15.1)$$

એક ત્રીજા પ્રકારના તરંગોને દ્રવ્ય-તરંગો (Matter Waves) કહે છે. તેઓ દ્રવ્યનાં ઘટકો : ઇલેક્ટ્રૉન્સ, પ્રોટૉન્સ, ન્યુટ્રૉન્સ, પરમાણુઓ અને અણુઓ સાથે જોડાયેલ છે. તેઓ, કુદરતના ક્વૉન્ટમ મિકેનિકલ વર્ણનમાં ઉદ્‌ભવે છે, જે તમે આગળના અભ્યાસોમાં શીખશો. યાંત્રિક અથવા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો કરતાં વૈચારિક રીતે તેઓ વધુ અમૂર્ત (Abstract) હોવા છતાં, આધુનિક ટેક્નોલૉજીમાં મૂળભૂત એવી રચનાઓમાં તેઓના ઉપયોગ જણાયા છે : ઇલેક્ટ્રૉન સાથે સંકળાયેલ દ્રવ્ય-તરંગોનો ઉપયોગ ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપમાં થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે યાંત્રિકતરંગો કે જેઓને પ્રસરવા માટે દ્રવ્ય માધ્યમની જરૂર છે, તેમનો અભ્યાસ કરીશું. કલા અને સાહિત્ય પર તરંગોની સૌંદર્યલક્ષી/કલાત્મક અસર ઘણા પ્રાચીન સમયથી જોવા મળી છે, છતાં તરંગગતિનું સૌપ્રથમ વૈજ્ઞાનિક વિશ્લેષણ સત્તરમી સદી જેટલું જૂનું છે. તરંગગતિના ભૌતિકવિજ્ઞાન સાથે સંકળાયેલા કેટલાક પ્રખ્યાત વૈજ્ઞાનિકોમાં ક્રિશ્ચિયન હાઇગેન્સ (Christian Huygens, 1629-1695), રૉબર્ટ હૂક અને આઇઝેક ન્યૂટન છે. તરંગોના ભૌતિકવિજ્ઞાનની સમજણ, સ્પ્રિંગ સાથે બાંધેલ દળોનાં દોલનોના ભૌતિકવિજ્ઞાન અને સાદા લોલકના ભૌતિકવિજ્ઞાનને અનુસરે છે. સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમોમાં તરંગો પ્રસંવાદી (Harmonic) દોલનો સાથે ગાઢ રીતે સંબંધિત છે. (ખેંચાયેલી દોરી, ગૂંચળાવાળી સ્પ્રિંગ, હવા વગેરે સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમનાં ઉદાહરણ છે). આપણે આવો સંબંધ સરળ ઉદાહરણો દ્વારા દર્શાવીશું.

આકૃતિ 15.1માં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજા સાથે જોડાયેલી સ્પ્રિંગોના સમૂહનો વિચાર કરો. જો એક છેડે સ્પ્રિંગને એકાએક ખેંચીને છોડી દેવામાં આવે તો વિક્ષોભ બીજા છેડા સુધી ગતિ કરે છે. આમાં શું થયું હશે ?



આકૃતિ **15.1** *એકબીજા સાથે જોડાયેલી સ્પ્રિંગોનો સમૂહ. A છેડો એકાએક ખેંચવામાં આવે છે તેથી ઉદ્‌ભવતો વિક્ષોભ પછી બીજા છેડા સુધી ગતિ કરે છે.*

પ્રથમ સ્પ્રિંગ તેની સંતુલન લંબાઈમાંથી વિક્ષોભિત/ચલાયમાન થઈ છે. બીજી સ્પ્રિંગ પ્રથમ સાથે જોડાયેલી હોવાથી તે પણ ખેંચાય છે કે સંકોચાય છે અને આ રીતે પ્રક્રિયા આગળ વધે છે, વિક્ષોભ એક છેડેથી બીજા છેડે જાય છે, પરંતુ દરેક સ્પ્રિંગ તેના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ નાનાં દોલનો કરે છે. આ પરિસ્થિતિના વ્યાવહારિક ઉદાહરણ તરીકે એક રેલવે સ્ટેશન પર સ્થિર ઊભેલી ટ્રેનનો વિચાર કરો. ટ્રેનના જુદા જુદા ડબાઓ એકબીજા સાથે સ્પ્રિંગ કપલિંગ દ્વારા જોડાયેલા છે. જ્યારે એક છેડે ઍન્જિન જોડાય છે ત્યારે તે તેની બાજુના ડબાને ધક્કો લગાડે છે આ ધક્કો એક ડબાથી બીજા ડબા તરફ પ્રસરે છે, પણ આખી ટ્રેન સમગ્ર રીતે સ્થાનાંતર કરતી નથી.

હવે આપણે હવામાંથી ધ્વનિતરંગોનું પ્રસરણ વિચારીએ. હવામાં જેમ જેમ તરંગ પસાર થતું જાય તેમ તેમ તે હવાના નાના વિભાગને સંકોચિત કરે છે કે વિસ્તારિત કરે છે. આનાથી તે વિભાગની ઘનતામાં ફેરફાર દા.ત., $\delta\rho$ થાય છે. આ ફેરફારથી તે વિભાગમાં દબાણમાં ફેરફાર δP થાય છે. દબાણ એ એકમ ક્ષેત્રફળ પરનું બળ છે તેથી સ્પ્રિંગની જેમ જ, વિક્ષોભને સમપ્રમાણમાં હોય તેવું એક પુનઃસ્થાપક બળ ઉદ્‌ભવે છે. આ કિસ્સામાં સ્પ્રિંગના વિસ્તરણ કે સંકોચન સાથે સામ્ય ધરાવતી રાશિ એ ઘનતામાં ફેરફાર છે. જો વિભાગનું સંકોચન થયું હોય, તો તે વિભાગમાંના અણુઓ ઠાંસીને ભરાય છે (Packed) અને તેઓ બાજુના વિભાગ તરફ બહાર ધકેલાવાનું વલણ ધરાવે છે. આમ થાય ત્યારે બાજુના વિભાગમાં ઘનતા વધે છે અથવા બાજુના વિભાગમાં સંઘનન (Compression) ઉત્પન્ન થાય છે. પરિણામે પ્રથમ વિભાગમાંની હવા વિઘનન (Rarefaction) અનુભવે છે. જો કોઈ વિભાગ પ્રમાણમાં વિઘનન ધરાવતો હશે તો આસપાસની હવા તેમાં ધસી જશે અને વિઘનનને બાજુના વિભાગમાં ખસેડી દેશે. આમ સંઘનન અને વિઘનન એક વિભાગથી બીજા વિભાગ તરફ ગતિ કરે છે અને વિક્ષોભનું હવામાં પ્રસરણ શક્ય બનાવે છે.

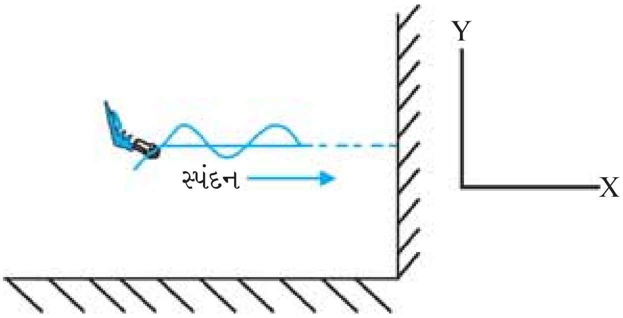
ઘન પદાર્થોમાં આવા જ તર્ક લગાડી શકાય. સ્ફટિકમય ઘન પદાર્થમાં પરમાણુઓ કે પરમાણુના સમૂહો આવર્ત લેટિસમાં ગોઠવાયેલા હોય છે. આમાં, દરેક પરમાણુ કે પરમાણુ-સમૂહ, આસપાસના પરમાણુઓ દ્વારા લાગતાં બળોને લીધે, સંતુલનમાં હોય છે. બીજા પરમાણુઓને સ્થિર રાખીને એક પરમાણુને સ્થાનાંતરિત કરવામાં આવે ત્યારે, સ્પ્રિંગની જેમ જ પુનઃસ્થાપક બળો ઉદ્ભવે છે. આથી આપણે લેટિસમાંના પરમાણુઓને અંત્યબિંદુઓ તરીકે અને તેમની જોડ વચ્ચે સ્પ્રિંગ હોય તેમ ગણી શકીએ છીએ.

આ પ્રકરણના હવે પછીના વિભાગોમાં આપણે તરંગોના કેટલાક લાક્ષણિક ગુણધર્મોની ચર્ચા કરીશું.

15.2 લંબગત અને સંગત તરંગો (TRANSVERSE AND LONGITUDINAL WAVES)

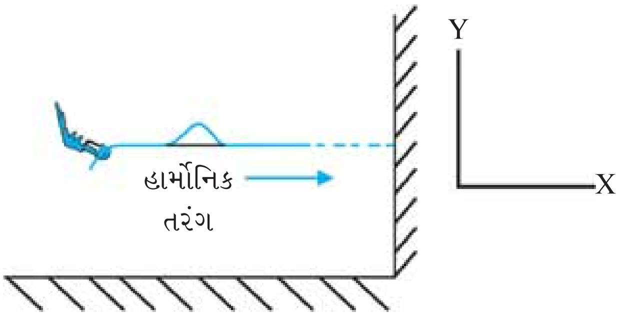
આપણે જોયું કે યાંત્રિક તરંગોની ગતિ માધ્યમના ઘટક કણોનાં દોલનો સાથે સંકળાયેલ છે. જો માધ્યમના ઘટક કણો, તરંગની પ્રસરણ દિશાને લંબરૂપે દોલનો કરતા હોય, તો આપણે તે તરંગને લંબગત (Transverse) તરંગ કહીએ છીએ. જો તેઓ તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર દોલનો કરે તો આપણે તે તરંગને સંગત (Longitudinal) તરંગ કહીએ છીએ.

ઉપર-નીચે એક આંચકો (Jerk) આપવાથી પરિણમેલું એક સ્પંદન (વિક્ષોભ) દોરી પર પ્રસરતું આકૃતિ 15.2માં દર્શાવ્યું છે. જો સ્પંદનના પરિમાણની સરખામણીએ દોરી ખૂબ લાંબી



આકૃતિ **15.2** *જ્યારે સ્પંદન તણાવવાળી દોરીની લંબાઈને સમાંતર (X-દિશામાં) ગતિ કરે છે, ત્યારે દોરીના ખંડ ઉપર નીચે (Y-દિશામાં) દોલનો કરે છે. આ લંબગત તરંગનું ઉદાહરણ છે.*

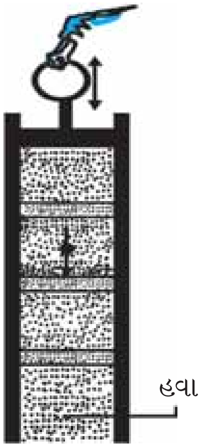
હોય તો બીજા છેડે પહોંચતાં અગાઉ સ્પંદન મંદ પડી જશે અને તે છેડા પરથી થતું પરાવર્તન અવગણી શકાય છે. આકૃતિ 15.3 આવી પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે, પરંતુ આ વખતે બાહ્ય પરિબળ દોરીના એક છેડે સતત આવર્ત Sinusoidal (સાઈન્યુસોઈડલ, Sine પ્રકારનું, જ્યાવર્તી) આંચકા ઉપર-નીચે આપે છે. બંને કિસ્સામાં દોરીના ખંડ જ્યારે સ્પંદન કે તરંગ, તેમનામાંથી પસાર થાય ત્યારે તેમના સરેરાશ સંતુલન સ્થાનની આસપાસ દોલનો કરે છે. આ દોલનો, દોરી પર તરંગ-ગતિની દિશાને લંબરૂપે છે. આથી



આકૃતિ **15.3** *તણાવવાળી દોરી પર ગતિ કરતું હાર્મોનિક (પ્રસંવાદી Sinusoidal) તરંગ, લંબગત તરંગનું ઉદાહરણ છે. તરંગના વિસ્તારમાંનો દોરીનો ખંડ તેના સંતુલન સ્થાનની આસપાસ તરંગ-પ્રસરણની દિશાને લંબરૂપે દોલનો કરે છે.*

આપણે તરંગને બે રીતે જોઈ શકીએ. આપણે સમયની કોઈ ક્ષણને નિશ્ચિત (Fix) કરીને તરંગને અવકાશમાં ચિત્રિત કરીએ. આના પરથી આપણને આપેલી ક્ષણે સમગ્રપણે અવકાશમાં તરંગનો આકાર મળે છે. બીજી રીતે, એક સ્થાન (Location) નિશ્ચિત કરીએ (એટલે કે દોરીના એક ખાસ વિભાગ પર આપણું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ) અને સમય સાથે તેની દોલન ગતિનું નિરીક્ષણ કરીએ.

આકૃતિ 15.4 ધ્વનિતરંગના પ્રસરણના ખૂબ જાણીતા ઉદાહરણમાં સંગતતરંગની પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે. હવાભરેલી લાંબી પાઈપના એક છેડે પિસ્ટન રહેલો છે. એકાએક એક ધક્કો આગળ લગાવી પાછો ખેંચતાં, એક સંઘનન (વધારે ઘનતા) અને વિઘનન (ઓછી ઘનતા)નું સ્પંદન (Pulse) માધ્યમ (Air)માં ઉત્પન્ન થાય છે. જો પિસ્ટનને ધકેલવાનું-ખેંચવાનું સતત અને આવર્ત Sinusoidal હોય તો, Sinusoidal



આકૃતિ **15.4** *હવાભરેલી નળીમાં પિસ્ટનને ઉપર-નીચે ધકેલી ઉત્પન્ન કરેલું સંગતતરંગ (ધ્વનિ). હવાનો એક કદ-ખંડ તરંગ-પ્રસરણની દિશાને સમાંતર દોલનો કરે છે.*

તરંગ ઉત્પન્ન થશે, જે પાઈપની લંબાઈને સમાંતર હવામાં પ્રસરણ પામશે. આ સ્પષ્ટ રીતે, સંગતતરંગનું ઉદાહરણ છે.

ઉપર વિચારેલા, લંબગત કે સંગતતરંગો, પ્રગામી તરંગો છે કારણ કે તેઓ માધ્યમના એક ભાગથી બીજા ભાગ સુધી પ્રસરે છે. અગાઉ આપણે નોંધ્યું તે મુજબ દ્રવ્ય માધ્યમ સમગ્રપણે ગતિ કરતું નથી. દાખલા તરીકે કોઈ ઝરણું સમગ્રપણે પાણીની ગતિ દર્શાવે છે. જ્યારે પાણીની સપાટી પરના તરંગમાં વિક્ષોભ જ ગતિ કરે છે, પણ સમગ્રપણે પાણી નહિ. તેવી જ રીતે પવન (સમગ્ર પણે હવાની ગતિ)ને ધ્વનિતરંગ કે જે વિક્ષોભ (દબાણ ઘનતામાં)ની હવામાંની (સમગ્રપણે હવાના માધ્યમની ગતિ સિવાયની) ગતિ છે તેની સાથે ગૂંચવવી ન જોઈએ.

યાંત્રિકતરંગો માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો સાથે સંબંધ ધરાવે છે. લંબગત તરંગમાં, માધ્યમનાં ઘટકો, તરંગની ગતિને લંબરૂપે દોલનો કરે છે, જેનાથી આકારના ફેરફારો ઉદ્ભવે છે. એટલે કે માધ્યમનો દરેક ખંડ આકાર પ્રતિબળ અનુભવે છે. ઘન પદાર્થો અને દોરીઓને આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક હોય છે એટલે કે તેઓ આકાર પ્રતિબળને સહન કરે છે (Sustain). તરંગોને પોતાનો કોઈ આકાર હોતો નથી–તેઓ આકાર પ્રતિબળને તાબે થઈ જાય છે. આ કારણથી લંબગત તરંગો ઘન પદાર્થો અને દોરી (તણાવ હેઠળ)માં શક્ય બને છે પરંતુ તરલોમાં નહિ. આમ છતાં, ઘન અને તરલોને કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક (bulk modulus) હોય છે, એટલે કે તેઓ દાબીય પ્રતિબળ (Compressive Stress) સહન કરે છે. સંગતતરંગોમાં દાબીય પ્રતિબળ (દબાણ) સંકળાયેલ હોવાથી તેઓ ઘન અને તરલોમાં થઈને પ્રસરણ પામી શકે છે. આમ સ્ટીલનો સળિયો કદ અને આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંકો બંને ધરાવતો હોવાથી લંબગત તેમજ સંગતતરંગોનું વહન કરી શકે છે. પરંતુ હવા ફક્ત સંગતતરંગોનું પ્રસરણ કરી શકે છે. જ્યારે સ્ટીલના સળિયા જેવું માધ્યમ લંબગત અને સંગત બંને તરંગોનું પ્રસરણ કરે છે, ત્યારે તેમની ઝડપ જુદી જુદી હોઈ શકે છે કારણ કે તેઓ જુદા જુદા સ્થિતિસ્થાપક અંકોથી ઉદ્ભવે છે.

ઉદાહરણ 15.1 તરંગગતિનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલ છે. દરેક કિસ્સામાં તરંગગતિ, લંબગત, સંગત કે બંનેનું સંયોજન છે તે જણાવો.

(a) લાંબી (સંગત) સ્પ્રિંગમાં સ્પ્રિંગનો એક છેડો બાજુમાં સ્થાનાંતરિત કરતાં ઉદ્ભવતી વળ (Kink)ની ગતિ

(b) પ્રવાહીભરેલા નળાકારમાં પિસ્ટનને આગળ-પાછળ ખસેડતાં ઉદ્ભવતા તરંગો

(c) પાણીમાં તરતી મોટરબોટથી ઉદ્ભવતા તરંગો

(d) કંપન કરતા ક્વાર્ટ્ઝ સ્ફટિકથી હવામાં ઉદ્ભવતાં અલ્ટ્રાસોનિક (પરાશ્રાવ્ય) તરંગો

ઉકેલ

(a) લંબગત અને સંગત

(b) સંગત

(c) લંબગત અને સંગત

(d) સંગત ◀

15.3 પ્રગામી તરંગમાં સ્થાનાંતર સંબંધ (DISPLACEMENT RELATION IN A PROGRESSIVE WAVE)

પ્રગામી તરંગના ગાણિતિક વર્ણન માટે આપણને સ્થાન x અને સમય t એ બંનેના વિધેયની જરૂર પડે છે. આવા વિધેય દ્વારા દરેક ક્ષણે તરંગનો તે ક્ષણે આકાર દર્શાવવો જોઈએ. વળી તેણે દરેક આપેલ સ્થાને માધ્યમના ઘટકની ગતિ દર્શાવવી જોઈએ. જો આપણે આકૃતિ 15.3માં દર્શાવ્યા મુજબના Sinusoidal (Sine આકારના) પ્રગામી તરંગને રજૂ કરવા માંગતા હોઈએ તો અનુરૂપ વિધેય પણ Sinusoidal (Sine પ્રકારનું) હોવું જોઈએ. સગવડ ખાતર, આપણે તરંગને લંબગત લઈશું જેથી માધ્યમનાં ઘટકોનાં સ્થાન x વડે દર્શાવાય તો, સંતુલન સ્થાનમાંથી સ્થાનાંતર y વડે દર્શાવી શકાય. આ રીતે પ્રગામી Sinusoidal (Sine આકારનું) તરંગ

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.2)$$

વડે રજૂ કરાય છે. Sine વિધેયના પક્ષ અથવા કોણાંક (Argument)માં રહેલા પદ ϕ ને સમતુલ્ય અર્થ એ છે કે, આપણે Sine અને Cosine વિધેયોના નીચેનાં રેખીય સંયોજનોનો વિચાર કરીએ છીએ :

$$y(x, t) = A\sin(kx - \omega t) + B\cos(kx - \omega t) \quad (15.3)$$

સમીકરણ (15.2) અને (15.3) પરથી

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ and } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

સમીકરણ (15.2) Sinusoidal તરંગ કેમ દર્શાવે છે તે સમજવા, એક નિશ્ચિત ક્ષણ $t = t_0$ લો. આથી સમીકરણ (15.2)માં Sine વિધેયનો કોણાંક (Argument) એ માત્ર kx + અચળ છે. આમ કોઈ નિશ્ચિત ક્ષણે, xના વિધેય તરીકે તરંગનો આકાર Sine તરંગ છે. તે જ રીતે કોઈ નિશ્ચિત સ્થાન, દા.ત., $x = x_0$ લો. આમાં સમીકરણ (15.2)માં Sine વિધેયનો કોણાંક (Argument), અચળ-ωt છે. આમ કોઈ નિશ્ચિત સ્થાને સ્થાનાંતર y, Sinusoidal રીતે સમય સાથે બદલાય છે. એટલે કે જુદાં-જુદાં સ્થાને માધ્યમનાં ઘટકો સાદી પ્રસંવાદી ગતિ/સરળ આવર્ત ગતિ કરે છે. અંતે, જેમ t વધે તેમ ધન દિશામાં x વધવું જોઈએ, જેથી $kx - \omega t + \phi$ અચળ રાખી શકાય. આમ સમીકરણ (15.2) x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતા Sinusoidal (પ્રસંવાદી, Harmonic) તરંગને રજૂ કરે છે. બીજી બાજુ,

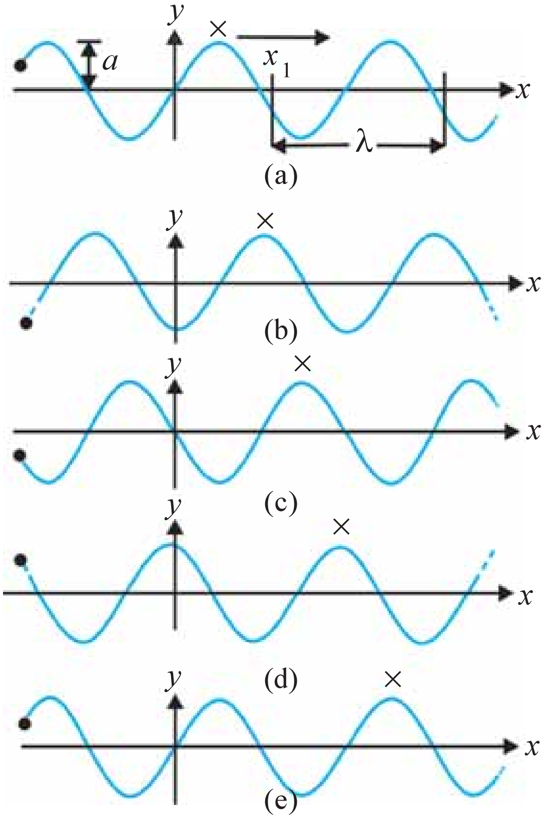
$$y(x, t) = a \sin(kx + \omega t + \phi) \qquad (15.4)$$

વિધેય, x-અક્ષની ઋણ દિશામાં ગતિ કરતા તરંગને રજૂ કરે છે. આકૃતિ (15.5)માં સમીકરણ 15.2માં આવતી વિવિધ ભૌતિકરાશિઓનાં નામ આપેલ છે.

$y(x, t)$	=	સ્થાન x અને સમય tના વિધેય તરીકે સ્થાનાંતર
a	=	તરંગનો કંપ-વિસ્તાર
ω	=	તરંગની કોણીય આવૃત્તિ
k	=	કોણીય તરંગ-સંખ્યા
$kx - \omega t + \phi$	=	x સ્થાને, t સમયે કળા
ϕ	=	પ્રારંભિક કળા એટલે કે $x = 0$ આગળ $t = 0$ સમયે કળા

આકૃતિ 15.5 *સમીકરણ 15.2માં પ્રમાણભૂત સંજ્ઞાઓના અર્થ*

એક સમાન સમયગાળાથી જુદા પડતા જુદા જુદા સમય માટેના સમીકરણ 15.2ના આલેખ આકૃતિ 15.6માં દર્શાવ્યા છે. તરંગમાં શૃંગ (Crest) એ મહત્તમ ધન સ્થાનાંતરનું બિંદુ અને ગર્ત (Trough) એ મહત્તમ ઋણ સ્થાનાંતરનું બિંદુ છે. તરંગ કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે જોવા માટે આપણે આપણું ધ્યાન એક શૃંગ પર કેન્દ્રિત કરીને તે સમય સાથે કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે જોઈએ. આકૃતિમાં આને શૃંગ પર દોરેલી ચોકડી (×) વડે દર્શાવેલ છે. તે જ રીતે આપણે નિશ્ચિત સ્થાને (દા. ત., x-અક્ષનું ઉદ્ગમ) માધ્યમના કોઈ ખાસ ઘટકની



આકૃતિ 15.6 *જુદા જુદા સમયે x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતું હાર્મોનિક તરંગ*

ગતિ જોઈ શકીએ. આ ઘાટા ટપકા (•) વડે દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 15.6માંના આલેખો દર્શાવે છે કે સમય સાથે, ઉદ્ગમ આગળનું ઘાટું ટપકું (•) આવર્ત રીતે ગતિ કરે છે. એટલે કે તરંગ જેમ આગળ વધે તેમ ઉદ્ગમ આગળનો કણ તેના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલન કરે છે. આ બાબત બીજા કોઈ પણ સ્થાન માટે પણ સાચી છે. આપણે એ પણ જોઈ શકીએ કે ઘાટા ટપકાએ (•) એક પૂર્ણ આંદોલન પૂર્ણ કર્યું હોય તે દરમિયાન શૃંગ પણ આગળ તરફ અમુક અંતર સુધી ગતિ કરી ગયું છે.

આકૃતિ 15.6માંના આલેખોનો ઉપયોગ કરીને હવે આપણે સમીકરણ 15.2ની કેટલીક રાશિઓની વ્યાખ્યા આપીએ.

15.3.1 કંપવિસ્તાર અને કળા (Amplitude and Phase)

સમીકરણ (15.2)માં, Sine વિધેયનું મૂલ્ય 1 અને −1ની વચ્ચે બદલાતું હોવાથી; સ્થાનાંતર $y(x, t)$ એ a અને $-a$ની વચ્ચે બદલાય છે. આપણે aને ધન અચળાંક વ્યાપકતાના કોઈ નુકસાન વિના લઈ શકીએ છીએ. આ રીતે a માધ્યમના કોઈ ઘટકનું તેના સંતુલન સ્થાનથી મહત્તમ સ્થાનાંતર દર્શાવે છે. એ નોંધો કે સ્થાનાંતર y ધન કે ઋણ હોઈ શકે છે પણ a ધન છે. તેને તરંગનો **કંપવિસ્તાર** કહે છે.

સમીકરણ (15.2)માં Sine વિધેયના કોણાંક (Argument) તરીકે આવતી રાશિ $(kx - \omega t + \phi)$ તરંગની કળા કહેવાય છે. આપેલા કંપવિસ્તાર a માટે, કળા, કોઈ પણ સ્થાને અને કોઈ પણ સમયે તરંગનું સ્થાનાંતર નક્કી કરે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે, $x = 0$ અને $t = 0$ માટે કળા ϕ છે. આથી ϕને મૂળ કળા (કોણ) કહે છે. X-અક્ષ પર ઉદ્ગમની અને પ્રારંભિક સમયની યોગ્ય પસંદગી દ્વારા $\phi = 0$ મળી શકે છે. આથી ϕને પડતો મૂકવામાં આવે એટલે કે સમીકરણ (15.2)ને $\phi = 0$ સાથે લખીએ તો વ્યાપકતાનું કોઈ નુકસાન થતું નથી.

15.3.2 તરંગલંબાઈ અને કોણીય તરંગ-સંખ્યા (Wavelength and Angular Wave Number)

એકસમાન કળા ધરાવતાં બે બિંદુઓ વચ્ચેના લઘુતમ અંતરને તરંગની તરંગલંબાઈ કહે છે અને તેને સામાન્ય રીતે λ દ્વારા દર્શાવાય છે. સરળતા ખાતર, આપણે સમાન કળાવાળાં બિંદુઓ તરીકે શૃંગો અથવા ગર્તોને પસંદ કરી શકીએ. એ રીતે, તરંગમાં બે ક્રમિક શૃંગ કે બે ક્રમિક ગર્ત વચ્ચેનું અંતર તરંગલંબાઈ છે. સમીકરણ (15.2)માં $\phi = 0$ લેતાં, $t = 0$ સમયે સ્થાનાંતર

$$y(x, 0) = a \sin kx \qquad (15.5)$$

પરથી મળે છે. Sine વિધેય દર 2π જેટલા કોણના તફાવતે તેના મૂલ્યનું પુનરાવર્તન કરતું હોવાથી,

$$\sin kx = \sin(kx + 2n\pi) = \sin k\left(x + \frac{2n\pi}{k}\right)$$

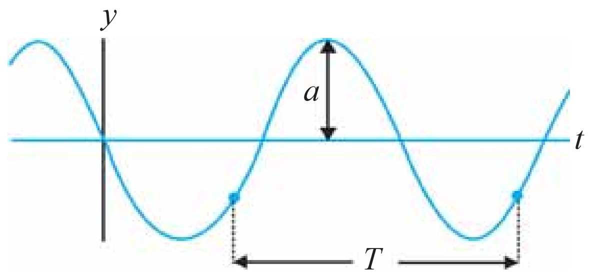
એટલે કે x અને $x + \frac{2n\pi}{k}$ આગળનાં બિંદુઓ આગળ સ્થાનાંતર સમાન છે, જ્યાં $n = 1, 2, 3, ...$ એકસમાન સ્થાનાંતર ધરાવતાં બિંદુઓ વચ્ચેનું લઘુતમ સ્થાનાંતર $n = 1$ લેવાથી મળે છે.

આ રીતે $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ અથવા $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (15.6)

મળે છે. k એ કોણીય તરંગસંખ્યા અથવા પ્રસરણ (Propagation) અચળાંક છે. તેનો SI એકમ radian per metre અથવા rad m^{-1} છે.*

15.3.3 આવર્તકાળ, કોણીય આવૃત્તિ અને આવૃત્તિ (Period, Angular Frequency and Frequency)

આકૃતિ 15.7 ફરી વાર એક Sinusoidal આલેખ દર્શાવે છે. તે આપેલી ક્ષણે તરંગનો આકાર દર્શાવતું નથી પણ (કોઈ નિશ્ચિત સ્થાને) માધ્યમના કોઈ ખંડનું સમયના વિધેય તરીકે સ્થાનાંતર દર્શાવે છે. સરળતા ખાતર આપણે સમીકરણ (15.2)ને $\phi = 0$ સાથે લઈને ખંડની ગતિ $x = 0$ આગળ નિહાળીએ છીએ.



આકૃતિ 15.7 નિશ્ચિત સ્થાને રહેલ દોરીનો ખંડ જ્યારે તરંગ તેના પરથી પસાર થાય ત્યારે સમય સાથે કંપવિસ્તાર a અને આવર્તકાળ T સાથે દોલનો કરે છે.

આ રીતે આપણને

$$y(0, t) = a \sin(-\omega t)$$
$$= -a \sin \omega t$$

મળે. તરંગના દોલનનો આવર્તકાળ એ તેના કોઈ ખંડ (વિભાગ)ને એક દોલન પૂર્ણ કરતાં લાગતો સમય છે. એટલે કે

$$-a \sin \omega t = -a \sin \omega(t + \mathrm{T})$$
$$= -a \sin (\omega t + \omega \mathrm{T})$$

sin વિધેય 2π અંતરાલે પુનરાવર્તન પામતું હોવાથી,

$$\omega \mathrm{T} = 2\pi \text{ અથવા } \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \quad (15.7)$$

ωને તરંગની કોણીય આવૃત્તિ કહે છે તેનો SI એકમ rad s^{-1} છે. આવૃત્તિ ν એ એક સેકન્ડમાં થતાં દોલનોની સંખ્યા છે. આથી,

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (15.8)$$

νને સામાન્ય રીતે hertz (Hz)માં માપવામાં આવે છે.

ઉપરની ચર્ચામાં, હંમેશાં દોરી પર પ્રસરતા તરંગનો અથવા લંબગત તરંગના સંદર્ભનો ઉલ્લેખ કરેલ છે. સંગત તરંગમાં માધ્યમના કોઈ ખંડનું સ્થાનાંતર તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર હોય છે. સમીકરણ (15.2)માં, સંગતતરંગ માટે સ્થાનાંતર વિધેય

$$s(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi) \quad (15.9)$$

તરીકે લખાય છે, જ્યાં $s(x, t)$ એ માધ્યમના x-સ્થાને આવેલ ખંડનું t સમયે, તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર એવું સ્થાનાંતર છે. સમીકરણ (15.9)માં a એ સ્થાનાંતર કંપવિસ્તાર છે. બીજી રાશિઓના અર્થ લંબગત તરંગમાં હતા તે જ છે. સિવાય કે સ્થાનાંતર વિધેય $y(x, t)$ને સ્થાને વિધેય $s(x, t)$ આવે છે.

ઉદાહરણ 15.2 એક દોરી પર પ્રસરતું તરંગ

$y(x, t) = 0.005 \sin (80.0\, x - 3.0\, t)$

વડે દર્શાવાય છે, જેમાં સંખ્યાત્મક અચળાંકો SI એકમોમાં (0.005 m, 80.0 rad m^{-1} અને 3.0 rad s^{-1}) છે. તરંગના (a) કંપવિસ્તાર (b) તરંગલંબાઈ (c) આવર્તકાળ અને આવૃત્તિ શોધો. $x = 30.0$ cm અંતરે અને $t = 20$ s સમયે તરંગનું સ્થાનાંતર y શોધો.

ઉકેલ આ સ્થાનાંતર સમીકરણને, સમીકરણ (15.2)

$$y(x, t) = a \sin (kx - \omega t)$$

સાથે સરખાવતાં,

(a) તરંગનો કંપવિસ્તાર 0.005 m = 5 mm

(b) કોણીય તરંગસંખ્યા $k = 80.0\ \mathrm{m}^{-1}$ અને કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 3.0\ \mathrm{s}^{-1}$ મળે છે. તરંગલંબાઈ λના k સાથેના

---

* *અત્રે 'Radian' પડતો મૂકીને એકમોને માત્ર m^{-1} તરીકે લખી શકાય. આમ k, એકમ અંતરમાં સમાવી શકાતા તરંગોની સંખ્યાના 2π ગણું મૂલ્ય (એટલે કે કુલ કળા-તફાવત) દર્શાવે છે. તેના SI એકમ m^{-1} છે.*

સંબંધ (સમીકરણ 15.6) પરથી

$\lambda = 2\pi / k$

$= \dfrac{2\pi}{80.0\text{m}^{-1}}$

$= 7.85$ cm

(c) T અને ω વચ્ચેના સંબંધ

$T = 2\pi / \omega$ પરથી

$T = \dfrac{2\pi}{3.0\ \text{s}^{-1}}$

$= 2.09$ s

અને આવૃત્તિ $\nu = 1/T = 0.48$ Hz

$x = 30.0$ cm આગળ $t = 20$ s સમયે સ્થાનાંતર

$y = (0.005\ \text{m}) \sin (80.0 \times 0.3 - 3.0 \times 20)$

$= (0.005\ \text{m}) \sin (-36)$

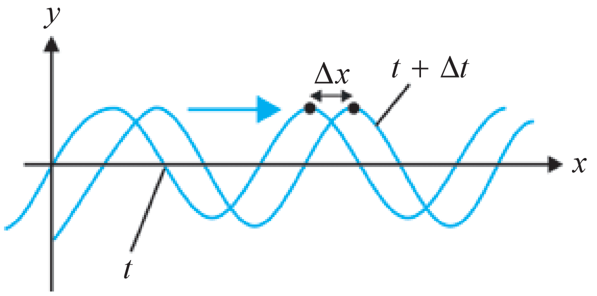
$= (0.005\ \text{m}) \sin (-36 + 12\pi)$

$= (0.005\ \text{m}) \sin (1.699)$

$= (0.005\ \text{m}) \sin (97^{\circ}) \simeq 5$ mm ◀

15.4 પ્રગામી તરંગની ઝડપ (THE SPEED OF A TRAVELLING WAVE)

પ્રગામી તરંગની પ્રસરણની ઝડપ શોધવા માટે આપણે તરંગ પરના (કળાના કંઈક લાક્ષણિક મૂલ્ય ધરાવતા) નિશ્ચિત બિંદુ પર આપણું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ અને તે બિંદુ સમય સાથે કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે જોઈએ. તરંગના શૃંગની ગતિનું નિરીક્ષણ કરવાનું સગવડભર્યું છે. આકૃતિ 15.8 જેમની



આકૃતિ 15.8 હાર્મોનિક તરંગ t થી t + Δt સમયે આગળ વધે છે, જ્યાં Δt નાનો સમયગાળો છે. તરંગભાત સમગ્રપણે જમણી બાજુ ખસે છે. તરંગનું શૃંગ (અથવા કોઈ નિશ્ચિત કલા ધરાવતું બિંદુ) જમણી તરફ Δt સમયમાં Δx અંતર ખસે છે.

વચ્ચે અલ્પ સમયગાળો Δt હોય તેવી બે ક્ષણે તરંગનો આકાર દર્શાવે છે. આખી તરંગભાત Δx જેટલું અંતર જમણી બાજુ (ધન x-દિશામાં) ખસેલી દેખાય છે. ખાસ તો, ટપકા (•) વડે દર્શાવેલું શૃંગ Δt સમયમાં Δx અંતર ખસેલું છે. એટલે તરંગની ઝડપ $\Delta x/\Delta t$ છે. આપણે આવું ટપકું બીજી કોઈ પણ કળા ધરાવતા બિંદુ પર મૂકી શકીએ. તે આટલી જ ઝડપ vથી ગતિ કરશે. (નહિ તો તરંગભાત એકસરખી રહેશે નહિ). અચળ કળા ધરાવતા બિંદુની ગતિ

$$kx - \omega t = \text{અચળ} \tag{15.10}$$

દ્વારા અપાય છે.

આમ, જેમ સમય t બદલાય છે તેમ નિશ્ચિત કળા ધરાવતા બિંદુનું સ્થાન એવી રીતે બદલાવું જોઈએ કે કળા અચળ રહે.

આમ, $kx - \omega t = k(x + \Delta x) - \omega (t + \Delta t)$

અથવા $k\,\Delta x - \omega\,\Delta t = 0$

Δx, Δtને અત્યંત સૂક્ષ્મ લેતાં,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon \tag{15.11}$$

ωના T સાથેના તથા kના λ સાથેના સંબંધ પરથી

$$\upsilon = \frac{2\pi\omega}{2\pi k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \tag{15.12}$$

મળે. બધા પ્રગામી તરંગો માટે વ્યાપક એવું સમીકરણ (15.12) દર્શાવે છે કે માધ્યમના કોઈ ઘટકને એક દોલન પૂર્ણ કરવા જે સમય લાગે તે દરમિયાન તરંગભાત એક તરંગલંબાઈ જેટલું અંતર કાપે છે. આપણે એ નોંધવું જોઈએ કે, યાંત્રિક તરંગની ઝડપ માધ્યમના જડત્વીય (દોરીની રેખીય દળ ઘનતા, વ્યાપક રૂપે દળ ઘનતા) અને સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો (રેખીય માધ્યમ માટે યંગ મોડ્યુલસ/આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક, કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક) દ્વારા નક્કી થાય છે. માધ્યમ ઝડપ નક્કી કરે છે, ત્યાર બાદ સમીકરણ (15.12), આપેલ ઝડપ માટે તરંગલંબાઈનો આવૃત્તિ સાથેનો સંબંધ નક્કી કરે છે. અલબત્ત, અગાઉ નોંધ્યું તે પ્રમાણે, એક જ માધ્યમમાં જેમના વેગ જુદાં-જુદાં હોય તેવા લંબગત અને સંગત એમ બંને તરંગોને માધ્યમ પસાર થવા દે છે. હવે પછી આ પ્રકરણમાં આપણે કેટલાક માધ્યમમાં યાંત્રિકતરંગોની ઝડપનાં વિશિષ્ટ સૂત્રો મેળવીશું.

15.4.1 તણાવવાળી દોરી પર લંબગત તરંગની ઝડપ (Speed of A Transverse Wave on Stretched String)

જ્યારે માધ્યમમાં વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કરવામાં આવે છે ત્યારે તેમાં ઉદ્દ્ભવતા પુનઃસ્થાપક બળ અને માધ્યમના જડત્વીય ગુણધર્મ (દળ ઘનતા) દ્વારા યાંત્રિક તરંગની ઝડપ નક્કી થાય છે. ઝડપને પ્રથમ પરિબળ (પુનઃસ્થાપક બળ) સાથે સમપ્રમાણનો અને બીજા પરિબળ (જડત્વ) સાથે વ્યસ્ત પ્રમાણનો સંબંધ હશે તેવું અપેક્ષિત છે. દોરી પરના તરંગો માટે પુનઃસ્થાપક બળ તણાવ T દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે. આ કિસ્સામાં જડત્વીય

ગુણધર્મ રેખીય દળ ઘનતા μ છે, જે દોરીના દળ m ભાગ્યા તેની લંબાઈ L જેટલી છે. ન્યૂટનના ગતિના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને દોરી પરના તરંગની ઝડપનું સચોટ સૂત્ર મેળવી શકાય, પરંતુ આ તારવણી કરવાનું આ પુસ્તકની મર્યાદા બહારનું છે. આથી, આપણે પારિમાણિક વિશ્લેષણનો ઉપયોગ કરીશું. આપણે એ તો જાણીએ જ છીએ કે એકલા પારિમાણિક વિશ્લેષણથી કદી સચોટ સૂત્ર મેળવી શકાતું નથી. પારિમાણિક વિશ્લેષણમાં પરિમાણરહિત એક અચળાંક હંમેશાં નક્કી કરવાનો બાકી રહેતો જ હોય છે.

μનાં પરિમાણ $[ML^{-1}]$ છે અને Tનાં પરિમાણ બળ જેવાં એટલે કે $[MLT^{-2}]$ છે. આપણે આ બંનેને ઝડપનાં પરિમાણ $[LT^{-1}]$ મેળવવા માટે સંયોજિત કરવાં પડશે. સાદા નિરીક્ષણથી જણાય છે કે T/μ રાશિને પ્રસ્તુત પરિમાણ છે.

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2T^{-2}]$$

આમ જો T અને μ એ જ માત્ર પ્રસ્તુત રાશિઓ છે તેમ ધારી લઈએ તો

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.13)$$

જ્યાં C એ પારિમાણિક વિશ્લેષણનો અનિર્ણિત અચળાંક છે. સચોટ સૂત્ર મેળવવામાં $C = 1$ મળે છે. ખેંચાયેલી દોરી પરના લંબગત તરંગની ઝડપ

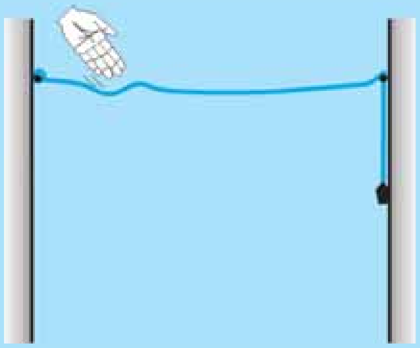
$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.14)$$

પરથી મળે છે. અગત્યના મુદ્દાની નોંધ લઈએ કે ઝડપ v માત્ર માધ્યમના ગુણધર્મો T અને μ પર જ આધારિત છે. (T એ બાહ્ય બળને લીધે ઉદ્‌ભવતો ખેંચાયેલી સ્પ્રિંગનો ગુણધર્મ છે). તે તરંગની પોતાની તરંગલંબાઈ કે આવૃત્તિ પર આધારિત નથી. આગળ ઉપર ઉચ્ચ અભ્યાસમાં તમે એવા તરંગો વિશે જાણશો જેમની ઝડપ તરંગની આવૃત્તિથી સ્વતંત્ર હોતી નથી. λ અને υ એ બે પ્રાચલોમાંથી વિક્ષોભનું ઉદ્‌ગમ, ઉદ્‌ભવેલા તરંગની આવૃત્તિ નક્કી કરે છે. માધ્યમમાં તરંગની આપેલ ઝડપ અને આવૃત્તિ પરથી સમીકરણ (15.12) દ્વારા તરંગલંબાઈ

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} \text{ મુજબ નક્કી થાય છે.} \qquad (15.15)$$

ઉદાહરણ 15.3 એક સ્ટીલના તારની લંબાઈ 0.72 m અને તેનું દળ 5.0×10^{-3} kg છે. જો તાર 60 Nના તણાવ હેઠળ હોય, તો તાર પર લંબગત તરંગની ઝડપ કેટલી હશે ?

દોરડા પર વિક્ષોભ (સ્પંદન)નું પ્રસરણ



એક દોરડા પર વિક્ષોભ (સ્પંદન)ની ગતિ તમે સરળતાથી જોઈ શકો છો. તમે દૃઢ સીમા આગળથી તેનું પરાવર્તન પણ જોઈ શકો છો અને તેનો વેગ માપી શકો છો. તમને 1 થી 3 cm વ્યાસનું દોરડું. બે હૂક અને કેટલાંક વજનોની જરૂર પડશે. તમે આ પ્રયોગ તમારા વર્ગખંડમાં કે પ્રયોગશાળામાં કરી શકો છો.

1 થી 3 cm વ્યાસનું લાંબું દોરડું અથવા જાડી દોરી લો અને તેને ઓરડા કે પ્રયોગશાળામાંની સામસામી દીવાલ પરના હૂક સાથે બાંધો. એક છેડાને હૂક પરથી પસાર કરીને તેની સાથે (લગભગ 1 થી 5 kg) વજન લટકાવો. દીવાલો લગભગ 3 થી 5 m અંતરે હોઈ શકે.

એક લાકડી કે સળિયો લઈ, એક છેડા પાસેના બિંદુએ અથડાવો. આનાથી દોરડા પર વિક્ષોભ (સ્પંદન) ઉત્પન્ન થાય છે જે હવે તેના પર ગતિ કરે છે. તમે તેને છેડા પર પહોંચતો અને પાછો પરાવર્તિત થતો જોઈ શકો છો. તમે આપાત વિક્ષોભ અને પરાવર્તિત વિક્ષોભ વચ્ચે કળા સંબંધ ચકાસી શકો છો. વિક્ષોભ સંપૂર્ણ વિલાઈ જાય તે પહેલાંનાં બે કે ત્રણ પરાવર્તનો તમે સરળતાથી જોઈ શકશો. તમે એક અટક-ઘડી (Stop Watch) લઈને દીવાલો વચ્ચેનું અંતર કાપતાં વિક્ષોભને લાગેલો સમય શોધી શકો છો અને આ પરથી તેનો વેગ માપી શકો છો. તેને સમીકરણ (15.14)થી મળેલ વેગ સાથે સરખાવો.

સંગીતના વાજિંત્રની ધાતુની પાતળી દોરી (તાર) પર પણ આવું જ થાય છે. મુખ્ય તફાવત એ છે કે ધાતુની પાતળી દોરીનું એકમ લંબાઈ દીઠ ઓછું દળ હોવાથી, તેના પર જાડા દોરડાની સરખામણીએ વેગ વધુ હોય છે. જાડા દોરડા પર ઓછા વેગને લીધે આપણે ગતિને જોઈ શકીએ છીએ અને સારી રીતે માપન કરી શકીએ છીએ.

ઉકેલ તારનું એકમ લંબાઈ દીઠ દળ

$$\mu = \frac{5.0\times10^{-3}\,\text{kg}}{0.72\,\text{m}}$$

$$= 6.9 \times 10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}$$

તણાવ $T = 60$ N

તાર પર તરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60\ \text{N}}{6.9\times10^{-3}\text{kg m}^{-1}}} = 93\ \text{m s}^{-1}$$ ◀

15.4.2 સંગત તરંગની ઝડપ (ધ્વનિની ઝડપ) (Speed of Longitudinal Wave - Speed of Sound)

સંગત તરંગમાં માધ્યમનાં ઘટકો તરંગની પ્રસરણ દિશામાં આગળ-પાછળ દોલનો કરતાં હોય છે. આપણે અગાઉ જોયું જ છે કે ધ્વનિતરંગો હવાના નાના કદ ખંડોના સંઘનન અને વિઘનનના રૂપમાં ગતિ કરે છે. જે સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મ, દાબીય વિકૃતિની અસર હેઠળ ઉદ્ભવતું પ્રતિબળ નક્કી કરે છે તે માધ્યમનો કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક (બલ્ક મોડ્યૂલસ) છે જે

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \tag{15.16}$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત છે. (જુઓ પ્રકરણ 9.)

અહીં, દબાણ-તફાવત ΔPને લીધે કદ વિકૃતિ $\frac{\Delta V}{V}$ ઉત્પન્ન થાય છે. Bનાં પરિમાણ દબાણ જેવાં જ છે અને *SI* એકમમાં Pascal (*Pa*)ના પદમાં લખાય છે. તરંગ-પ્રસરણમાં પ્રસ્તુત એવો જડત્વીય ગુણધર્મ એ દળ ઘનતા ρ છે, તેનાં પરિમાણ $[ML^{-3}]$ છે. સામાન્ય નિરીક્ષણથી જણાય છે કે B/ρનાં પરિમાણ

$$\frac{[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}]}{[\text{ML}^{-3}]} = [\text{L}^2\text{T}^{-2}] \tag{15.17}$$

છે. આમ જો B અને ρને જ પ્રસ્તુત રાશિઓ ગણીએ તો

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{15.18}$$

જ્યાં, અગાઉની જેમ C એ પારિમાણિક વિશ્લેષણનો અનિર્ણિત અચળાંક છે. સચોટ સૂત્ર મેળવવામાં $C = 1$ મળે છે. આમ માધ્યમમાં સંગત-તરંગ માટેનું વ્યાપક સૂત્ર

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \text{ છે.} \tag{15.19}$$

કોઈ ઘન સળિયા (Bar) (કે પટ્ટી) જેવા રેખીય માધ્યમ માટે સળિયાનું પાર્શ્વિક (Lateral) વિસ્તરણ અવગણ્ય હોય છે અને આપણે તેને ફક્ત સંગત (પ્રતાન) વિકૃતિ છે તેમ ગણી શકીએ. તે કિસ્સામાં સ્થિતિસ્થાપકતાનો પ્રસ્તુત અંક યંગ મૉડ્યૂલસ છે, તેનાં પરિમાણ પણ બલ્ક મોડ્યૂલસના જેવાં જ છે. આ કિસ્સામાં પારિમાણિક વિશ્લેષણ અગાઉના જેવું જ છે અને તે સમીકરણ 15.18 જેવો સંબંધ આપે છે, જેમાં C એ અનિર્ણિત છે અને સચોટ સૂત્ર મેળવવામાં $C = 1$ મળે છે. આમ કોઈ ઘન પટ્ટીમાં સંગત-તરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{15.20}$$

પરથી મળે છે. જ્યાં Y એ પટ્ટીના દ્રવ્યનો યંગ મોડ્યૂલસ છે. કોષ્ટક 15.1 કેટલાંક માધ્યમોમાં ધ્વનિનો વેગ દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 15.1 કેટલાંક માધ્યમોમાં ધ્વનિની ઝડપ

માધ્યમ	ઝડપ (m s^{-1})
વાયુઓ	
હવા (0° C)	331
હવા (20° C)	343
હિલિયમ	965
હાઇડ્રોજન	1284
પ્રવાહીઓ	
પાણી (0° C)	1402
પાણી (20° C)	1482
દરિયાનું પાણી	1522
ઘન પદાર્થો	
ઍલ્યુમિનિયમ	6420
તાંબું	3560
સ્ટીલ	5941
ગ્રેનાઇટ	6000
વલ્કેનાઇઝ્ડ રબર	54

ધ્વનિની ઝડપ વાયુઓમાં હોય તે કરતાં પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થોમાં સામાન્ય રીતે વધારે હોય છે. (નોંધો કે ઘન માટે અહીં આપેલ ઝડપ એ સંગત-તરંગોની ઝડપ છે.) આમ થવાનું કારણ એ છે કે, તેમને સંકોચવાનું (Compress) વાયુઓ કરતાં ખૂબ વધારે મુશ્કેલ છે અને તેથી તેમના બલ્ક મોડ્યૂલસનું મૂલ્ય ઘણું મોટું હોય છે. આ બાબત વાયુઓ કરતાં તેમની વધુ ઘનતાની અસરને સરભર (Compensate) કરવા કરતાં પણ વધારે અસર કરે છે.

આપણે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ, આદર્શ વાયુ સંનિકટતા સાથે અંદાજી શકીએ. આદર્શ વાયુ માટે દબાણ P, કદ V અને તાપમાન T વચ્ચેનો સંબંધ (જુઓ પ્રકરણ 11.)

$$PV = Nk_BT \tag{15.21}$$

છે. જ્યાં N એ V કદમાં અણુઓની સંખ્યા છે. k_B બૉલ્ટ્ઝમૅન અચળાંક અને T વાયુનું તાપમાન (કેલ્વિનમાં) છે. આથી સમતાપી ફેરફાર માટે સમીકરણ (15.21) પરથી

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

અથવા $-\dfrac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$

આ મૂલ્ય સમીકરણ (15.16)માં અવેજ કરતાં

$B = P$ મળે.

આથી સમીકરણ (15.21) પરથી, આદર્શ વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \tag{15.22}$$

પરથી મળે છે. આ સંબંધ સૌપ્રથમ ન્યૂટને આપ્યો હતો અને તેથી તેને ન્યૂટનનું સૂત્ર કહે છે.

▶ ***ઉદાહરણ 15.4*** પ્રમાણભૂત તાપમાને અને દબાણે હવામાંથી ધ્વનિના વેગનો અંદાજ મેળવો. 1 mole હવાનું દળ 29.0×10^{-3} kg છે.

ઉકેલ આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ પણ વાયુના 1 moleનું STP એ કદ 22.4 Litre છે. તેથી STP એ હવાની ઘનતા

ρ_0 = (એક મોલ હવાનું દળ/એક મોલ હવાનું STP એ કદ)

$$= \frac{29.0\times10^{-3}\ \text{kg}}{22.4\times10^{-3}\ \text{m}^3}$$

$$= 1.29\ \text{kg m}^{-3}$$

માધ્યમમાંથી ધ્વનિની ઝડપ માટેના ન્યૂટનના સૂત્ર મુજબ, હવામાંથી STP એ ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \left[\frac{1.01\times10^5\ \text{N m}^{-2}}{1.29\ \text{kg m}^{-3}}\right]^{1/2} = 280\ \text{m s}^{-1} \tag{15.23}$$

કોષ્ટક 15.1માં આપેલ પ્રાયોગિક મૂલ્ય 331 m s^{-1}ની સરખામણીએ સમીકરણ (15.23)માં દર્શાવેલું પરિણામ લગભગ 15 % નાનું છે. આપણે ક્યાં ભૂલ કરી ? જો આપણે ન્યૂટનની મૂળ પૂર્વધારણા તપાસીએ કે જેમાં ધ્વનિતરંગોના માધ્યમમાં પ્રસરણ દરમિયાન દબાણના ફેરફારો સમતાપી (Isothermal) છે, તો આપણને તે સાચી જણાતી નથી. લાપ્લાસે એમ દર્શાવ્યું હતું કે ધ્વનિતરંગોના પ્રસરણ દરમિયાન દબાણના ફેરફારો એટલા ઝડપી હોય છે કે, ઉષ્માવહનને, તાપમાન અચળ જાળવી રાખવાનો પૂરતો સમય મળતો જ નથી. તેથી આ ફેરફારો સમતાપી નહિ પણ સમોષ્મી (adiabatic) છે. સમોષ્મી ફેરફારો માટે આદર્શ વાયુ

PV^γ = અચળ, સમીકરણનું પાલન કરે છે.

$\therefore\ \Delta(PV^\gamma) = 0$

અથવા $P\,\gamma\,V^{\gamma-1}\,\Delta V + V^\gamma\,\Delta P = 0$

આમ, આદર્શ વાયુ માટે સમોષ્મી બલ્ક મોડ્યૂલસ (કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક)

$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

$$= \gamma P$$

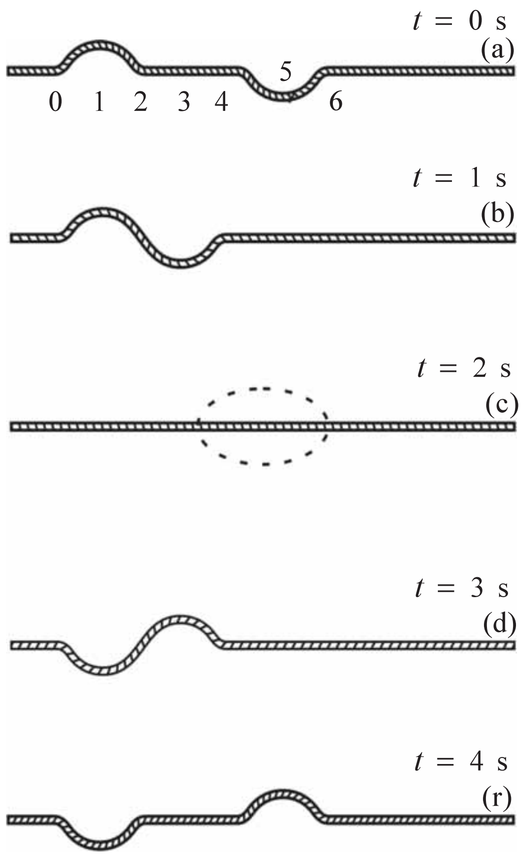
જ્યાં γ એ વાયુની બે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓનો ગુણોત્તર C_p/C_v છે. આથી, ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{15.24}$$

સૂત્ર પરથી મળે છે. ન્યૂટનના સૂત્રમાંના આ ફેરફારને **લાપ્લાસનો સુધારો** કહે છે. હવા માટે $\gamma = 7/5$. હવે સમીકરણ (15.24)નો ઉપયોગ, STP એ હવામાંથી ધ્વનિની ઝડપ શોધવા માટે કરીએ તો, મૂલ્ય 331.3 m s^{-1} મળે છે. જે પ્રાયોગિક મૂલ્ય સાથે બંધબેસતું છે. ◀

15.5 તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત (THE PRINCIPLE OF SUPERPOSITION OF WAVES)

જ્યારે બે તરંગ-સ્પંદનો (Wave Pulses) પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં કરતાં એકબીજાને વટાવી જાય (Cross) ત્યારે શું થાય છે ? એવું જણાયું છે કે તરંગ-સ્પંદનો એકબીજાંને વટાવી જાય તે પછી પણ પોતાની ઓળખ (Identity) જાળવી રાખે છે. આમ છતાં, તેઓ સંપાત થયા હોય તે સમય દરમિયાન, તરંગભાત (Wave Pattern), દરેક સ્પંદન કરતાં જુદી હોય છે. જ્યારે સમાન અને વિરુદ્ધ આકારનાં બે સ્પંદનો એકબીજાં તરફ ગતિ કરે ત્યારની પરિસ્થિતિ આકૃતિ 15.9માં દર્શાવી છે. જ્યારે સ્પંદનો સંપાત થાય ત્યારે પરિણામી સ્થાનાંતર દરેક સ્પંદનથી થતા સ્થાનાંતરના બૈજિક સરવાળા જેટલું હોય છે. આને તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત કહે છે. આ સિદ્ધાંત મુજબ દરેક સ્પંદન એવી રીતે ગતિ કરે છે કે જાણે બીજા સ્પંદન હાજર જ નથી. આથી માધ્યમનાં ઘટકો બંનેને લીધે સ્થાનાંતર અનુભવે છે અને સ્થાનાંતર ધન કે ઋણ હોઈ શકે છે. તેથી પરિણામી સ્થાનાંતર તે બંનેના બૈજિક સરવાળા જેટલું હોય છે. આકૃતિ 15.9, જુદા જુદા સમયે તરંગના આકારના આલેખ દર્શાવે છે. આલેખ (c)માંની નાટ્યાત્મક અસરની



આકૃતિ 15.9 *સમાન અને વિરુદ્ધ સ્થાનાંતર ધરાવતાં અને વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં બે સ્પંદનો વક્ર (c)માં સંપાત થતાં સ્પંદનોનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.*

નોંધ લો. બે સ્પંદનોને લીધે થતાં સ્થાનાંતરોએ એકબીજાને નાબૂદ કર્યા છે અને સમગ્રપણે સ્થાનાંતર શૂન્ય જણાય છે.

સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને ગણિતીય રીતે રજૂ કરવા માટે ધારો કે $y_1(x, t)$ અને $y_2(x, t)$, માધ્યમમાં બે તરંગ-વિક્ષોભને લીધે મળતાં સ્થાનાંતર છે. જો તરંગો કોઈ વિસ્તારમાં એકસાથે આવી પહોંચે અને તેથી સંપાત થાય તો, પરિણામી સ્થાનાંતર

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \qquad (15.25)$$

જો બે કે વધુ તરંગો માધ્યમમાં ગતિ કરતાં સંપાત થાય તો પરિણામી તરંગ-આકાર (Wave Form), વ્યક્તિગત તરંગોના તરંગવિધેયોના સરવાળા બરાબર હોય છે. એટલે કે ગતિ કરતા તરંગોનાં તરંગવિધેયો

$y_1 = f_1(x - \upsilon t)$,

$y_2 = f_2(x - \upsilon t)$,

....

....

$y_n = f_n(x - \upsilon t)$

હોય, તો માધ્યમમાં પરિણામી તરંગવિધેય

$$y = f_1(x - \upsilon t) + f_2(x - \upsilon t) + \ldots + f_n(x - \upsilon t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x - \upsilon t) \text{ છે.} \qquad (15.26)$$

સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત વ્યતીકરણની ઘટનાના પાયામાં રહેલો છે.

સરળતા ખાતર તણાવવાળી દોરી પર પ્રસરતા એક સમાન ω (કોણીય આવૃત્તિ), એક સમાન k (કોણીય તરંગસંખ્યા) અને તેથી સમાન તરંગલંબાઈ λ ધરાવતા બે હાર્મોનિક પ્રગામી તરંગોનો વિચાર કરો. તેમની તરંગ-ઝડપ સમાન હશે. આપણે વધારામાં એવું ધારીએ કે તેમનાં કંપવિસ્તારો સમાન છે અને તેઓ બંને X-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરે છે. આ બે તરંગો વચ્ચે માત્ર પ્રારંભિક કળાનો જ તફાવત છે.

સમીકરણ (15.2) મુજબ, આ બે તરંગોને

$$y_1(x, t) = a \sin (kx - \omega t) \qquad (15.27)$$

અને $y_2(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi) \qquad (15.28)$

વડે રજૂ કરી શકાય છે. આથી સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ પરિણામી સ્થાનાંતર

$$y(x, t) = a \sin (kx - \omega t) + a \sin (kx - \omega t + \phi) \qquad (15.29)$$

$$= a\left[2 \sin\left[\frac{(kx - \omega t) + (kx - \omega t + \phi)}{2}\right] \cos \frac{\phi}{2}\right] \qquad (15.30)$$

જ્યાં આપણે $\sin A + \sin B$ માટેના જાણીતા ત્રિકોણમિતીય સૂત્રનો ઉપયોગ કર્યો છે. આ પરથી આપણને

$$y(x, t) = 2a \cos \frac{\phi}{2} \sin \left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right) \qquad (15.31)$$

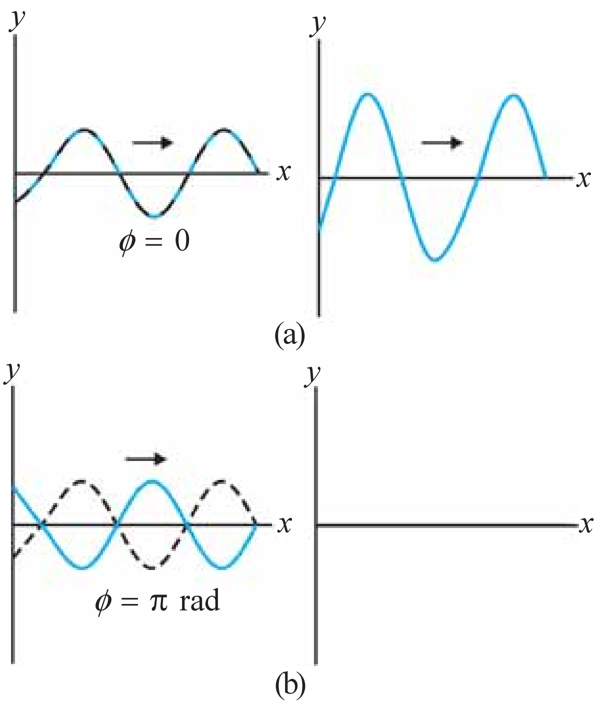
મળે. સમીકરણ (15.31) પણ x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતું પ્રગામી, હાર્મોનિક તરંગ દર્શાવે છે, જેની આવૃત્તિ અને તરંગલંબાઈ મૂળ તરંગો જેટલી જ છે. પરંતુ તેનો પ્રારંભિક કળાકોણ $\frac{\phi}{2}$ છે. એક નોંધપાત્ર બાબત એ છે કે, તેનો કંપવિસ્તાર, બે ઘટક તરંગોના કળા-તફાવત ϕનું વિધેય છે.

$$A(\phi) = 2a \cos \frac{1}{2}\phi \qquad (15.32)$$

$\phi = 0$ માટે તરંગો કળામાં હોય છે, તેથી

$$y(x, t) = 2a \sin (kx - \omega t) \qquad (15.33)$$

એટલે કે પરિણામી તરંગનો કંપવિસ્તાર $2a$ છે, જે Aનું મહત્તમ શક્ય મૂલ્ય છે. $\phi = \pi$ માટે, તરંગો પૂરેપૂરા વિરોધી



આકૃતિ **15.10** *સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ સમાન કંપવિસ્તાર અને તરંગલંબાઈ ધરાવતા બે હાર્મોનિક તરંગોનું પરિણામી તરંગ. પરિણામી તરંગનો કંપવિસ્તાર, કળા-તફાવત ϕ, જે (a) માટે શૂન્ય અને (b) માટે π છે, તેના પર આધારિત છે.*

કળામાં એટલે કે 180° કળા-તફાવતમાં છે અને પરિણામી તરંગ દરેક સ્થાને બધા સમય માટે શૂન્ય સ્થાનાંતર ધરાવે છે.

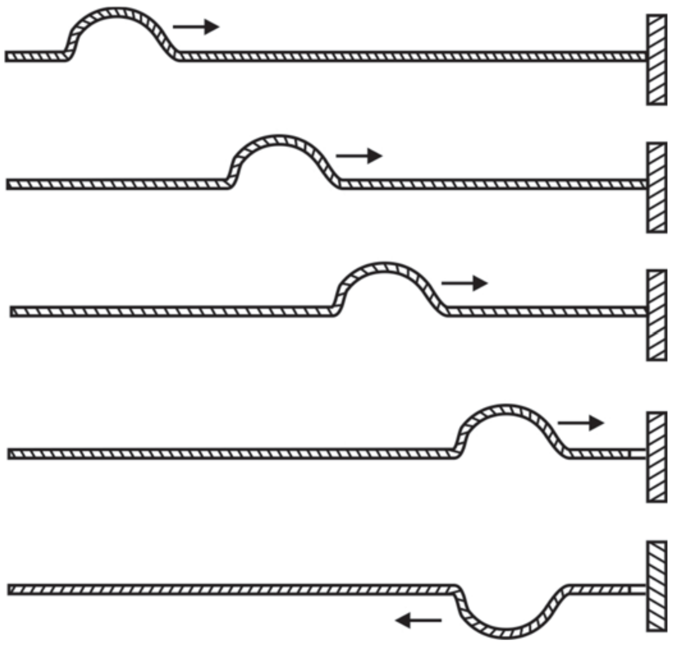
$$y(x, t) = 0 \qquad (15.34)$$

સમીકરણ (15.33) બે તરંગોના સહાયક વ્યતીકરણ (Constructive Interference)ને રજૂ કરે છે, જેમાં પરિણામી તરંગમાં કંપવિસ્તારોનો સરવાળો થાય છે. સમીકરણ (15.34), તેમનું વિનાશક વ્યતીકરણ (Distructive Interference) રજૂ કરે છે, જેમાં પરિણામી તરંગમાં કંપવિસ્તારોની બાદબાકી થાય છે. આકૃતિ 15.10 સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી ઉદ્ભવતા વ્યતીકરણના આ બે કિસ્સાઓ દર્શાવે છે.

15.6 તરંગોનું પરાવર્તન (REFLECTION OF WAVES)

અત્યાર સુધી આપણે અસીમિત માધ્યમમાં પ્રસરતા તરંગોનો વિચાર કર્યો. કોઈ સ્પંદન કે તરંગ જ્યારે કોઈ સીમા પર પહોંચે ત્યારે શું થાય છે ? જો સીમા પાસેનું બીજું માધ્યમ દૃઢ હોય તો સ્પંદન કે તરંગ પરાવર્તન પામે છે. પડઘા પડવાની ઘટના એ દૃઢ સીમા આગળથી થતા પરાવર્તનનું ઉદાહરણ છે. જો સીમા સંપૂર્ણ દૃઢ ન હોય અથવા તે બે જુદાં જુદાં સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમોની આંતરસપાટી હોય, તો પરિસ્થિતિ કંઈક અંશે જટિલ (Complicated) છે. આપાત તરંગનો થોડો ભાગ પરાવર્તન પામે છે અને બાકીનો ભાગ બીજા માધ્યમમાં પસાર થાય છે. જો તરંગ બે જુદાં જુદાં માધ્યમોની સીમા પર ત્રાંસી રીતે આપાત થાય તો બીજા માધ્યમમાં પસાર થયેલું તરંગ **વક્રીભૂત (Refracted)** તરંગ કહેવાય છે. આપાત અને વક્રીભૂત તરંગો વક્રીભવનના સ્નેલ (Snell)ના નિયમનું પાલન કરે છે તથા આપાત અને પરાવર્તિત તરંગો પરાવર્તનના સામાન્ય નિયમોનું પાલન કરે છે.

આકૃતિ 15.11માં તણાવવાળી દોરી પર પ્રસરતું અને સીમા આગળથી પરાવર્તિત થતું સ્પંદન દર્શાવ્યું છે. સીમા દ્વારા કોઈ ઊર્જાનું શોષણ થતું નથી એમ ધારીએ તો પરાવર્તિત તરંગનો આકાર આપાત તરંગ જેવો જ છે પરંતુ તે પરાવર્તન વખતે π અથવા 180^oનો કળાનો ફેરફાર અનુભવે છે. આનું કારણ એ છે કે સીમા દૃઢ છે અને વિક્ષોભનું સીમા પર સ્થાનાંતર બધા સમય માટે શૂન્ય થવું જોઈએ. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ આ શક્ય તો જ બને કે જો પરાવર્તિત અને આપાત તરંગો વચ્ચે કળાનો તફાવત π હોય, જેથી પરિણામી સ્થાનાંતર શૂન્ય થાય. આ તર્ક કોઈ દૃઢ દીવાલ પરની સીમા શરત પર આધારિત છે. આપણે ગતિશાસ્ત્ર પરથી પણ આ જ નિર્ણય પર આવી શકીએ. સ્પંદન જ્યારે દીવાલ પર આવે છે ત્યારે દોરી દીવાલ પર બળ લગાડે છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ દીવાલ દોરી પર સમાન અને વિરુદ્ધ બળ લગાડે છે, તેનાથી કળામાં π જેટલો તફાવત ધરાવતું પરાવર્તિત સ્પંદન ઉત્પન્ન થાય છે.



આકૃતિ **15.11** *દૃઢ સીમા આગળથી સ્પંદનનું પરાવર્તન*

બીજી બાજુ, જો સીમાબિંદુ દઢ ન હોય પણ ગતિ માટે સંપૂર્ણ મુક્ત હોય, (દોરી, કોઈ સળિયા પર મુક્ત રીતે ખસી શકતી વલય (Ring) સાથે બાંધી હોય તેવો કિસ્સો) તો પરાવર્તિત સ્પંદનના કળા અને કંપવિસ્તાર આપાત સ્પંદનના જેટલા જ હોય છે. આથી સીમા પર પરિણામી મહત્તમ સ્થાનાંતર દરેક સ્પંદનના કંપવિસ્તારથી બમણું હોય છે. અ-દઢ સીમાનું ઉદાહરણ એ ઑર્ગન પાઇપનો ખુલ્લો છેડો છે.

ટૂંકમાં, પ્રગામી તરંગ અથવા સ્પંદન દઢ સીમા આગળથી પરાવર્તન વખતે π જેટલો કળાનો ફેરફાર અનુભવે છે અને ખુલ્લી સીમા આગળથી પરાવર્તન વખતે કોઈ કળાનો ફેરફાર અનુભવતું નથી. આ બાબતને ગણિતીય રૂપમાં રજૂ કરવા માટે ધારો કે આપાત પ્રગામી તરંગ

$y_i(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$ છે.

દઢ સીમા પરથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \pi)$$

$$= -a \sin(kx - \omega t) \qquad (15.35)$$

છે અને ખુલ્લી સીમા પરથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = a \sin(kx - \omega t + 0)$$

$$= a \sin(kx - \omega t) \qquad (15.36)$$

એ સ્પષ્ટ છે કે, દઢ સીમા આગળ બધા સમયે $y = y_i + y_r = 0$.

15.6.1 સ્થિત તરંગો અને નૉર્મલ મોડ્ઝ (Standing Waves and Normal Modes)

ઉપર આપણે એક સીમા આગળથી પરાવર્તનનો વિચાર કર્યો. પરંતુ કેટલીક જાણીતી પરિસ્થિતિઓ (બંને છેડે જડિત કરેલી દોરી અથવા બંને છેડે બંધ હોય તેવી નળીમાંનો હવાનો સ્તંભ) એવી હોય છે કે જેમાં પરાવર્તન બે કે વધુ સીમાઓ આગળ થતું હોય. દાખલા તરીકે, જમણી બાજુ પ્રસરતું તરંગ એક છેડેથી પરાવર્તન પામશે અને તે બીજા છેડા તરફ જઈ બીજા છેડેથી પરાવર્તન પામશે. જ્યાં સુધી તરંગની એક સ્થાયી (Steady) ભાત (Pattern) રચાય ત્યાં સુધી આવું ચાલ્યા કરશે. આવી તરંગભાતને સ્થિત તરંગ (Standing Wave અથવા Stationary Wave) કહે છે. આ બાબત ગણિતીય રીતે જોવા માટે, x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતા અને સમાન તરંગલંબાઈ અને સમાન કંપવિસ્તાર ધરાવતા x-અક્ષની ઋણ દિશામાં પરાવર્તનથી મળેલા તરંગનો વિચાર કરો. $\phi = 0$ સાથે સમીકરણ (15.2) અને (15.4) પરથી,

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = a \sin(kx + \omega t)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર દોરી પરનું પરિણામી તરંગ,

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$= a [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]$$

જાણીતા ત્રિકોણમિતીય સૂત્ર Sin (A + B) + Sin (A − B) = 2 Sin A cosBનો ઉપયોગ કરતાં,

$y(x, t) = 2a \sin kx \cos \omega t$ મળે છે. (15.37)

સમીકરણ (15.37) વડે રજૂ થતા તરંગ અને સમીકરણ (15.2) તથા (15.4) વડે રજૂ થતા તરંગોના પ્રકાર વચ્ચેનો તફાવત નોંધો. kx અને ωt પદો જુદાં જુદાં આવે છે પણ $kx - \omega t$ જેવા સંયોજિત રૂપે આવતાં નથી. આ તરંગનો કંપવિસ્તાર $2a \sin kx$ છે. આમ, આ પ્રકારના તરંગમાં બિંદુએ બિંદુએ કંપવિસ્તાર બદલાય છે. પરંતુ દોરીનો દરેક અંશ (ખંડ) એક સમાન કોણીય આવૃત્તિ ω અથવા આવર્તકાળથી દોલનો કરે છે. તરંગના જુદા જુદા વિભાગોનાં દોલનોની વચ્ચે કોઈ કળા-તફાવત હોતો નથી. દોરી સમગ્રપણે જુદાં જુદાં બિંદુઓએ જુદા જુદા કંપવિસ્તાર સાથે કળામાં દોલનો કરે છે. તરંગ-ભાત (Wave Pattern) જમણી બાજુ કે ડાબી બાજુ ખસતી નથી. આથી તે સ્થિતતરંગ કહેવાય છે. આપેલા સ્થાને કંપવિસ્તાર અમુક નિશ્ચિત હોય છે પણ અગાઉ નોંધ્યું તે મુજબ તે જુદાં જુદાં સ્થાને જુદો જુદો હોય છે. જે બિંદુઓએ કંપવિસ્તાર શૂન્ય (જ્યાં કંઈ ગતિ થતી નથી.) હોય તેમને **નિષ્પંદ બિંદુઓ (Nodes)** કહે છે. જે બિંદુઓએ કંપવિસ્તાર મહત્તમ હોય તે બિંદુઓને **પ્રસ્પંદ બિંદુઓ (Antinodes)** કહે છે. આકૃતિ 15.12, વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા બે પ્રગામી તરંગોના સંપાતીકરણથી ઉદ્ભવતી સ્થિત તરંગ-ભાત દર્શાવે છે.

સ્થિત તરંગોનું સૌથી મહત્ત્વનું લક્ષણ એ છે કે, સીમા શરતો તંત્રનાં દોલનોની શક્ય આવૃત્તિઓ અને તરંગલંબાઈઓ પર નિયંત્રણ લાદે છે. તંત્ર કોઈ પણ યાદચ્છિક (Arbitrary) આવૃત્તિથી દોલનો કરી શકતું નથી. (હાર્મોનિક પ્રગામી તરંગોથી આ જુદું પડે છે તે જુઓ.) પરંતુ તે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓના ગણ (Set) અથવા દોલનના **નૉર્મલ મોડ્ઝ** (પ્રસામાન્યરીતી દોલનો) દ્વારા લાક્ષણિક બનેલું છે. બંને છેડે જડિત કરેલી દોરી માટે હવે આપણે આવા નૉર્મલ મોડ્ઝ નક્કી કરીશું.

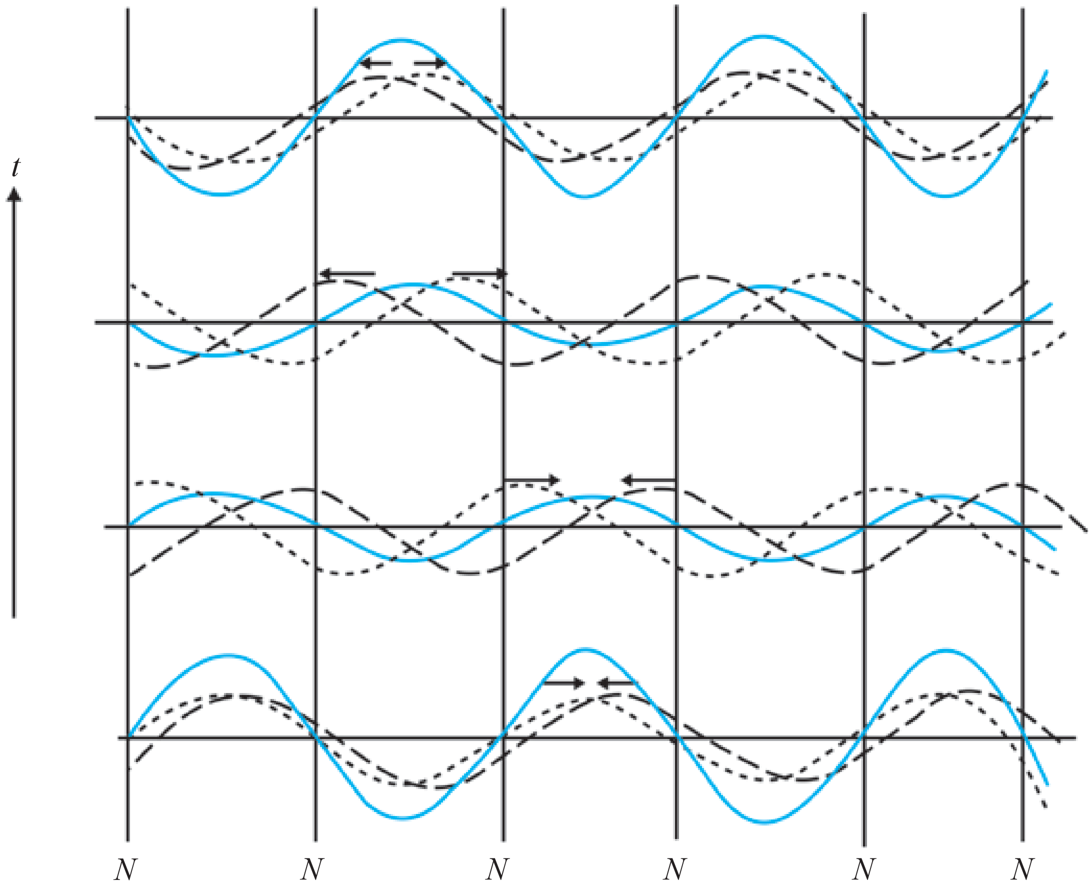
શરૂમાં, સમીકરણ (15.37) પરથી નિષ્પંદ બિંદુઓ (જ્યાં કંપવિસ્તાર શૂન્ય હોય છે.) $\sin kx = 0$ પરથી મળે છે. તે મુજબ

$$kx = n\pi;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ હોવાથી,}$$

$$x = \frac{n\lambda}{2};\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (15.38)$$

મળે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે કોઈ પણ બે ક્રમિક નિષ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે. તે જ રીતે પ્રસ્પંદ બિંદુઓનાં



આકૃતિ **15.12** *વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા બે પ્રગામી તરંગોના સંપાતીકરણથી ઉદ્‌ભવતા સ્થિત તરંગો. શૂન્ય સ્થાનાંતર (નિષ્પંદ બિંદુઓ)નાં સ્થાન બધા જ સમય માટે નિશ્ચિત રહે છે.*

સ્થાન (જ્યાં કંપવિસ્તાર મહત્તમ હોય છે.) sin kxના મહત્તમ મૂલ્ય પરથી મળે છે.

$|\sin kx| = 1$

આ પરથી, $kx = (n + ½)\pi$; $n = 0, 1, 2, 3, ...$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ મૂકતાં,

$$x = (n + ½)\frac{\lambda}{2}; \ n = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (15.39)$$

મળે છે. કોઈ પણ બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે. બંને છેડે જડિત કરેલી અને તણાવવાળી L લંબાઈની દોરીના કિસ્સાને સમીકરણ (15.38) લાગુ પાડી શકાય છે. એક છેડો $x = 0$ આગળ લેતાં, સીમા શરતો એ છે કે $x = 0$ અને $x = L$ એ નિષ્પંદ બિંદુઓનાં સ્થાનો છે. $x = L$ આગળ નિષ્પંદ બિંદુ હોવાની શરતના પાલન માટે લંબાઈ Lનો λ સાથેનો સંબંધ નીચે મુજબ હોવો જોઈએ :

$$L = n\frac{\lambda}{2}; \ n = 1, 2, 3,... \qquad (15.40)$$

આમ, સ્થિર તરંગોની શક્ય તરંગલંબાઈઓ

$$\lambda = \frac{2L}{n}; \ n = 1, 2, 3,... \qquad (15.41)$$

સૂત્ર દ્વારા નિયંત્રિત થાય છે અને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ,

$$\nu = \frac{n\upsilon}{2L}, \ n = 1, 2, 3 \qquad (15.42)$$

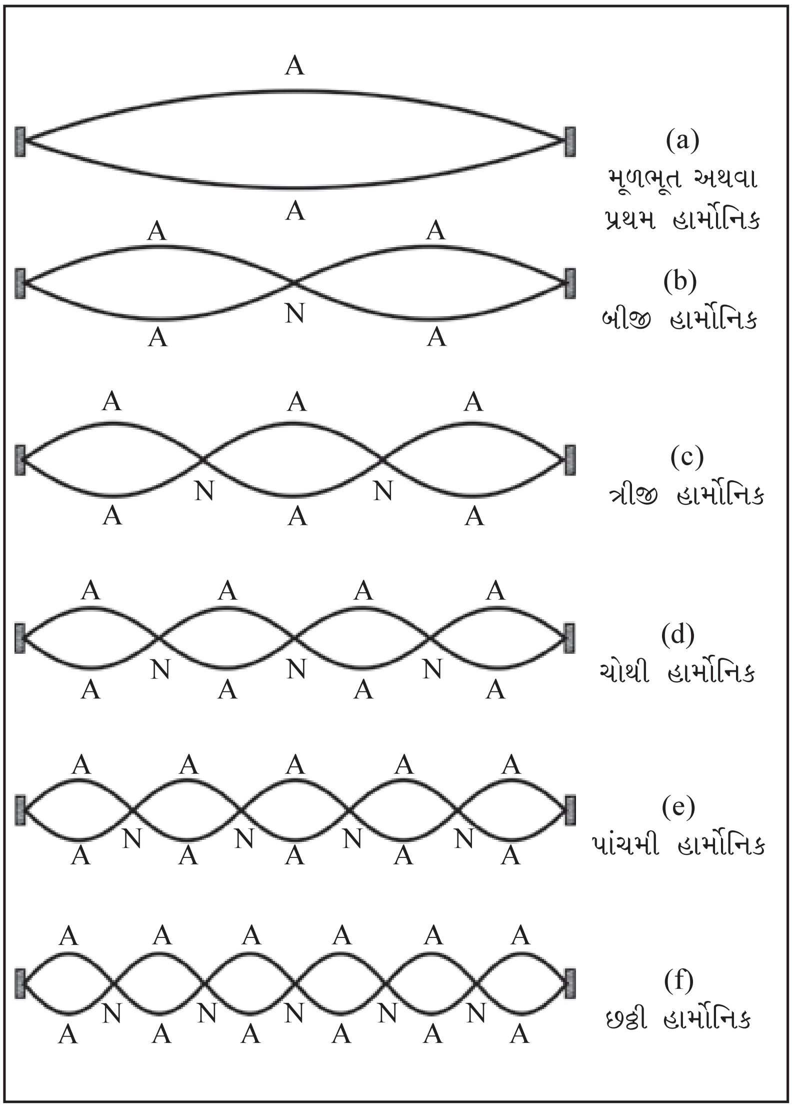
છે. આ રીતે આપણે તંત્રની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ મેળવી છે. આ આવૃત્તિ સાથે થતાં દોલનોને તંત્રના દોલનના નૉર્મલ મોડ્સ કહે છે. તંત્રની શક્ય એવી સૌથી નીચી પ્રાકૃતિક આવૃત્તિને **મૂળભૂત મોડ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે. બંને છેડે જડિત કરેલી તણાવવાળી દોરી માટે સમીકરણ (15.42)માં $n = 1$ને અનુરૂપ તે $\nu = \frac{\upsilon}{2L}$ પરથી મળે છે. અહીં υ એ તરંગની ઝડપ છે, જે માધ્યમના ગુણધર્મો દ્વારા નક્કી થાય છે. $n = 2$થી મળતી આવૃત્તિને દ્વિતીય હાર્મોનિક $n = 3$થી

મળતી આવૃત્તિને તૃતીય હાર્મોનિક વગેરે કહે છે. આપણે વિવિધ હાર્મોનિક્સને $\nu_n(n = 1, 2, 3...)$ સંજ્ઞા દ્વારા દર્શાવી શકીએ.

બંને છેડે જડિત કરેલી તણાવવાળી દોરીના પ્રથમ છ હાર્મોનિક્સ આકૃતિ 15.13માં દર્શાવ્યા છે. દોરી માત્ર આમાંની કોઈ એક આવૃત્તિથી દોલનો કરે તે જરૂરી નથી. સામાન્ય રીતે દોરીનું દોલન જુદા જુદા મોડ્સ સંપાત થયા હોય તેવું હોય છે, જેમાંના કેટલાક મોડ્સ વધુ પ્રબળતાથી અને કેટલાક ઓછી પ્રબળતાથી ઉત્તેજિત થયેલા હોય છે. સિતાર કે વાયોલિન જેવા સંગીતનાં વાજિંત્રો આ સિદ્ધાંત પર રચાયેલ છે. તારને કયા સ્થાનેથી ખેંચવામાં (Plucked) આવે છે અથવા કયા સ્થાને ઘસવામાં આવે છે તે પરથી કયા મોડ્સ બીજાઓ કરતાં વધારે પ્રબળ છે તે નક્કી થાય છે.

હવે આપણે એક છેડો ખુલ્લો અને બીજો બંધ હોય તેવી નળી (Pipe)માં હવાના સ્તંભનાં દોલનોનો વિચાર કરીએ.

અંશતઃ પાણીથી ભરેલી કાચની એક નળી આનું ઉદાહરણ છે. પાણીના સંપર્કમાંનો છેડો નિષ્પંદ બિંદુ છે જ્યારે ખુલ્લો છેડો પ્રસ્પંદ બિંદુ છે. નિષ્પંદ બિંદુ આગળ દબાણના ફેરફારો મહત્તમ હોય છે, પણ સ્થાનાંતર લઘુતમ (શૂન્ય) હોય છે. ખુલ્લા છેડે એટલે કે પ્રસ્પંદ બિંદુ આગળ તેથી ઊલટું દબાણના ફેરફારો લઘુતમ અને સ્થાનાંતર મહત્તમ હોય છે. પાણીના સંપર્કમાંના છેડાને $x = 0$ લેતાં, નિષ્પંદ બિંદુની શરત (સમીકરણ 15.38)નું પાલન થઈ જ જાય છે. જો બીજો છેડો $x = L$ એ પ્રસ્પંદ બિંદુ હોય, તો સમીકરણ (15.39) પરથી,



આકૃતિ 15.13 બંને છેડે જડિત કરેલી તણાવવાળી દોરીના પ્રથમ છ હાર્મોનિક્સ

$$L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ માટે.}$$

આથી શક્ય તરંગલંબાઈઓ,

$$\lambda = \frac{2L}{\left(n+\frac{1}{2}\right)},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (15.43)$$

સૂત્ર દ્વારા નિયંત્રિત થાય છે.

તંત્રનાં નૉર્મલ મોડ્સ-પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\upsilon}{2L};\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (15.44)$$

પરથી મળે છે. મૂળભૂત આવૃત્તિ માટે $n = 0$ છે અને તેનું મૂલ્ય $\frac{\upsilon}{4L}$ છે. ઉચ્ચ આવૃત્તિઓ માત્ર **એકી સંખ્યાની હાર્મોનિક્સ** છે, એટલે કે મૂળભૂત આવૃત્તિના એકી ગુણાંકો : $3\frac{\upsilon}{4L}, 5\frac{\upsilon}{4L}$, ... વગેરે છે. આકૃતિ 15.14 એક છેડે બંધ અને બીજે છેડે ખુલ્લા હવાના સ્તંભની પ્રથમ છ એકી હાર્મોનિક્સ દર્શાવે છે. બંને છેડે ખુલ્લી હોય તેવી નળી માટે દરેક છેડો પ્રસ્પંદ બિંદુ છે. એ સહેલાઈથી જોઈ શકાય છે કે બંને છેડે ખુલ્લો હવાનો સ્તંભ બધી હાર્મોનિક ઉત્પન્ન કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 15.15.)

ઉપર ઉલ્લેખ કર્યો તેવાં તંત્રો, દોરી, હવાનો સ્તંભ-પ્રણોદિત દોલનો પણ અનુભવે છે. (પ્રકરણ 14). જો બાહ્ય આવૃત્તિ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓમાંથી કોઈ એકની નજીક હોય, તો તંત્ર **અનુનાદ (Resonance)** દર્શાવે છે.

તબલાના કિસ્સાની જેમ વર્તુળાકાર પડદા (Membrane)ને તેના પરિઘ આગળથી જકડી દેતાં તેના નૉર્મલ મોડ્ઝ, પડદાના પરિઘ પરનું કોઈ બિંદુ કંપન કરતું નથી એવી સીમા શરત પરથી નક્કી થાય છે. આવા તંત્રના નૉર્મલ મોડ્ઝનો અંદાજ મેળવવો વધારે જટિલ છે. આ પ્રશ્નમાં દ્વિ-પરિમાણમાં થતું તરંગ-પ્રસરણ વિચારવાનું હોય છે. આમ છતાં, તેની પાછળનું ભૌતિકવિજ્ઞાન તો સમાન જ છે.

▶ ***ઉદાહરણ 15.5*** 30.0 cm લંબાઈની એક નળી બંને છેડે ખુલ્લી છે. 1.1 kHzના ઉદ્ગમ સાથે નળીની કઈ હાર્મોનિક મોડ અનુનાદ ઉત્પન્ન કરશે ? જો નળીનો એક છેડો બંધ કરવામાં આવે, તો તે જ ઉદ્ગમ સાથે અનુનાદ થતો જણાશે ? હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 330 m s^{-1} લો.

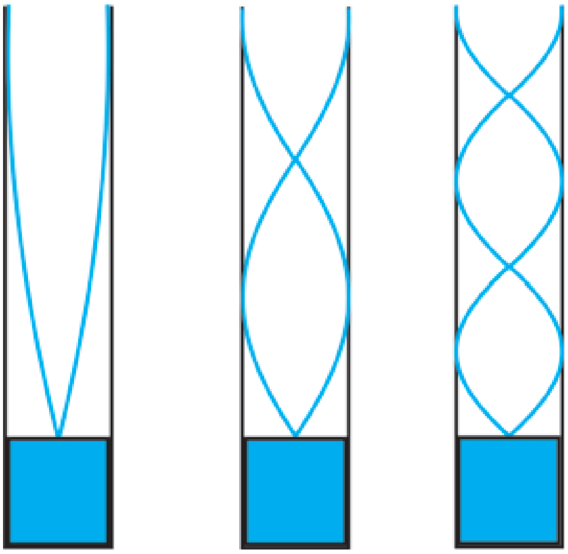
ઉકેલ પ્રથમ હાર્મોનિક આવૃત્તિ

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} \quad \text{(ખુલ્લી નળી)}$$

પરથી મળે છે, જ્યાં L નળીની લંબાઈ છે. તેની n-મી આવૃત્તિ

$$\nu_n = \frac{nv}{2L}; \; n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(ખુલ્લી નળી)}$$

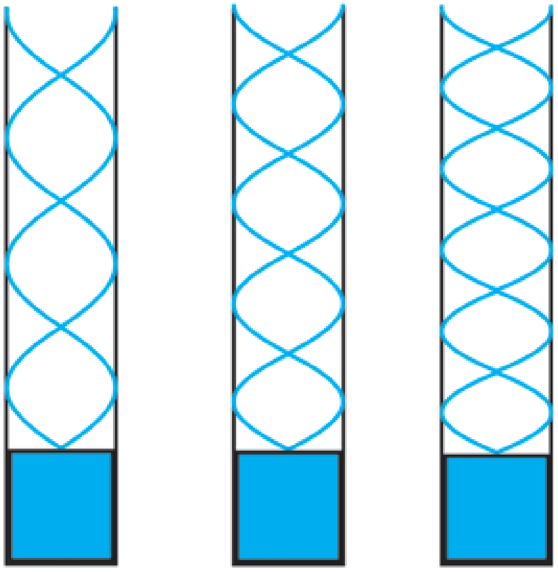
ખુલ્લી નળીના કેટલાક પ્રારંભિક મોડ્ઝ આકૃતિ 15.15માં દર્શાવ્યા છે.



(a) મૂળભૂત અથવા પ્રથમ હાર્મોમિક

(b) ત્રીજી હાર્મોનિક

(c) પાંચમી હાર્મોનિક



(d) સાતમી હાર્મોનિક

(e) નવમી હાર્મોનિક

(f) અગિયારમી હાર્મોનિક

***આકૃતિ* 15.14** *એક છેડે ખુલ્લી અને બીજે છેડે બંધ હવાના સ્તંભનાં નૉર્મલ મોડ્સ. ફક્ત એકી હાર્મોનિક શક્ય હોવાનું દેખાય છે.*

L = 30.0 cm, v = 330 m s^{-1} માટે

$$\nu_n = \frac{n \times 330 \text{ (m s}^{-1})}{0.6 \text{(m)}} = 550n \text{ s}^{-1}$$

હવે એ સ્પષ્ટ છે કે 1.1 kHzનું ઉદ્ગમ ν_2 આવૃત્તિ એટલે કે **બીજા હાર્મોનિક** સાથે અનુનાદ કરશે.

હવે જો નળીનો એક છેડો બંધ કરવામાં આવે (આકૃતિ 15.14), તો સમીકરણ (15.44) પરથી, મૂળભૂત આવૃત્તિ

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{nv}{4L} \quad \text{(એક છેડે બંધ નળી)}$$

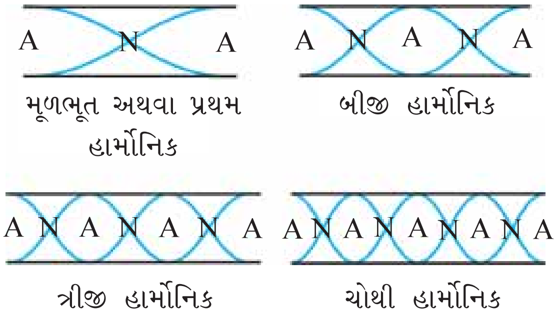
મળે છે અને ફક્ત એકી સંખ્યાના હાર્મોનિક્સ હાજર હોય છે :

$$\nu_3 = \frac{3v}{4L}, \; \nu_5 = \frac{5v}{4L} \quad \text{વગેરે.}$$

L = 30 cm અને v = 330 m s^{-1} માટે, એક છેડે બંધ નળી માટે મૂળભૂત આવૃત્તિ 275 Hz મળે છે અને ઉદ્ગમની આવૃત્તિ તેની ચતુર્થ હાર્મોનિક જેટલી છે. આ હાર્મોનિક એ દોલનનો શક્ય મોડ નથી તેથી એક છેડો બંધ કરાય કે તરત કોઈ અનુનાદ જણાતો નથી. ◀

15.7 સ્પંદ (BEATS)

'સ્પંદ' એ તરંગોના વ્યતીકરણથી ઉદ્ભવતી એક રસપ્રદ ઘટના છે. જ્યારે લગભગ નજીકની હોય (પણ સમાન ન હોય) તેવી



આકૃતિ 15.15 *ખુલ્લી નળીમાં સ્થિત તરંગો. પ્રથમ ચાર હાર્મોનિક્સ દર્શાવેલ છે.*

આવૃત્તિના બે હાર્મોનિક ધ્વનિતરંગોને એક જ સમયે સાંભળવામાં આવે છે ત્યારે આપણે તેના જેવી (બે નજીકની આવૃત્તિની સરેરાશ) આવૃત્તિનો ધ્વનિ સાંભળીએ છીએ, પણ આ ઉપરાંત આપણને કંઈક બીજું પણ સંભળાય છે. આપણને ધ્વનિની તીવ્રતામાં ધીમે ધીમે વધારો અને ઘટાડો (મહત્તમ અને લઘુતમ) સ્પષ્ટ સંભળાય છે. આ ઘટના (સ્પંદ)ની આવૃત્તિ બે નજીકની આવૃત્તિઓના તફાવત જેટલી હોય છે. કલાકારો આ ઘટનાનો ઉપયોગ ઘણી વાર તેમનાં વાજિંત્રો એકબીજાં સાથે ટ્યૂન (સુમેળ) કરવા માટે કરે છે. તેઓ ત્યાં સુધી ટ્યૂન કરતાં જાય છે કે જ્યાં સુધી તેમના સંવેદી કાનમાં કોઈ સ્પંદ ન સંભળાય.

આ બાબતને ગણિતીય રીતે દૃશ્યમાન કરવા માટે લગભગ સરખી એવી કોણીય આવૃત્તિઓ ω_1 અને ω_2 ધરાવતા બે હાર્મોનિક ધ્વનિતરંગોનો વિચાર કરીએ અને સગવડતા ખાતર $x = 0$ને નિશ્ચિત સ્થાન તરીકે લઈએ. કળાની અનુકૂળ પસંદગી ($\phi = \pi/2$) કરીને અને કંપવિસ્તાર સમાન લઈને સમીકરણ (15.2) પરથી,

$s_1 = a \cos \omega_1 t$ અને $s_2 = a \cos \omega_2 t$ (15.45)

આપણે લંબગતને બદલે સંગત સ્થાનાંતરની વાત કરતા હોવાથી સંજ્ઞા yને સ્થાને s લીધેલ છે. ધારો કે આ બંનેમાં ω_1 એ થોડીક મોટી આવૃત્તિ છે. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ પરિણામી સ્થાનાંતર,

$s = s_1 + s_2 = a(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$ છે.

cosA + cosB માટેના જાણીતા ત્રિકોણમિતીય સંબંધનો ઉપયોગ કરતાં,

$$s = 2\,a \cos\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \qquad (15.46)$$

મળે છે, જેને $s = [2\,a \cos \omega_b t] \cos \omega_a t$ (15.47)

તરીકે લખી શકાય. જો $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$ હોય, તો $\omega_a >> \omega_b$,

જ્યાં, $\omega_b = \dfrac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}$ અને $\omega_a = \dfrac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$

જો આપણે $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1$ ધારી લઈએ તો $\omega_a >> \omega_b$

સંગીત-સ્તંભો

ઘણાં મંદિરોમાં સંગીતનાં વાજિંત્રો વગાડતાં માનવોને દર્શાવતાં સ્તંભો (Pillars) હોય છે, પરંતુ આ સ્તંભો ભાગ્યે જ પોતે સંગીત ઉત્પન્ન કરે છે. તમિલનાડુમાં નેલીઅપ્પાર મંદિરમાં ખડકના એક જ ટુકડામાંથી કોતરીને (Carved Out) બનાવેલા સ્તંભોના સમૂહ પર હળવા ટકોરા, ભારતીય શાસ્ત્રીય સંગીતના મૂળ સ્વરો – સા, રે, ગ, મ, પ, ધ, નિ, સા–ઉત્પન્ન કરે છે. આ સ્તંભોનાં દોલનો વપરાયેલ ખડકની સ્થિતિસ્થાપકતા, તેની ઘનતા અને આકાર પર આધાર રાખે છે.

સંગીત-સ્તંભો ત્રણ પ્રકારમાં વર્ગીકૃત કરાય છે : પ્રથમ પ્રકારને **શ્રુતિસ્તંભ** કહે છે. કારણ કે તે મૂળ **'સ્વરો'** ઉત્પન્ન કરી શકે છે. બીજા પ્રકારને **ગણ થુંગલ** કહે છે તે મૂળ સ્વરસમૂહો ઉત્પન્ન કરે છે, જેનાથી **'રાગ'** રચાય છે. ત્રીજો પ્રકાર એ **'લય થુંગલ'** સ્તંભો, જે ટકોરા મારતાં **'તાલ'** (સ્પંદ) ઉત્પન્ન કરે છે. નેલીઅપ્પાર મંદિરમાંના સ્તંભો શ્રુતિ અને લય પ્રકારનાં સંયોજન છે.

પુરાતત્ત્વવિદો નેલીઅય્યાર મંદિર 7મી સદીનું હોવાનું અને પાંડિયન વંશના વારસદાર રાજવીઓએ બનાવ્યું હોવાનું જણાવે છે.

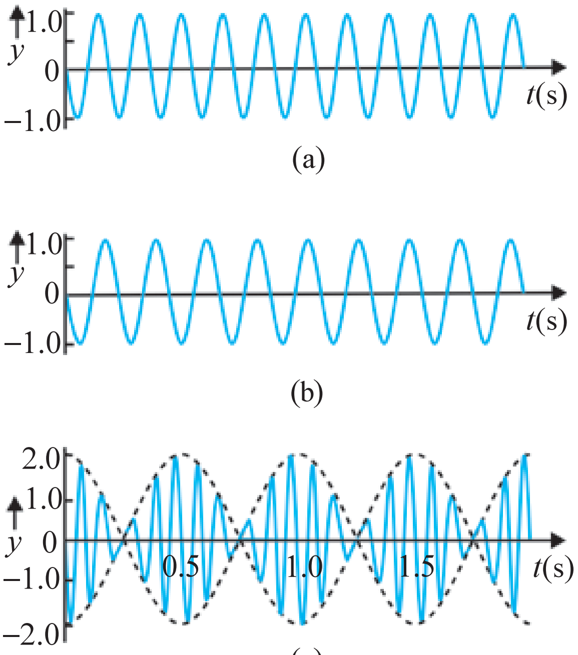
નેલીઅપ્પાર અને કન્યાકુમારીના હમ્પી (ચિત્ર) અને તિરુવનંતપુરમ્ જેવા દક્ષિણ ભારતનાં કેટલાંક મંદિરો આપણા દેશની વિશિષ્ટતા છે અને વિશ્વના કોઈ ભાગમાં આવું જણાતું નથી.

અને આપણે સમીકરણ (15.47)ને આ રીતે સમજી શકીએ : પરિણામી તરંગ સરેરાશ કોણીય આવૃત્તિ ω_aથી દોલનો કરે છે, પરંતુ તેનો કંપવિસ્તાર સમય સાથે અચળ **નથી**, જે શુદ્ધ હાર્મોનિક તરંગમાં તો અચળ હોય છે. જ્યારે $\cos \omega_b t$ પદ તેની સીમાનાં મૂલ્ય +1 કે –1 પ્રાપ્ત કરે છે ત્યારે કંપવિસ્તાર મહત્તમ હોય છે. બીજા શબ્દોમાં પરિણામી તરંગની તીવ્રતા

$2\omega_b = \omega_1 - \omega_2$ થી વધે-ઘટે છે. જો કે $\omega = 2\pi\nu$ હોવાથી, સ્પંદની આવૃત્તિ

$\nu_{beat} = \nu_1 - \nu_2$ પરથી મળે છે. (15.48)

આકૃતિ 15.16, 11 Hz અને 9 Hz આવૃત્તિવાળા બે હાર્મોનિક તરંગો માટે સ્પંદની ઘટના દર્શાવે છે. પરિણામી તરંગનો કંપવિસ્તાર 2 Hzની આવૃત્તિથી સ્પંદ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 15.16 *11 Hz આવૃત્તિના (a) અને 9 Hz આવૃત્તિના (b) બે હાર્મોનિક તરંગોનું સંપાતીકરણ (c)માં દર્શાવ્યા મુજબ 2 Hzની આવૃત્તિનાં સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે.*

> **ઉદાહરણ 15.6** બે સિતારના તાર A અને B સ્વર 'ધ' ઉત્પન્ન કરવા દરમિયાન સહેજ જુદા પડીને 5 Hzની આવૃત્તિના સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. B તારમાં તણાવ સહેજ વધારતાં સ્પંદની આવૃત્તિ ઘટીને 3 Hz થાય છે. જો Aની આવૃત્તિ 427 Hz હોય, તો Bની મૂળ આવૃત્તિ કેટલી હશે ?

ઉકેલ તારમાં તણાવ વધારતાં તેની આવૃત્તિ વધે છે. જો B તારની મૂળ આવૃત્તિ (ν_B), A તારની આવૃત્તિ (ν_A) કરતાં મોટી હોય, તો ν_Bમાં હજી વધારો થતાં સ્પંદની આવૃત્તિમાં વધારો થાત. પરંતુ સ્પંદની આવૃત્તિ ઘટેલી જણાય છે. આ દર્શાવે છે કે $\nu_B < \nu_A$, $\nu_A - \nu_B = 5$ Hz અને $\nu_A = 427$ Hz હોવાથી $\nu_B = 422$ Hz મળે. ◀

15.8 ડૉપ્લર અસર (DOPPLER EFFECT)

આપણો એ રોજિંદો અનુભવ છે કે ઝડપથી ગતિ કરતી ટ્રેન જ્યારે આપણાથી દૂર જતી હોય ત્યારે તેની સિસોટી (Whistle)નો

ખુલ્લી નળીમાં ધ્વનિનું પરાવર્તન

ખુલ્લી નળીમાં જ્યારે કોઈ ઉચ્ચ દબાણનું સ્પંદન ગતિ કરીને બીજા છેડે પહોંચે ત્યારે તેનું વેગમાન હવાને બહાર ખુલ્લામાં ઘસડી જાય છે, જ્યાં દબાણ ઝડપથી ઘટીને વાતાવરણના દબાણ જેટલું બની જાય છે. પરિણામે તેની પાછળ આવતી હવા બહાર ધકેલાઈ જાય છે. નળીના છેડેનું ઓછું દબાણ નળીના હજી ઉપરના ભાગમાંની હવાને ખેંચે છે. હવા ખુલ્લા છેડા તરફ ખેંચાય છે તેથી લઘુ-દબાણનો વિસ્તાર ઉપર તરફ જાય છે. પરિણામે નળીમાં નીચે તરફ ગતિ કરતું ઉચ્ચ-દબાણની હવાનું સ્પંદન, ઉપર તરફ ગતિ કરતા લઘુ-દબાણની હવાના સ્પંદનમાં રૂપાંતર પામે છે. આને આપણે એમ કહીએ કે, દબાણ તરંગ ખુલ્લા છેડા પાસેથી 180°ની કળાના ફેરફાર સાથે પરાવર્તન થયું છે. વાંસળી જેવા ખુલ્લી નળીનાં વાજિંત્રોમાં સ્થિત તરંગ આ ઘટનાનું પરિણામ છે.

ઉચ્ચ-દબાણની હવાનું સ્પંદન જ્યારે બંધ છેડે આવે ત્યારે શું થાય છે તેની સાથે આ બાબતની સરખામણી કરો : તે અથડાય છે અને પરિણામે હવાને પાછી વિરુદ્ધ દિશામાં ધકેલે છે. બીજા શબ્દોમાં આને આપણે એમ કહીએ કે દબાણ તરંગકળાના કોઈ ફેરફાર વિના પરાવર્તન થયું છે.

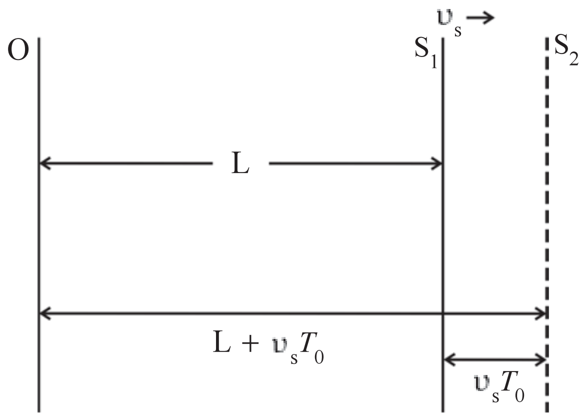
સ્વર (કે આવૃત્તિ) ઘટતો જણાય છે. જ્યારે આપણે કોઈ સ્થિર એવા ધ્વનિઉદ્ગમની તરફ બહુ ઝડપથી જઈએ તો સંભળાતા ધ્વનિનો સ્વર (કે આવૃત્તિ) ઉદ્ગમના ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં વધુ જણાય છે. જ્યારે સાંભળનાર ઉદ્ગમથી દૂર તરફ જાય છે ત્યારે સંભળાતા ધ્વનિનો સ્વર ઉદ્ગમના ધ્વનિના સ્વર કરતાં નીચો એટલે કે સંભળાતા ધ્વનિની આવૃત્તિ ઉદ્ગમના ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં ઓછી જણાય છે. ગતિ સાથે સંબંધિત આવૃત્તિનો ફેરફાર થવાની ઘટનાને **ડૉપ્લર અસર** કહે છે. ઑસ્ટ્રિયન ભૌતિકવિજ્ઞાની જૉહ્ન ક્રિશ્ચિયન ડૉપ્લર દ્વારા સૌપ્રથમ આ ઘટનાની 1842માં રજૂઆત કરવામાં આવી. 1845માં હૉલેન્ડમાં બાયસ બેલટ (Buys Ballot) દ્વારા તેની પ્રાયોગિક ચકાસણી થઈ હતી. ડૉપ્લર અસર એ તરંગ ઘટના છે, તે માત્ર ધ્વનિતરંગો જ નહિ પણ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો માટે પણ સત્ય છે. જોકે આપણે અહીં માત્ર ધ્વનિતરંગોનો વિચાર કરીશું.

આપણે આવૃત્તિના ફેરફારનું વિશ્લેષણ ત્રણ પરિસ્થિતિમાં કરીશું : (1) નિરીક્ષક સ્થિર અને ઉદ્ગમ ગતિમાં હોય

(2) નિરીક્ષક ગતિમાં હોય અને ઉદ્‌ગમ સ્થિર હોય અને (3) નિરીક્ષક અને ઉદ્‌ગમ બંને ગતિમાં હોય. (1) અને (2)માંની પરિસ્થિતિ એકબીજાથી જુદી પડવાનું કારણ નિરીક્ષક અને માધ્યમની વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ હોવી કે ન હોવી તે છે. મોટા ભાગનાં તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર હોય છે પરંતુ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર નથી. જો કોઈ માધ્યમ હાજર ન હોય તો, ઉદ્‌ગમ ગતિ કરતું હોય કે નિરીક્ષક ગતિ કરતો હોય તે બંનેમાં ડૉપ્લર શિફ્ટ (સ્થાનાંતર, ફેરફાર) એક સમાન હોય છે કારણ કે આ બે પરિસ્થિતિઓ વચ્ચે કોઈ ભેદ નથી.

15.8.1 ગતિમાન ઉદ્‌ગમ, સ્થિર નિરીક્ષક (Source moving; Observer Stationary)

આપણે એક રૂઢિ તરીકે નિરીક્ષકથી ઉદ્‌ગમ તરફની દિશાને ધન દિશા તરીકે લઈશું. એક ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ v_s જેટલા વેગથી ગતિ કરતું હોય અને જે નિર્દેશ ફ્રેમમાં માધ્યમ સ્થિર હોય તે જ નિર્દેશ ફ્રેમમાં નિરીક્ષક પણ સ્થિર હોય તેનો વિચાર કરો. ધારો કે માધ્યમની સાપેક્ષે સ્થિર એવા નિરીક્ષકે માપેલી કોણીય આવૃત્તિ ω અને આવર્તકાળ T_0 ધરાવતા તરંગની ઝડપ υ છે. આપણે એવું ધારી લઈએ કે, નિરીક્ષક પાસે એવું પરખયંત્ર (Detector) છે જે તરંગનું શૃંગ તેની પાસે પહોંચે ત્યારે તેને નોંધે છે. આકૃતિ 15.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, $t = 0$ સમયે ઉદ્‌ગમ, નિરીક્ષકથી L અંતરે આવેલા બિંદુ S_1 પર છે અને એક શૃંગને ઉત્પન્ન કરે છે. આ શૃંગ નિરીક્ષક પાસે $t_1 = L/\upsilon$ સમયે પહોંચે છે. $t = T_0$ સમયે ઉદ્‌ગમ $\upsilon_s T_0$ અંતર કાપીને નિરીક્ષકથી $L + \upsilon_s T_0$ અંતરે આવેલા S_2 બિંદુ પર પહોંચે છે. S_2 બિંદુએ ઉદ્‌ગમ બીજું શૃંગ ઉત્પન્ન કરે છે.



આકૃતિ 15.17 *જ્યારે માધ્યમમાં ઉદ્‌ગમ ગતિ કરતું હોય અને નિરીક્ષક સ્થિર હોય ત્યારે અનુભવાતી ડૉપ્લર અસર (તરંગની આવૃત્તિમાં થતો ફેરફાર)*

આ શૃંગ, નિરીક્ષકને $t_2 = T_0 + \dfrac{(L + \upsilon_s T_0)}{\upsilon}$ સમયે પહોંચે છે.

આ પ્રમાણે nT_0 સમયે, ઉદ્‌ગમ $(n + 1)$મું શૃંગ ઉત્પન્ન કરે છે અને તે શૃંગ નિરીક્ષકને

$t_{n+1} = nT_0 + \dfrac{(L + n\,\upsilon_s T_0)}{\upsilon}$ સમયે પહોંચે છે. આથી,

$$\left[nT_0 + \frac{(L + n\,\upsilon_s T_0)}{\upsilon} - \frac{L}{\upsilon}\right]$$

જેટલા સમયગાળામાં નિરીક્ષકના ડિટેક્ટરે n શૃંગ ગણેલા છે અને નિરીક્ષક તરંગનો આવર્તકાળ T

$$T = \left[nT_0 + \frac{(L + n\,\upsilon_s T_0)}{\upsilon} - \frac{L}{\upsilon}\right] / n \text{ નોંધે છે.}$$

$$T = T_0 + \frac{\upsilon_s T_0}{\upsilon}$$

$$= T_0\left(1 + \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right) \tag{15.49}$$

જ્યારે ઉદ્‌ગમ અને નિરીક્ષક બંને સ્થિર હોય ત્યારે મપાયેલ આવૃત્તિ ν_0 અને જ્યારે ઉદ્‌ગમ ગતિ કરતું હોય ત્યારે મપાયેલ આવૃત્તિ νના પદમાં સમીકરણ (15.49)ને ફરીથી નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right)^{-1} \tag{15.50}$$

તરંગની ઝડપ υની સરખામણીએ જો υ_sનું મૂલ્ય નાનું હોય, તો υ_s/υના પ્રથમ ક્રમના પદમાં દ્વિપદી વિસ્તરણ લેતાં અને ઊંચી ઘાતનાં પદોને અવગણતાં સમીકરણ (15.50)ને સંનિકટ રીતે આમ લખી શકાય :

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right) \tag{15.51}$$

જો ઉદ્‌ગમ નિરીક્ષક તરફ જઈ રહ્યું હોય, તો υ_sને સ્થાને $-\upsilon_s$ મૂકતાં,

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right) \tag{15.52}$$

આમ, જ્યારે ઉદ્‌ગમ નિરીક્ષકથી દૂર જાય છે ત્યારે તે સ્થિર હોય ત્યારે માપેલ આવૃત્તિ કરતાં ઓછી આવૃત્તિ માપે છે. જ્યારે ઉદ્‌ગમ તેની તરફ આવી રહ્યું હોય ત્યારે વધુ આવૃત્તિ માપે છે.

15.8.2 ગતિમાન નિરીક્ષક, સ્થિર ઉદ્‌ગમ (Observer Moving; Source Stationary)

હવે, જ્યારે નિરીક્ષક υ_0 જેટલા વેગથી ઉદ્‌ગમ તરફ ગતિ કરતો હોય અને ઉદ્‌ગમ સ્થિર હોય ત્યારે ડૉપ્લર શિફ્ટ

મેળવવા માટે આપણે જુદી રીતે આગળ વધીશું. આપણે ગતિમાન નિરીક્ષકની નિર્દેશ ફ્રેમમાં કાર્ય કરીશું. આ નિર્દેશ ફ્રેમમાં ઉદ્ગમ અને માધ્યમ υ_0 વેગથી તેની નજીક આવી રહ્યાં છે અને તરંગો તો $\upsilon_0 + \upsilon$ વેગથી નજીક આવી રહ્યાં છે. અગાઉના કિસ્સા જેવી પદ્ધતિ અપનાવતાં પ્રથમ અને $(n + 1)$મા શૃંગના આગમન વચ્ચેનો સમયગાળો

$$t_{n+1} - t_1 = nT_0 - \frac{n\upsilon_0 T_0}{\upsilon_0 + \upsilon} \text{ છે.}$$

આમ, નિરીક્ષક દ્વારા મપાયેલ તરંગનો આવર્તકાળ

$$= T_0\left(1 - \frac{\upsilon_0}{\upsilon_0 + \upsilon}\right)$$

$$= T_0\left(1 + \frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right)^{-1} \text{ મપાય છે.}$$

$$\text{આ પરથી, } \nu = \nu_0\left(1 + \frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right) \qquad (15.53)$$

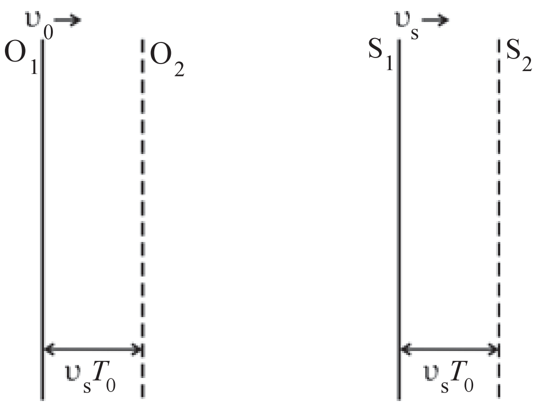
જો $\frac{\upsilon_0}{\upsilon}$ નાનું હોય તો સમાન વેગથી નિરીક્ષક ગતિ કરે કે ઉદ્ગમ ગતિ કરે તે બંને કિસ્સામાં ડૉપ્લર શિફ્ટ $(\nu - \nu_0)$નું મૂલ્ય સમાન જ મળશે, કેમ કે સમીકરણ (15.53) અને સંનિકટ સંબંધ દર્શાવતા સમીકરણ (15.52)માં $(\nu - \nu_0)$ સમાન થશે.

જો નિરીક્ષક υ_0 વેગથી ઉદ્ગમથી દૂર જતો હોય, તો સમીકરણ (15.53)માં υ_0ને સ્થાને $-\upsilon_0$ મૂકતાં,

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right) \text{ મળે છે.}$$

15.8.3 ઉદ્ગમ અને નિરીક્ષક બંને ગતિમાં (Both Source and Observer Moving)

હવે આપણે ઉદ્ગમ અને નિરીક્ષક બંને ગતિમાં હોય તેવા કિસ્સા માટે વ્યાપક સમીકરણ મેળવીશું. અગાઉની જેમ નિરીક્ષકથી ઉદ્ગમ તરફની દિશાને ધન દિશા ગણીશું. આકૃતિ 15.18માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે ઉદ્ગમ અને નિરીક્ષક અનુક્રમે υ_s અને υ_0 વેગથી ગતિ કરે છે. ધારો કે $t = 0$ માટે નિરીક્ષક O_1 અને ઉદ્ગમ S_1 આગળ છે. ઉદ્ગમ તરંગવેગ υ, આવૃત્તિ ν અને આવર્તકાળ T_0 ધરાવતું એક તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે. આ બધાં મૂલ્યો નિરીક્ષક માધ્યમની સાપેક્ષે સ્થિર હોય ત્યારે તેણે માપેલાં મૂલ્યો છે. $t = 0$ સમયે O_1 અને S_1 વચ્ચેનું અંતર L છે અને ત્યારે ઉદ્ગમ પ્રથમ શૃંગ ઉત્પન્ન કરે છે. અહીં નિરીક્ષક ગતિમાં હોવાથી; અહીં નિરીક્ષકની સાપેક્ષે તરંગનો વેગ $\upsilon + \upsilon_0$ છે. આથી, પ્રથમ શૃંગ, નિરીક્ષક પાસે $t_1 = L/(\upsilon + \upsilon_0)$ સમયે પહોંચે છે. $t = T_0$ સમયે નિરીક્ષક અને ઉદ્ગમ તેમનાં નવાં સ્થાનો અનુક્રમે O_2 અને S_2 આગળ પહોંચે છે. નિરીક્ષક અને ઉદ્ગમ વચ્ચેનું નવું અંતર O_2S_2, $L + (\upsilon_s - \upsilon_0)T_0$ જેટલું છે. S_2 આગળ ઉદ્ગમ બીજા શૃંગનું ઉત્સર્જન કરે છે.



આકૃતિ **15.18** *ઉદ્ગમ અને નિરીક્ષક બંને જુદા વેગથી ગતિ કરતા હોય ત્યારે ડૉપ્લર અસર*

ડૉપ્લર અસરના ઉપયોગ

ગતિમાન પદાર્થ દ્વારા ડૉપ્લર અસરને લીધે આવૃત્તિમાં થતા ફેરફાર વડે તેનો (પદાર્થનો) વેગ માપવા માટે વિવિધ ક્ષેત્રોમાં ઉપયોગ થાય છે. જેવા કે લશ્કરી, તબીબી વિજ્ઞાન, ખગોળીય-ભૌતિકવિજ્ઞાન વગેરે. તે વાહનોની Over-Speed ચકાસવા માટે પણ થાય છે.

જ્ઞાત આવૃત્તિનું એક ધ્વનિતરંગ કે વિદ્યુતચુંબકીય તરંગ ગતિમાન પદાર્થ તરફ મોકલવામાં આવે છે. તરંગનો કેટલોક ભાગ પદાર્થ દ્વારા પરાવર્તિત થાય છે અને તેની આવૃત્તિ મોનિટરિંગ સ્ટેશન દ્વારા મપાય છે. આવૃત્તિમાં જણાતા ફેરફારને **ડૉપ્લર શિફ્ટ** કહે છે.

વિમાનીમથક પર વિમાનને માર્ગદર્શન (સૂચના) આપવા માટે અને લશ્કરમાં દુશ્મનના વિમાનની પરખ કરવા માટે તેનો ઉપયોગ થાય છે. ખગોળ-ભૌતિક વેત્તાઓ તેનો ઉપયોગ તારાઓના વેગ માપવા માટે કરે છે.

તબીબો તેનો ઉપયોગ હૃદયના ધબકાર અને શરીરના વિવિધ ભાગોમાં રક્તવહનના અભ્યાસ માટે કરે છે. અહીં તેઓ અલ્ટ્રાસોનિક (પરા શ્રાવ્ય) તરંગો વાપરે છે અને તેને સામાન્ય વ્યવહારમાં **સોનોગ્રાફી** કહે છે. અલ્ટ્રાસોનિક તરંગો વ્યક્તિના શરીરમાં દાખલ થાય છે તેમાંથી કેટલાક પાછા પરાવર્તિત થાય છે અને રક્તની ગતિ અને હૃદયના વાલ્વના ધબકાર તેમજ ગર્ભમાંના બાળકના હૃદયના ધબકાર વગેરેની માહિતી આપે છે. હૃદયના કિસ્સામાં જે ચિત્ર ઉપજાવવામાં આવે છે તેને **ઈકોકાર્ડિયોગ્રામ** કહે છે.

આ બીજું શૃંગ નિરીક્ષકને $t_2 = T_0 + [L + (\upsilon_s - \upsilon_0)T_0]/(\upsilon + \upsilon_0)$ સમયે પહોંચે છે. nT_0 સમયે ઉદ્‌ગમ $(n + 1)$ મું શૃંગ ઉત્પન્ન કરે છે અને તે નિરીક્ષકને

$$t_{n+1} = nT_0 + \frac{L + n(\upsilon_s - \upsilon_0)T_0}{\upsilon + \upsilon_0}$$ સમયે પહોંચે છે.

આથી નિરીક્ષક n-શૃંગની ગણતરી $t_{n+1} - t_n$ સમય અંતરાલમાં કરે છે જ્યાં

$$t_{n+1} - t_n = nT_0 + \frac{L + n(\upsilon_s - \upsilon_0)T_0}{\upsilon + \upsilon_0} - \frac{L}{\upsilon + \upsilon_0}$$ છે.

આથી નિરીક્ષક તરંગનો આવર્તકાળ T નીચે મુજબ માપે છે :

$$T = T_0\left(1 + \frac{\upsilon_s - \upsilon_0}{\upsilon + \upsilon_0}\right) = T_0\left(\frac{\upsilon + \upsilon_s}{\upsilon + \upsilon_0}\right) \qquad (15.54)$$

આથી, નિરીક્ષકને જણાતી આવૃત્તિ

$$\nu = \nu_0\left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon + \upsilon_s}\right) \qquad (15.55)$$

એક સીધા ટ્રેક પર ગતિ કરતી ટ્રેનમાં બેસેલા એક મુસાફરનો વિચાર કરો. ધારો કે તે ટ્રેનના ડ્રાયવરે વગાડેલી સીસોટી (વ્હીસલ) સાંભળે છે. તેને કેટલી આવૃત્તિનો ધ્વનિ સંભળાશે ? અત્રે ઉદ્‌ગમ અને નિરીક્ષક બંને એક જ સરખા વેગથી ગતિ કરી રહ્યા છે, આથી આવૃત્તિમાં કંઈ જ ફેરફાર (Shift) જણાશે નહિ અને મુસાફર તે મૂળ (પ્રાકૃતિક) આવૃત્તિ જ નોંધશે. પણ બહાર રહેલો નિરીક્ષક કે જે ટ્રેકની સાપેક્ષે સ્થિર છે તે, જો ટ્રેન તેની તરફ આવતી હશે તો વધારે આવૃત્તિ અને તેનાથી દૂર જતી હોય તો ઓછી આવૃત્તિ નોંધશે.

બરાબર ધ્યાન રાખો કે આપણે નિરીક્ષકથી ઉદ્‌ગમ તરફની દિશાને ધન દિશા તરીકે ગણી છે. તેથી જો નિરીક્ષક, ઉદ્‌ગમ તરફ ગતિ કરતો હોય તો υ_0નું મૂલ્ય ધન(સંખ્યાત્મક) છે, પણ જો ઉદ્‌ગમથી દૂર જતો હોય તો υ_0નું મૂલ્ય ઋણ છે. બીજી બાજુ જો S, O થી દૂર જતું હોય તો υ_s ધન છે અને જો તે O તરફ જતું હોય તો υ_s ઋણ છે. ઉદ્‌ગમથી ઉત્પન્ન થયેલો ધ્વનિ બધી દિશાઓમાં પ્રસરે છે. તેમાંનો જે ભાગ નિરીક્ષક તરફ આવે છે તે ભાગને નિરીક્ષક પ્રાપ્ત કરે છે અને પરખે (detects) છે. તેથી નિરીક્ષકની સાપેક્ષે ધ્વનિનો વેગ બધા કિસ્સામાં $\upsilon + \upsilon_0$ છે.

ઉદાહરણ 15.7 એક સ્થિર લક્ષ્ય તરફ 200 m s^{-1}ની ઝડપથી એક રૉકેટ ગતિ કરી રહ્યું છે. ગતિ દરમ્યાન તે 1000 Hz આવૃત્તિ ધ્વનિ તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે. લક્ષ્ય પર પહોંચેલા ધ્વનિમાંથી થોડો ભાગ પડઘા તરીકે પાછો રૉકેટ તરફ પરાવર્તિત થાય છે. (1) લક્ષ્ય દ્વારા પરખાયેલ (Detected) ધ્વનિની આવૃત્તિ અને (2) રૉકેટ દ્વારા પરખાયેલ પડઘાની આવૃત્તિ શોધો.

ઉકેલ (1) નિરિક્ષક સ્થિર છે અને ઉદ્‌ગમ 200 m s^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરે છે. આ ઝડપ ધ્વનિની ઝડપ સાથે સરખાવી શકાય તેવી હોવાથી આપણે સંનિક્ટ સમીકરણ (15.51) વાપરવું જોઈએ નહિ પણ સમીકરણ (15.50) વાપરવું જોઈએ. ઉદ્‌ગમ, સ્થિર લક્ષ્ય તરફ ગતિ કરતું હોવાથી $\upsilon_0 = 0$ અને υ_sને સ્થાને $-\upsilon_s$ મૂકવું જોઈએ. આથી

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right)^{-1}$$

$$\nu = 1000\ \text{Hz} \times [1 - 200\ \text{m s}^{-1} / 330\ \text{m s}^{-1}]^{-1}$$

$$\simeq 2540\ \text{Hz}$$

(2) લક્ષ્ય હવે ઉદ્‌ગમ બને છે (કારણ કે તે પડઘાનું ઉદ્‌ગમ છે) અને રૉકેટનું ડીટેક્ટર હવે નિરિક્ષક કે ડીટેક્ટર છે. આમ, $\upsilon_s = 0$ અને υ_0 ધન મૂલ્ય છે.

ઉદ્‌ગમ (લક્ષ્ય)માંથી ઉત્સર્જિત ધ્વનિની આવૃત્તિ ν_0 નથી પણ ν છે જે લક્ષ્ય દ્વારા અધવચ્ચે પ્રાપ્ત થાય છે. આથી રૉકેટ દ્વારા નોંધાતી આવૃત્તિ

$$\nu' = \nu\left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon}\right)$$

$$= 2540\ \text{Hz} \times \left(\frac{200\ \text{m s}^{-1} + 330\ \text{m s}^{-1}}{330\ \text{m s}^{-1}}\right)$$

$$\simeq 4080\ \text{Hz}$$

સારાંશ

1. યાંત્રિક તરંગો દ્રવ્ય માધ્યમમાં અસ્તિત્વ ધરાવી શકે છે અને ન્યૂટનના નિયમોથી સંચાલિત થાય છે.
2. લંબગત તરંગો એવાં તરંગો છે કે જેમાં માધ્યમના કણો તરંગની પ્રસરણ દિશાને લંબ દોલનો કરે છે.
3. સંગત તરંગો એવાં તરંગો છે કે જેમાં માધ્યમના કણો તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર દોલનો કરે છે.
4. પ્રગામી તરંગ એ એવું તરંગ છે કે, જે માધ્યમના એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી ગતિ કરે છે.
5. ધન x-દિશામાં ગતિ કરતા પ્રગામી Sinusoidal (sine આકારનું) તરંગનું સ્થાનાંતર

$$y(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi)$$

પરથી મળે છે, જ્યાં a તરંગનો કંપવિસ્તાર છે, k કોણીય તરંગસંખ્યા છે, ω કોણીય આવૃત્તિ છે, $(kx - \omega t + \phi)$ એ કળા છે અને ϕ એ કળા અચળાંક છે.

6. પ્રગામી તરંગની તરંગલંબાઈ λ એ આપેલા સમયે સમાન કળાવાળાં બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર છે. સ્થિત તરંગમાં બે ક્રમિક નિષ્પંદ બિંદુઓ કે બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેના અંતરનું બમણું (Twice) છે.
7. તરંગના દોલનોના આવર્તકાળ Tને માધ્યમના કોઈ ખંડ (Element)ને એક પૂર્ણ દોલન કરવા માટે લાગતા સમય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે. તે કોણીય આવૃત્તિ ω સાથે નીચેનાં સમીકરણ વડે સંકળાયેલ છે.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

8. તરંગની આવૃત્તિ νને $1/T$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે અને કોણીય આવૃત્તિ સાથે તેનો સંબંધ

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$ છે.

9. પ્રગામી તરંગની ઝડપ $\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$ પરથી મળે છે.
10. તણાવવાળી દોરીમાં લંબગત તરંગની ઝડપ દોરીના ગુણધર્મો વડે નક્કી થાય છે. તણાવ T અને રેખીય દળ ઘનતા μ ધરાવતી દોરીમાં તેની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$ છે.

11. ધ્વનિતરંગો એ સંગત યાંત્રિક તરંગો છે જેઓ ઘન, પ્રવાહી કે વાયુમાંથી ગતિ કરી શકે છે.

બલ્ક મોડ્યૂલસ B અને ઘનતા ρ ધરાવતાં તરલમાં ધ્વનિતરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

ધાતુની પટ્ટીમાં સંગત તરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

વાયુઓ માટે $B = \gamma P$ હોવાથી, ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

12. જ્યારે બે કે વધુ તરંગો એક જ માધ્યમમાં ગતિ કરીને સંપાત થાય ત્યારે, માધ્યમના તે ખંડનું સ્થાનાંતર દરેક તરંગથી થતા સ્થાનાંતરોના બૈજિક સરવાળા જેટલું હોય છે. આને તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત કહે છે.

$$y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x - \upsilon t)$$

13. એક જ દોરી પર બે Sinusoidal તરંગો વ્યતીકરણ દર્શાવે છે. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ તેઓ ઉમેરાય છે કે નાબૂદ થાય છે. જો તે બે તરંગોને સમાન કંપવિસ્તાર a અને આવૃત્તિ હોય અને એક જ દિશામાં ગતિ કરતા હોય, પણ કળામાં કળા-અચળાંક ϕ જેટલો તફાવત હોય, તો પરિણામ તેટલી જ આવૃત્તિ ω ધરાવતો એક જ તરંગ

$$y(x, t) = \left[2a \cos\frac{1}{2}\phi\right] \sin\left[kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right] \text{ મળે છે.}$$

જો $\phi = 0$ અથવા 2πનો પૂર્ણાંક ગુણાંક હોય તો તરંગો બરાબર કળામાં હોય છે અને વ્યતીકરણ સહાયક પ્રકારનું મળે છે; જો $\phi = \pi$ હોય, તો બરાબર વિરુદ્ધ કળામાં અને વ્યતીકરણ વિનાશક પ્રકારનું મળે છે.

14. પ્રગામી તરંગનું પરાવર્તન દૃઢ સીમા અથવા બંધ છેડેથી થાય છે ત્યારે કળા ઊલટાઈ જાય છે. પરંતુ ખુલ્લા છેડાથી પરાવર્તન થાય તો કળામાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી.

આપાત તરંગ

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \text{ માટે}$$

દૃઢ સીમા પરથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = -a \sin(kx + \omega t) \text{ અને}$$

ખુલ્લા છેડેથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t) \text{ મળે છે.}$$

15. એક સમાન હોય તેવા અને વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં બે તરંગોનું વ્યતીકરણ સ્થિત તરંગો ઊપજાવે છે. જડિત છેડાઓ ધરાવતી તણાવવાળી દોરી માટે સ્થિત તરંગ $y(x, t) = (2a \sin kx) \cos \omega t$ વડે અપાય છે.

સ્થિત તરંગોના લક્ષણ તરીકે નિષ્પંદ બિંદુઓ તરીકે ઓળખાતાં શૂન્ય સ્થાનાંતરનાં નિશ્ચિત સ્થાનો અને પ્રસ્પંદ બિંદુઓ તરીકે ઓળખાતા મહત્તમ સ્થાનાંતર ધરાવતાં નિશ્ચિત સ્થાનો છે. બે ક્રમિક નિષ્પંદ બિંદુઓ કે બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\lambda/2$ છે.

બંને છેડે જડિત, L લંબાઈની તણાવવાળી દોરી

$$\nu = \frac{1}{2}\ \frac{\upsilon}{2L},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

વડે મળતી આવૃત્તિઓથી દોલનો કરે છે. આ સંબંધ પરથી મળતી આવૃત્તિઓનો સમૂહ તંત્રના દોલનનાં નૉર્મલ મોડ્ઝ કહેવાય છે. લઘુતમ આવૃત્તિના દોલન મોડને મૂળભૂત મોડ અથવા પ્રથમ હાર્મોનિક કહે છે. બીજી હાર્મોનિક $n = 2$થી મળે છે અને એ પ્રમાણે આગળ અન્ય હાર્મોનિક મળે છે. એક છેડે ખુલ્લી અને બીજે છેડે બંધ L લંબાઈની નળીમાંનો હવાનો સ્તંભ

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\upsilon}{2L},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

વડે મળતી આવૃત્તિઓથી દોલનો કરે છે. આ સંબંધ દ્વારા મળતી આવૃત્તિઓનો સમૂહ આ તંત્રના દોલનના નૉર્મલ મોડ્ઝ છે. લઘુતમ આવૃત્તિ $\upsilon/4L$ છે અને તે મૂળભૂત મોડ અથવા પ્રથમ હાર્મોનિક છે.

16. બંને છેડે જડિત L લંબાઈની દોરી કે એક છેડે બંધ અને બીજે છેડે ખુલ્લો હવાનો સ્તંભ જે આવૃત્તિઓથી દોલનો કરે છે તેમને તેના નૉર્મલ મોડ્ઝ કહે છે. આમાંની દરેક આવૃત્તિ તંત્રની અનુનાદ આવૃત્તિ છે.

17. એકબીજાથી થોડીક જુદી આવૃત્તિઓ ν_1 અને ν_2, તેમજ સરખાવી શકાય તેવા કંપવિસ્તાર ધરાવતા બે તરંગો જ્યારે સંપાત થાય છે ત્યારે સ્પંદ ઉત્પન્ન થાય છે. સ્પંદની આવૃત્તિ

$$\nu_{beat} = \nu_1 \sim \nu_2$$

18. જ્યારે ઉદ્ગમ અને નિરીક્ષક O બંને માધ્યમની અને એકબીજાની સાપેક્ષે ગતિમાં હોય ત્યારે તરંગની આવૃત્તિમાં ફેરફાર જણાય છે એ ડૉપ્લર અસર છે. ધ્વનિ માટે ઉદ્ગમની આવૃત્તિ ν_0ના પદમાં નિરીક્ષકને જણાયેલી (માપેલી) આવૃત્તિ ν_0 નીચે મુજબ મળે છે :

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon + \upsilon_s} \right)$$

અત્રે υ એ માધ્યમમાંથી ધ્વનિની ઝડપ છે. υ_0 એ માધ્યમની સાપેક્ષે નિરીક્ષકની ઝડપ છે. υ_s એ માધ્યમની સાપેક્ષે ઉદ્ગમની ઝડપ છે. આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં $O \rightarrow S$ દિશામાંના વેગને ધન અને વિરુદ્ધ દિશામાંના વેગને ઋણ લેવાનાં છે.

ભૌતિકરાશિ	પ્રતીક	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
તરંગલંબાઈ	λ	[L]	m^1	સમાન કલાવાળાં બે ક્રમિક બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર
પ્રસરણ-અચળાંક	k	$[L^{-1}]$	m^{-1}	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
તરંગ-ઝડપ	υ	$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	$\upsilon = \nu\lambda$
સ્પંદ આવૃત્તિ	ν_{beat}	$[T^{-1}]$	s^{-1}	સંપાત થતાં તરંગોની બે નજીકની આવૃત્તિઓનો તફાવત

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. તરંગ એ માધ્યમમાં દ્રવ્યની સમગ્રપણે ગતિ નથી. હવામાં ધ્વનિતરંગ કરતાં પવન જુદો છે. પવનમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ હવાની ગતિ થાય છે. ધ્વનિતરંગમાં હવાના સ્તરોનાં સંઘનન અને વિઘનન થતાં હોય છે.

2. તરંગમાં દ્રવ્ય નહિ પણ ઊર્જા એકથી બીજા બિંદુએ સ્થાનફેર પામે (Transferred) છે.

3. ઊર્જાનું સ્થાનાંતર માધ્યમના પાસપાસેના દોલન કરતા ભાગો વચ્ચે સ્થિતિસ્થાપક બળો મારફતના જોડાણને લીધે થાય છે.

4. લંબગત તરંગો જે માધ્યમને આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક હોય છે તેમાં જ પ્રસરી શકે છે. સંગત તરંગોને પ્રસરણ માટે બલ્ક મૉડ્યૂલસની જરૂર છે તેથી ઘન, પ્રવાહી અને વાયુઓમાં પ્રસરી શકે છે.

5. આપેલ આવૃત્તિના હાર્મોનિક, પ્રગામી તરંગમાં આપેલી ક્ષણે બધા કણોને સમાન કંપવિસ્તાર પણ જુદી જુદી કળાઓ હોય છે. સ્થિત તરંગમાં બે ક્રમિક નિષ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેના બધા કણોની કળા સમાન હોય છે પણ કંપવિસ્તાર જુદા હોય છે.

6. માધ્યમમાં સ્થિર નિરીક્ષકની સાપેક્ષે યાંત્રિક તરંગની તે માધ્યમમાં ઝડપ (υ), માધ્યમના માત્ર સ્થિતિસ્થાપક અને અન્ય ગુણધર્મો (દળ ઘનતા જેવા) પર આધાર રાખે છે. તે ઉદ્ગમના વેગ પર આધારિત નથી.

7. માધ્યમની સાપેક્ષે વેગ υ_0થી ગતિ કરતા નિરીક્ષક માટે તરંગની ઝડપ સ્વાભાવિક રીતે υ કરતાં જુદી પણ $\upsilon \pm \upsilon_0$ જેટલી છે.

સ્વાધ્યાય

15.1 2.5 kg દળની એક દોરી 200 Nના તણાવ હેઠળ છે. તણાવવાળી દોરીની લંબાઈ 20.0 m છે. જો દોરીના એક છેડે એક લંબગત આંચકો (Jerk) આપવામાં આવે, તો તે વિક્ષોભને બીજા છેડે પહોંચતાં કેટલો સમય લાગે ?

15.2 300 m ઊંચા ટાવરની ટોચ પરથી પડવા દીધેલો એક પથ્થર ટાવરના પાયા આગળના જળાશયના પાણીમાં ખાબકે છે. આ ખાબકવાનો અવાજ ટોચ પર ક્યારે સંભળાશે ? હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m s^{-1} આપેલ છે. (g = 9.8 m s^{-2})

15.3 સ્ટીલના એક તારની લંબાઈ 12.0 m અને દળ 2.10 kg છે. તારમાં લંબગત તરંગની ઝડપ સૂકી હવામાં 20 °C તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ જેટલી એટલે કે 343 m s^{-1} જેટલી બને તે માટે તારમાં તણાવ કેટલો હોવો જોઈએ ?

15.4 $\upsilon = \sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$ નો ઉપયોગ કરી સમજાવો કે શા માટે હવામાં ધ્વનિની ઝડપ

(a) દબાણ પર આધારિત નથી.

(b) તાપમાન સાથે વધે છે.

(c) આર્દ્રતા (ભેજ-Humidity) સાથે વધે છે.

15.5 તમે એવું શીખ્યાં છો કે એક પરિમાણમાં પ્રગામી તરંગ $y = f(x, t)$ દ્વારા રજૂ કરાય છે, જ્યાં x અને t એ $x - \upsilon t$ કે $x + \upsilon t$ જેવા સંયોજનરૂપે દેખાય છે. એટલે કે $y = f(x \pm \upsilon t)$ શું આથી ઊલટું સત્ય છે ? yનાં નીચેનાં વિધેયો શક્ય રીતે પ્રગામી તરંગને રજૂ કરે છે કે કેમ તે ચકાસો.

(a) $(x - \upsilon t)^2$

(b) $\log [(x + \upsilon t)/x_0]$

(c) $1/(x + \upsilon t)$

15.6 એક ચામાચીડિયું હવામાં 1000 kHz આવૃત્તિનો ધ્વનિ ઉત્પન્ન કરે છે. જો આ ધ્વનિતરંગ એક પાણીની સપાટીને મળતું હોય, તો (a) પરાવર્તિત ધ્વનિની (b) પારગમિત ધ્વનિની તરંગલંબાઈ કેટલી હશે ? ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 340 m s^{-1} અને પાણીમાં ઝડપ 1486 m s^{-1} છે.

15.7 એક હૉસ્પિટલમાં પેશીમાંની ગાંઠ (ગ્રંથિ)નું સ્થાન નક્કી કરવા અલ્ટ્રાસોનિક સ્કેનર વપરાય છે. જો ગાંઠમાં ધ્વનિની ઝડપ 1.7 km s^{-1} હોય તેમાં ધ્વનિની તરંગલંબાઈ કેટલી હશે ? સ્કેનરની કાર્યવાહક (Operating) આવૃત્તિ 4.2 MHz છે.

15.8 એક દોરી પર લંબગત હાર્મોનિક તરંગ $y(x, t) = 3.0 \sin (36t + 0.018x + \pi/4)$ વડે રજૂ કરાય છે, જ્યાં x અને y cm માં હવામાં અને t s માં છે. x ની ધન દિશા ડાબેથી જમણી તરફ છે.

(a) આ પ્રગામી તરંગ છે કે સ્થિત તરંગ છે ? જો તે પ્રગામી હોય, તો ઝડપ કેટલી અને પ્રસરણની દિશા કઈ છે ?

(b) તેના કંપવિસ્તાર અને આવૃત્તિ કેટલા છે ?

(c) ઉદ્‌ગમ પાસે મૂળ (પ્રારંભિક) કળા કેટલી છે ?

(d) તરંગમાં બે ક્રમિક શૃંગ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર કેટલું છે ?

15.9 સ્વાધ્યાય 15.8માં રજૂ કરેલ તરંગ માટે x = 0, 2 અને 4 cm માટે સ્થાનાંતર (y) વિરુદ્ધ (t)ના આલેખ દોરો. આ આલેખોના આકાર કેવા છે ? પ્રગામી તરંગમાં દોલન ગતિ એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ કઈ બાબતોમાં જુદી પડે છે : કંપવિસ્તાર, આવૃત્તિ કે કળા ?

15.10 પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગ માટે

$y(x, t) = 2.0 \cos 2\pi(10t - 0.0080\, x + 0.35)$ છે.

જ્યાં, x અને y cmમાં અને t sમાં છે. જે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર

(a) 4 m

(b) 0.5 m

(c) $\frac{\lambda}{2}$

(d) $\frac{3\lambda}{4}$ હોય, તેમને માટે દોલન ગતિનો કળા-તફાવત શોધો.

15.11 એક દોરી (બંને છેડે જડિત)નું લંબગત સ્થાનાંતર

$y(x, t) = 0.06 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \cos(120\, \pi t)$

પરથી મળે છે, જ્યાં x અને y mમાં અને t sમાં છે. દોરીની લંબાઈ 1.5 m અને દળ 3.0×10^{-2} kg છે.

નીચેના ઉત્તર આપો :

(a) આ વિધેય પ્રગામી તરંગ કે સ્થિત તરંગ રજૂ કરે છે ?

(b) આ તરંગનું વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા બે તરંગોના સંપાતપણા તરીકે અર્થઘટન કરો. દરેક તરંગની તરંગલંબાઈ, આવૃત્તિ અને ઝડપ કેટલા હશે ?

(c) દોરીમાંનો તણાવ શોધો.

15.12 (i) સ્વાધ્યાય 15.11માં જણાવેલ દોરી પરના તરંગ માટે દોરી પરનાં બધાં બિંદુઓ એક સમાન (a) આવૃત્તિ (b) કળા (c) કંપવિસ્તારથી દોલનો કરે છે ? તમારા ઉત્તરો સમજાવો. (ii) એક છેડેથી 0.375 m દૂર આવેલા બિંદુએ કંપવિસ્તાર કેટલો હશે ?

15.13 એક સ્થિતિસ્થાપક તરંગનું સ્થાનાંતર (લંબગત કે સંગત) દર્શાવવા માટે x અને t માં કેટલાંક વિધેયો નીચે આપેલાં છે. આમાંથી કયું વિધેય (i) પ્રગામી તરંગ (ii) સ્થિત તરંગ (iii) એકેય તરંગ નહિ, રજૂ કરે છે ?

(a) $y = 2 \cos(3x) \sin(10t)$

(b) $y = 2\sqrt{x - vt}$

(c) $y = 3 \sin(5x - 0.5t) + 4 \cos(5x - 0.5t)$

(d) $y = \cos x \sin t + \cos 2x \sin 2t$

15.14 બે દૃઢ આધાર વચ્ચે તણાવવાળી એક દોરી 45 Hz આવૃત્તિ સાથે તેના મૂળભૂત મોડમાં દોલનો કરે છે. દોરીનું દળ 3.5×10^{-2} kg અને તેની રેખીય દળ ઘનતા 4.0×10^{-2} kg m^{-1} છે. (i) દોરી પર લંબગત તરંગની ઝડપ કેટલી હશે ? (ii) દોરીમાં તણાવ કેટલો હશે ?

15.15 એક મીટર લાંબી એક છેડે ખુલ્લી અને બીજે છેડે ખસી શકે તેવો પિસ્ટન ધરાવતી એક નળી અચળ આવૃત્તિના ઉદ્‌ગમ (340 Hz આવૃત્તિનો સ્વરકાંટો) સાથે નળીની લંબાઈ 25.5 cm અને 79.3 cm હોય ત્યારે અનુનાદ દર્શાવે છે. પ્રયોગના તાપમાને હવામાંથી ધ્વનિની ઝડપનો અંદાજ મેળવો. છેડા પરની અસરો અવગણ્ય છે.

15.16 100 cm લંબાઈનો સ્ટીલનો એક સળિયો તેના મધ્યમાંથી જકડેલો (Clamped) છે. સળિયાનાં સંગત દોલનોની મૂળભૂત આવૃત્તિ 2.53 kHz આપેલ છે. સ્ટીલમાં ધ્વનિની ઝડપ કેટલી હશે ?

15.17 20 cm લાંબી નળી એક છેડે બંધ છે. 430 Hzના ઉદ્‌ગમ વડે નળીનો કયો હાર્મોનિક મોડ અનુનાદમાં ઉત્તેજિત થાય છે ? જો બંને છેડા ખુલ્લા હોય, તો તે જ ઉદ્‌ગમ નળી સાથે અનુનાદમાં હશે ? (હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m s^{-1} છે.)

15.18 સિતારના બે તાર A અને B સ્વર 'ગા' ઉત્પન્ન કરવામાં થોડી સુમેળ ક્ષતિ (Out of Tune)ને લીધે 6 Hz આવૃત્તિનાં સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. A તારમાં તણાવ સહેજ ઘટાડતાં સ્પંદની આવૃત્તિ ઘટીને 3 Hz થાય છે. જો Aની મૂળ આવૃત્તિ 324 Hz હોય, તો Bની આવૃત્તિ કેટલી હશે ?

15.19 સમજાવો શા માટે (અથવા કેવી રીતે) :

(a) ધ્વનિતરંગમાં સ્થાનાંતરનું નિષ્પંદ બિંદુ એ દબાણનું પ્રસ્પંદ બિંદુ છે.

(b) ચામાચીડિયા કોઈ 'આંખ' વિના અંતરાયોનાં અંતરો, દિશાઓ, પ્રકાર અને પરિમાણો જાણી શકે છે.

(c) વાયોલિનના સૂર અને સિતારના સૂરની એક સમાન આવૃત્તિ હોઈ શકે છે, તેમ છતાં આપણે તે બે સૂર વચ્ચેનો ભેદ પારખી શકીએ છીએ.

15.20 રેલવે સ્ટેશનના પ્લૅટફૉર્મની બહારના સિગ્નલ આગળ સ્થિર ઊભેલી એક ટ્રેન સ્થિર હવામાં 400 Hz આવૃત્તિની સિસોટી (Whistle) વગાડે છે. પ્લૅટફૉર્મ પરના નિરીક્ષકને સિસોટીની આવૃત્તિ કેટલી જણાશે; જ્યારે (a) ટ્રેન પ્લૅટફૉર્મ તરફ 10 m s^{-1}ની ઝડપથી આવતી હોય (b) ટ્રેન પ્લૅટફૉર્મથી દૂર 10 m s^{-1}ની ઝડપથી જતી હોય ? સ્થિર હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m s^{-1} લો.

15.21 એક સ્ટેશન-યાર્ડમાં ઊભેલી ટ્રેન હવામાં 400 Hz આવૃત્તિની સિસોટી વગાડે છે. યાર્ડથી સ્ટેશન તરફ પવન 10 m s^{-1}ની ઝડપથી ફૂંકાવાનું શરૂ થાય છે. સ્ટેશનના પ્લૅટફૉર્મ પર ઊભેલા નિરીક્ષકને સંભળાતા ધ્વનિની આવૃત્તિ, તરંગલંબાઈ અને વેગ કેટલા હશે ? શું આ પરિસ્થિતિ હવા સ્થિર હોય અને નિરીક્ષક 10 m s^{-1}ની ઝડપથી યાર્ડ તરફ દોડતો હોય તે કિસ્સાના જેવી જ છે ? સ્થિર હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m s^{-1} લો.

વધારાનું સ્વાધ્યાય

15.22 દોરી પરના એક પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગને $y(x, t) = 7.5 \sin (0.0050x + 12t + \pi/4)$ વડે રજૂ કરાય છે.

(a) $x = 1$ cm આગળના બિંદુને $t = 1$ s સમયે દોલનના સ્થાનાંતર અને વેગ કેટલા હશે ? આ વેગ તરંગના પ્રસરણના વેગ જેટલો છે ?

(b) $x = 1$ cm બિંદુના $t = 1$ s, 5 s અને 11 s સમયોના લંબગત સ્થાનાંતર જેટલાં જ સ્થાનાંતર ધરાવતા દોરી પરનાં બિંદુઓનાં સ્થાન શોધો.

15.23 એક નાનું ધ્વનિ-સ્પંદન (દાખલા તરીકે સિસોટીનો એક ક્ષણિક અવાજ) એક માધ્યમમાં મોકલવામાં આવે છે.

(a) શું સ્પંદનને નિશ્ચિત (i) આવૃત્તિ (ii) તરંગલંબાઈ (iii) પ્રસરણની ઝડપ છે ?

(b) જો સ્પંદન ઉત્પન્ન થવાનો દર, દર 20 મિનિટ પછી 1નો હોય તો (એટલે કે સિસોટી દર 20 s બાદ સેકન્ડના ખૂબ નાના ભાગ માટે વગાડાય છે.) શું સિસોટી વડે ઉત્પન્ન થતા સ્વરની આવૃત્તિ 1/20 અથવા 0.05 Hz છે ?

15.24 રેખીય દળ ઘનતા 8.0×10^{-3} kg m^{-1} હોય તેવી એક લાંબી દોરીનો એક છેડો 256 Hzની આવૃત્તિના એ વિદ્યુત-ચાલિત સ્વરકાંટા સાથે જોડેલ છે. બીજો છેડો એક ગરગડી પરથી પસાર થઈ 90 kg દળ ધરાવતા એક પલ્લા સાથે બાંધેલ છે. ગરગડી આગળનું દોરીનું બિંદુ ત્યાં આવતી બધી ઊર્જાને શોષી લે છે તેથી ત્યાં પરાવર્તિત તરંગનો કંપવિસ્તાર અવગણ્ય છે. $t = 0$ સમયે દોરીના ડાબા છેડા (સ્વરકાંટા બાજુનો છેડો) $x = 0$નું લંબગત સ્થાનાંતર ($y = 0$) શૂન્ય છે અને તે ધન y-દિશામાં ગતિ કરે છે. તરંગનો કંપવિસ્તાર 5.0 cm છે. દોરીમાં તરંગને રજૂ કરતા લંબગત સ્થાનાંતર yને x અને tના વિધેય તરીકે લખો.

15.25 એક સબમરીનમાં રાખેલી સોનાર (SONAR) પદ્ધતિ 40.0 kHz પર કાર્યાન્વિત થાય છે. એક દુશ્મન સબમરીન SONAR તરફ 360 km h^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરી રહી છે. બીજી સબમરીનથી પરાવર્તિત થતા ધ્વનિતરંગની આવૃત્તિ કેટલી હશે ? પાણીમાં ધ્વનિની ઝડપ 1450 m s^{-1} લો.

15.26 ભૂકંપ પૃથ્વીની અંદરના ભાગમાં ધ્વનિતરંગો ઉત્પન્ન કરે છે. વાયુ કરતાં જુદી બાબત એ છે કે, પૃથ્વી લંબગત (S) અને સંગત (P) બંને તરંગો અનુભવે છે. S તરંગની લાક્ષણિક ઝડપ 4 km s^{-1} અને P તરંગની ઝડપ 8 km s^{-1} છે. સિસ્મોગ્રાફ ભૂકંપથી આવતા S અને P તરંગોને નોંધે છે. એક ભૂકંપમાં પ્રથમ P તરંગ, પ્રથમ S તરંગ કરતાં 4 min વહેલું આવી પહોંચે છે. તરંગો સુરેખામાં ગતિ કરતા ધારી લઈને ભૂકંપ કેટલા અંતરે થયો તે શોધો.

15.27 એક ગુફામાં ચામાચીડિયું અલ્ટ્રાસોનિક સ્પંદનો દ્વારા દિશાઓની જાણકારી મેળવતાં હળવેથી અને ઝડપથી પસાર થાય છે. ચામાચીડિયા દ્વારા ઉત્સર્જિત ધ્વનિની આવૃત્તિ 40 kHz ધારો. એક સપાટ દીવાલની સપાટી તરફની એક ત્વરિત તરાપમાં ચામાચીડિયું હવામાં ધ્વનિની ઝડપના 0.03 ગણી ઝડપે ગતિ કરે છે. દીવાલ પરથી પરાવર્તન થઈને કેટલી આવૃત્તિ ચામાચીડિયાને સંભળાશે ?